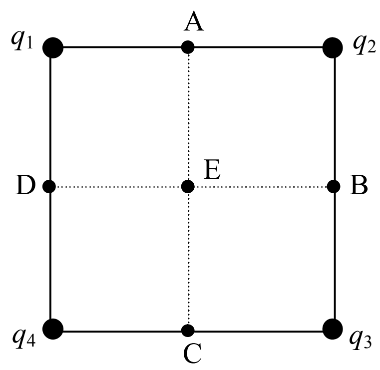
5-ASIS FIZIKOS TURNYRAS
4-oji užduotis Nr. FT5-4 / 2011 09 05 – 2011 10 03

Užduoties sąlyga / FT5-4 ▼

Elektros krūvių kvadratas

Keturiose kvadrato viršūnėse yra patalpinti keturi rutuliukai, kurių krūviai lygūs q_1, q_2, q_3, ir q_4. Taškai A, B, C ir D (žiūr. brėž.) yra atitinkamų kvadrato kraštinių vidurio taškai, o taškas E yra kvadrato centras. Kvadrato kraštinės ilgis lygus $2a = 10\,\mathrm{cm}$. Žinoma, kad taškų A, B ir C elektrostatiniai potencialai lygūs $\varphi_A = 1\,\mathrm{V}$, $\varphi_B = 2\,\mathrm{V}$ ir $\varphi_C = 4\,\mathrm{V}$.

1. Apskaičiuokite visų keturių rutuliukų krūvių sumą: $Q = q_1 + q_2 + q_3 + q_4$.
2. Raskite elektros lauko potencialą taške E.
3. Raskite elektros lauko potencialą taške D.
4. Pirmojo rutuliuko krūvis padidinamas dydžiu Δq. Kaip reikia pakeisti kitų rutuliukų krūvius, kad taškų A, B, C, D ir E potencialai nepasikeistų.



Užduotį parengė Vilniaus universiteto Fizikos fakulteto Teorinės fizikos katedros docentas, mokyklos „Fizikos olimpas" dėstytojas dr. Egidijus Anisimovas.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2011 09 05.*

Užduoties aiškinamasis sprendimas / FT5-4 ▼

Siekdami supaprastinti išraiškas, jose pasitaikančius geometrinius daugiklius pažymėsime simboliais $t = 1/\sqrt{2}$ ir $p = 1/\sqrt{5}$.

1. Taškų A ir C potencialai lygūs:

$$\varphi_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(q_1 + q_2 + pq_3 + pq_4\right),$$
$$\varphi_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(pq_1 + pq_2 + q_3 + q_4\right). \quad (1)$$

Sudėję abi (1) lygtis, randame $4\pi\varepsilon_0 a(\varphi_A + \varphi_C) = Q(1+p)$, todėl

$$Q = \frac{4\pi\varepsilon_0 a(\varphi_A + \varphi_C)}{(1+p)} = 19\,\mathrm{pC}. \quad (2)$$

2. Elektrostatinis potencialas taške E lygus

$$\varphi_E = \frac{tQ}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{t(\varphi_A + \varphi_C)}{1+p} = 2{,}44\,\mathrm{V}. \tag{3}$$

3. Taškų B, D ir E potencialus sieja sąryšis analogiškas (3), taigi, turime

$$\begin{aligned} \varphi_E &= \frac{t(\varphi_A + \varphi_C)}{1+p}, \\ \varphi_E &= \frac{t(\varphi_B + \varphi_D)}{1+p}, \end{aligned} \tag{4}$$

ir apskaičiuojame

$$\varphi_D = \varphi_A + \varphi_C - \varphi_B = 3\,\mathrm{V}. \tag{5}$$

4. Atkreipiame dėmesį, kad pasinaudodami trimis sąlygoje duotomis potencialo vertėmis, galime užrašyti tris lygtis

$$\begin{aligned} \varphi_A &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a}\left[(q_1+q_2) + p(q_3+q_4)\right], \\ \varphi_C &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a}\left[p(q_1+q_2) + (q_3+q_4)\right], \\ \varphi_B &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a}\left[(q_2+q_3) + p(q_1+q_4)\right]. \end{aligned} \tag{6}$$

Matome, kad šių trijų lygčių nepakanka nustatyti visų keturių nežinomų krūvių vertes, tačiau lygtys (6) vienareikšmiškai nusako bet kurių dviejų tai pačiai kvadrato kraštinei priklausančių krūvių sumas: $q_1 + q_2$, $q_2 + q_3$, $q_3 + q_4$ ir $q_1 + q_4$. Taigi, padidinę pirmojo rutuliuko krūvį dydžiu Δq, turime tokiu pačiu dydžiu *padidinti* ir trečiojo rutuliuko krūvį, o antrojo ir ketvirtojo rutuliukų krūvius *sumažinti* dydžiu Δq.

Užduoties aiškinamąjį sprendimą pateikė užduoties autorius dr. Egidijus Anisimovas.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2011 12 14.*

Turnyro dalyvių sprendimų aptarimas / FT5-4 ▼

Uždavinys nebuvo sunkus: jį spręsti ryžosi palyginti didelis skaičius turnyro dalyvių, kurių dauguma surinko aukštus balus.

Turnyro dalyviams sunkiausiai sekėsi atsakyti į ketvirtąjį klausimą: Pirmojo rutuliuko krūvis padidinamas dydžiu Δq. Kaip reikia pakeisti kitų rutuliukų krūvius, kad taškų A, B, C, D ir E potencialai nepasikeistų? Ne visiems pavyko susiorientuoti situacijoje, pateikti ir *pagrįsti* atsakymą.

Matematikos požiūriu reikalas yra toks: tiesiogiai skaičiuodami potencialo vertes penkiuose taškuose A, B, C, D ir E galime užrašyti penkias lygtis keturiems nežinomiems krūviams. Atrodytų, kad lygčių yra daugiau nei nežinomųjų.

Tačiau iš tikrųjų lygčių yra *mažiau* nei nežinomųjų. Lygtys, nusakančios potencialo vertes taškuose A, C ir E nėra nepriklausomos – bet kuri viena iš jų yra likusių dviejų tiesinis darinys. Toks pats teiginys galioja kitai trijų lygčių grupei, nusakančiai potencialus taškuose B, D ir E.

Taigi, nepriklausomų lygčių yra tik trys. Įdomu tai, kad turimos lygtys vienareikšmiškai nusako bet kurių dviejų tai pačiai kvadrato kraštinei priklausančių krūvių sumas: $q_1 + q_2$, $q_2 + q_3$, $q_3 + q_4$ ir $q_1 + q_4$. Tai pastebėjus, į uždavinio klausimą atsakyti visai nesunku.

Užduoties sprendimų aptarimą parengė užduoties autorius dr. Egidijus Anisimovas.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2011 12 14.*

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelė / FT5-4 ▼

Nr.	Sprendimų vertinimo kriterijus	Vertė balais
1.	Užrašytos potencialo išraiškos kvadrato kraštinių vidurio taškams	2
2.	Apskaičiuota rutuliukų krūvių suma	2
3.	Apskaičiuotas potencialas kvadrato centre (taškas E)	2
4.	Apskaičiuotas potencialas taške D	2
5.	Apskaičiuoti rutuliukų krūvio pokyčiai, nekeičiantys potencialų taškuose A, B, C, D ir E	2
6.	Netikslumai	-0,5
7.	Pateikta ne pagal turnyro reikalavimus	-1
Didžiausias galimas sprendimo įvertinimas		10

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelę parengė užduoties autorius dr. Egidijus Anisimovas.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2011 12 14.*