TARPTAUTINIŲ FIZIKOS OLIMPIADŲ

UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

XVI-XXX olimpiados

Fizikos Olimpas
VILNIUS 2000

Užduočių sprendimus parengė:

Mechanika (71, 75, 76, 84, 89, 99, 112, 113 užduotys) – docentas Juozas Bučinskas, (93, 94, 95, 98, 108, 116b, 118, 119a. 119e, 123 užduotys) – profesorius Antanas Bandzaitis, (129 užduotis) – profesorius Edmundas Kuokštis.

Molekulinė fizika ir termodinamika (79, 88, 116c, 119d, 121, 124 užduotys) – tarptautinių olimpiadų prizininkas doktorantas Vincas Tamošiūnas, (127 užduotis) – profesorius Edmundas Kuokštis).

Elektra ir magnetizmas (70, 80, 81, 90, 96, 101, 103, 107, 116a, 116e, 117 užduotys) – docentas Vytautas Rinkevičius, (128 užduotis) – profesorius Edmundas Kuokštis.

Optika (69, 74, 92, 100, 102, 116d, 119c užduotys) – docentas Vaidutis Šalna.

Kvantinė, atomo ir branduolio fizika (83, 85, 97, 106, 111, 119b, 120, 125 užduotys) – profesorius Antanas Bandzaitis.

Sudarytojas docentas Vytautas Rinkevičius.

Redagavo profesorius Edmundas Kuokštis.

Dėkojame p. Petrui Jonušui, kurio iniciatyva ir rūpesčiu buvo išleistas šis leidinėlis

Mokykla FIZIKOS OLIMPAS, 2000

Turinys

UŽDUOČIŲ SĄLYGOS

XVI tarptautinė fizikos olimpiada, 1985 m. (Jugoslavija)…… 5
XVII tarptautinė fizikos olimpiada, 1986 m (D. Britanija)….. 7
XVIII tarptautinė fizikos olimpiada, 1987 m. (Vokietija)…... 11
XIX tarptautinė fizikos olimpiada, 1988 m. (Austrija)……. 14
XX tarptautinė fizikos olimpiada, 1989 m. (Lenkija)...…… 17
XXI tarptautinė fizikos olimpiada, 1990 m. (Olandija)…… 20
XXII tarptautinė fizikos olimpiada, 1991 m. (Kuba)…… 25
XXIII tarptautinė fizikos olimpiada, 1992 m. (Suomija)…….. 28
XXIV tarptautinė fizikos olimpiada, 1993 m. (JAV)……... 33
XXV tarptautinė fizikos olimpiada, 1994 m. (Kinija)…….. 38
XXVI tarptautinė fizikos olimpiada, 1995 m. (Australija)….. 41
XXVII tarptautinė fizikos olimpiada, 1996 m. (Norvegija)…. 44
XXVIII tarptautinė fizikos olimpiada, 1997 m. (Kanada)…… 48
XXIX tarptautinė fizikos olimpiada, 1998 m. (Islandija)……. 53
XXX tarptautinė fizikos olimpiada, 1999 m. (Italija)……. 61

UŽDUOČIŲ SPRENDIMAI

XVI tarptautinė fizikos olimpiada, 1985 m. (Jugoslavija)….. 67
XVII tarptautinė fizikos olimpiada, 1986 m (D. Britanija)..... 75
XVIII tarptautinė fizikos olimpiada, 1987 m. (Vokietija)..... 89
XIX tarptautinė fizikos olimpiada, 1988 m. (Austrija)..... 96
XX tarptautinė fizikos olimpiada, 1989 m. (Lenkija)..... 102
XXI tarptautinė fizikos olimpiada, 1990 m. (Olandija)…….. 108
XXII tarptautinė fizikos olimpiada, 1991 m. (Kuba)…….. 114
XXIII tarptautinė fizikos olimpiada, 1992 m. (Suomija)…… 122
XXIV tarptautinė fizikos olimpiada, 1993 m. (JAV)..... 134
XXV tarptautinė fizikos olimpiada, 1994 m. (Kinija)..... 144

XXVII tarptautinė fizikos olimpiada, 1996 m. (Norvegija).... 157
XXVIII tarptautinė fizikos olimpiada, 1997 m. (Kanada)..... 164
XXIX tarptautinė fizikos olimpiada, 1998 m. (Islandija)..... 171
XXX tarptautinė fizikos olimpiada, 1999 m. (Italija)..... 179

TEORINIŲ UŽDUOČIŲ SĄLYGOS

XVI tarptautinė fizikos olimpiada, 1985 m. (Jugoslavija)

69. Jaunasis radijo mėgėjas palaiko radijo ryšį su dviem merginomis, gyvenančiomis skirtinguose miestuose A ir B. Jis nori įsirengti tokią antenų sistemą, kad galėtų kalbėtis su viena iš tų merginų (pvz., gyvenančia mieste B) ir kad jų pokalbio negalėtų girdėti antroji mergina (gyvenanti mieste A), ir atvirkščiai. Ta antenų sistema turi susidėti iš dviejų vertikalių antenų, vienodu intensyvumu spinduliuojančių visomis horizontaliomis kryptimis.

Nustatykite, koks turi būti atstumas tarp antenų r, kampas ψ_0 tarp plokštumos, einančios per abi antenas, ir šiaurės krypties, taip pat fazių skirtumas $\Delta\varphi$ tarp antenų spinduliuojamų elektromagnetinių signalų. Atstumas tarp antenų turi būti kiek galima mažesnis.

Skaitinę vertę apskaičiuokite tarę, kad jaunuolio radijo siųstuvo dažnis ν=27 MHz, o jo antenų sistema bus Portorože. Pagal žemėlapį jaunuolis nustatė, kad kampas tarp krypties į miestą A (Koperį) ir šiaurės krypties $\psi_1=72^o$, o tarp krypties į miestą B (Bunę) ir šiaurės krypties $\psi_2=157^0$.

70. Iš InSb puslaidininkio padarytas stačiakampio gretasienio formos ilgas strypelis ($a>b>>c$), kuriuo a briaunos kryptimi teka srovė I. Strypelis yra magnetiniame lauke, kurio srauto tankio vektorius $\vec{B}$ nukreiptas c briaunos kryptimi. InSb krūvininkai yra elektronai, $\vec{E}$ stiprio elektriniame lauke judantys vidutiniu $v=uE$ greičiu (u - elektronų judris). Esant magnetiniam laukui dar reikia atsižvelgti į elektronus veikiančią Lorenco jėgą, todėl šiuo atveju elektrinio lauko stiprio vektoriaus kryptis nėra lygiagreti srovės tekėjimo krypčiai. Šis reiškinys vadinamas Holo efektu.

a) Nustatykite elektrinio lauko stiprio vektoriaus strypelyje modulį ir kryptį.

b) Apskaičiuokite potencialų skirtumą tarp strypelio priešingų sienų briaunos b kryptimi.

c) Išveskite b) punkte nustatyto potencialų skirtumo nuolatinės dedamosios analizinę išraišką, jei srovės stipris ir magnetinio srauto tankis kinta taip: $I=I_0\sin\omega t$, $B=B_0\sin(\omega t+\varphi)$.

d) Suprojektuokite (ir paaiškinkite) elektros grandinę, su kuria, panaudojant c) punkte gautą rezultatą, būtų galima išmatuoti į kintamosios srovės grandinę įjungto prietaiso naudojamą galią.

Pasinaudokite šiais duomenimis: InSb elektronų judris u=7,8 m^2/(V·s), elektronų skaičiaus tankis $n=2{,}5\cdot10^{22}$ m^{-3}; I=1 A, B=0,1 T, b=1,0 cm, c=1 mm.

71. Kosminio laivo pasiuntimo už Saulės sistemos ribų projekte buvo svarstomos dvi galimybės:

1. Pakankamu ištrūkti iš Saulės sistemos greičiu kosminis laivas paleidžiamas tiesiog iš Žemės orbitos.

2) Kosminis laivas iš pradžių priartėja prie vienos iš tolimesnių nuo Saulės planetų, tos planetos veikiamas pakeičia savo judėjimo kryptį ir įgyja greitį, reikalingą Saulės sistemai palikti.

Galima tarti, kad visais atvejais kosminis laivas juda veikiamas tik Saulės arba tik planetos gravitacinio lauko, žiūrint, kuris iš tų laukų yra stipresnis tame taške.

a) Apskaičiuokite mažiausią kosminio laivo greitį v_a ir jo kryptį Žemės orbitinio greičio atžvilgiu, jei būtų įgyvendinamas 1 projektas.

b) Tarkite, kad kosminis laivas buvo paleistas tokia kryptimi, kokia apskaičiuota punkte a), bet kitu greičiu v_b Žemės atžvilgiu. Apskaičiuokite kosminio laivo greitį (t.y. lygiagrečiąją ir statmenąją Marso orbitai dedamąsias) tuo metu, kai jis kirs Marso orbitą. Skaičiuodami manykite, kad tuo metu Marsas yra toli nuo kosminio laivo.

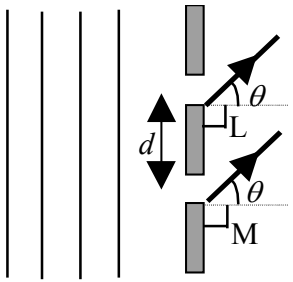
c) Tarkite, kad kosminis laivas pateko į Marso gravitacinį lauką. Apskaičiuokite mažiausią laivo starto iš Žemės orbitos greitį v_c, būtiną, kad laivas išeitų už Saulės sistemos ribų, prieš tai

pabuvojęs Marso gravitaciniame lauke. (Jūsų neturi dominti tiksli Marso padėtis jo sąveikos su laivu metu). *Užuomina:* iš punkto a) rezultatų žinote optimalų greičio dydį ir kryptį, būtinus, kad laivas išeitų iš Saulės sistemos. Paieškokite sąryšio tarp šio greičio ir jo dedamųjų iki laivui patenkant į Marso gravitacijos lauką, t.y. dedamųjų, jūsų nustatytų punkte b). Ar išliks nepakitusi kosminio laivo energija?

d) Apskaičiuokite, kokį didžiausią energijos kiekį galima sutaupyti vykdant 2 projektą vietoj 1.

Pastabos. 1) Galima manyti, kad visos planetos skrieja aplink Saulę ta pačia kryptimi apskritomis orbitomis, esančiomis vienoje plokštumoje. Į oro pasipriešinimą, Žemės sukimąsi apie savo ašį ir energiją, sunaudojamą išeinant iš Žemės gravitacinio lauko, neatsižvelkite. 2) Žinomos šios skaitinės vertės: Žemės skriejimo aplink Saulę greitis v_0=30 km/s, santykis atstumų „Žemė - Saulė" ir „ Marsas - Saulė" lygus 2/3.

XVII tarptautinė fizikos olimpiada, 1986 m. (Didžioji Britanija)



39 pav.

74. Plokščioji monochromatinė šviesos banga, kurios ilgis λ ir dažnis ν, statmenai krinta į du vienodus siaurus plyšius L ir M, atstumas tarp kurių d (39 pav.). Šviesos bangos, išeinančios iš kiekvieno plyšio kampu θ su statmeniu, nuotolyje $x \gg d$ laiko momentu t aprašomos lygtimis

$$y=a\cos[2\pi(\nu t-x/\lambda)].$$

Čia a – amplitudė (vienoda abiem bangoms).

1) Įrodykite, kad dviejų bangų, nukrypusių nuo statmens kampu θ, atstojamąją amplitudę A galima apskaičiuoti sudėjus du

vektorius, kurių kiekvieno modulis lygus a, o kryptis priklauso nuo šviesos bangos fazės. Pagal vektorių diagramą geometriškai įsitikinkite, kad

$$A=2a\cos\beta, \text{ čia } \beta=(\pi d\sin\theta)/\lambda.$$

2) Du plyšiai pakeičiami difrakcine gardele, turinčia N vienodų plyšių, atstumas tarp kurių d. Amplitudžių vektorinės sudėties metodu parodykite, kad kiekvieno vektoriaus pradžia ir galas yra ant apskritimo, kurio spindulys R išreiškiamas lygtimi

$$R=a/(2\sin\beta).$$

Čia a – kiekvieno vektoriaus modulis. Įrodykite, kad atstojamoji amplitudė lygi

$$a(\sin N\beta/\sin\beta),$$

ir apskaičiuokite fazių skirtumą tarp atstojamosios bangos ir į gardelę krintančios bangos.

3) Tame pačiame brėžinyje nubraižykite $\sin N\beta$ ir $1/\sin\beta$ priklausomybių nuo β grafikus. Atskirame grafike parodykite, kaip atstojamosios bangos intensyvumas priklauso nuo β.

4) Apskaičiuokite pagrindinių maksimumų intensyvumą.

5) Įrodykite, kad pagrindinių maksimumų skaičius negali viršyti $(2d/\lambda)+1$.

6) Įrodykite, kad dvi bangos, kurių ilgiai λ ir $\lambda+\Delta\lambda$ (čia $\Delta\lambda \ll \lambda$), duoda pagrindinius maksimumus, esančius kampiniais atstumais

$$\Delta\theta=n\Delta\lambda/(d\cos\theta),$$

čia n=0, ±1, ±2, …

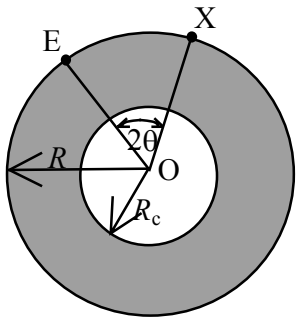
Apskaičiuokite šį kampinį atstumą natrio linijoms, kurių bangų ilgiai λ=589,0 nm ir $\lambda+\Delta\lambda$=589,6 nm, $d=1{,}2\cdot10^{-6}$ m.

75. Pagal šio amžiaus pradžioje pasiūlytą Žemės modelį Žemė yra R spindulio rutulys, sudarytas iš vienalyčio izotropinio kieto apvalkalo ir skysto R_c spindulio branduolio (40 pav.). Seisminių išilginių ir skersinių bangų (vadinamų dar p ir S bangomis) greičiai v_p ir v_S apvalkale yra pastovūs. Branduolyje išilginės bangos sklinda greičiu v_{cp}, o skersinės iš viso nesklinda. Žemės drebėjimas, įvykęs Žemės paviršiaus taške E, sukelia

seismines bangas, kurios sklinda Žeme ir gali būti užregistruotos stebėtojo, įrengusio savo seismografą bet kuriame Žemės paviršiaus taške X. Kampinis atstumas tarp taškų E ir X EOX=2θ (čia O - Žemės centras).

1) Įrodykite, kad seisminės bangos, tiesiai sklindančios tik apvalkale, tašką X pasieks per laiką t, išreiškiamą formule $t=(2R\sin\theta)/v$, kai $\theta\leq\arccos(R_c/R)$.
Čia $v=v_p$ p bangoms ir $v=v_S$ S bangoms.

2) Jei taško X padėtis tokia, kad $\theta>\arccos(R_c/R)$, tai seisminės bangos pasieks stebėtoją du kartus lūžusios apvalkalo ir branduolio riboje. Nubraižykite tokios bangos sklidimo trajektoriją. Išveskite sąryšį tarp kampo θ ir p bangos kritimo į apvalkalo ir branduolio ribą kampo i.



40 pav.

3) Pasinaudodami duomenimis: R=6370 km, R_c=3470 km, v_p=10,85 km/s, v_S=6,31 km/s, v_{cp}=9,02 km/s ir 2) punkte gautais rezultatais nubraižykite θ priklausomybės nuo i kokybinį grafiką. Aptarkite šios priklausomybės fizikinius darinius įvairiuose Žemės paviršiaus taškuose esantiems stebėtojams. Nubraižykite p ir S bangų sklidimo tarp taškų E ir X trukmės priklausomybės nuo kampo grafikus, kai $0\leq\theta<90^o$.

4) Įvykus Žemės drebėjimui stebėtojas nustatė, kad S banga jį pasiekė 2 min 11 s vėliau negu p banga. Pasinaudodami 3) punkto rezultatais nustatykite Žemės centro atžvilgiu išmatuotą kampinį atstumą tarp Žemės drebėjimo taško ir stebėtojo.

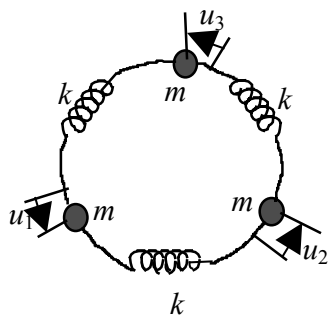
5) Stebėtojas, atlikęs 4) punkte aprašytą stebėjimą, nustatė, kad praėjus tam tikram laikui po to, kai jį pasiekė p ir S bangos, jo seismografe atsirado dar du įrašai, kuriuos vieną nuo kito skiria 6 min 37 s laiko intervalas. Paaiškinkite šį rezultatą ir patikrinkite, ar iš tikrųjų tai susiję su 4) punkte nustatytu kampiniu atstumu.

76. Trys m masės dalelės, viena su kita sujungtos tampriomis neįtemptomis spyruoklėmis, kurių kiekvienos standumas k, yra pusiausvyros padėtyse (41 pav.). Dalelės gali judėti tik apskritimu.

1) Kiekviena dalelė iš pusiausvyros padėties atlenkiama nedideliais atstumais u_1, u_2 ir u_3. Užrašykite kiekvienos dalelės judėjimo lygtis. Į spyruoklės masę neatsižvelkite.

2) Įrodykite, kad sistemoje galimi harmoniniai svyravimai, aprašomi lygtimi

$$u=a_n\cos\omega t \quad (n=1,\ 2 \text{ ir } 3).$$



41 pav.

Čia a_n – pastovios amplitudės. Taip pat įrodykite, kad svyruojančių dalelių pagreičiai lygūs $-\omega^2 u$, o kampinio dažnio ω galimos dvi vertės: $\omega_0\sqrt{3}$ ir 0. Čia $\omega_0^2=k/m$.

3) Sistemos dalelių ir spyruoklių skaičius padidinamas iki N. Kiekviena dalelė išlieka sujungta spyruoklėmis su dviem kaimynėmis. Iš pradžių spyruoklės neįtemptos, dalelės pusiausviros. Užrašykite n-tosios dalelės judėjimo lygtį (n=1, 2, 3,…, N), į kurią įeitų n-tosios dalelės ir kaimyninių dalelių poslinkiai iš pusiausvyros padėčių. Įrodykite, kad sprendinys

$$u_n(t)=a_s\sin(2ns\pi/N+\varphi)\cos\omega_s t$$

(čia s=1, 2,…, N, n=1, 2,…, N , φ – neapibrėžta fazė) tenkina judėjimo lygtį, jei kampinis dažnis yra

$$\omega_s=2\omega_0\sin(s\pi/N).$$

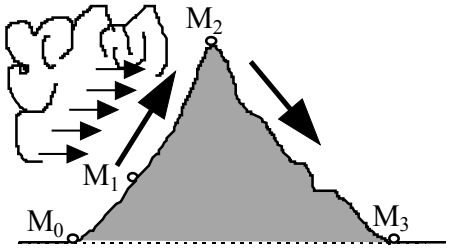
Čia a_s (s=1,…,N) – pastovios, nepriklausančios nuo n, amplitudės. Nurodykite galimų dažnių intervalą, jei grandinėje būtų be galo daug dalelių.

4) Nustatykite u_n/u_{n+1} santykį esant dideliems N šiais dviem atvejais: a) mažų dažnių sprendiniai; b) $\omega=\omega_{max}$, čia ω_{max} –

didžiausio dažnio sprendinys. Grafiškai pavaizduokite dalelių išsidėstymą grandinėje laiko momentu t a) ir b) atvejais.

5) Viena iš dalelių pakeičiama kita, kurios masė $m' << m$. Įvertinkite, kokių esminių pokyčių dėl to reikia laukti kampinių dažnių pasiskirstyme. Kokybiškai aprašykite dažnių spektro pobūdį, jei grandinė būtų sudaryta iš pakaitomis einančių m ir m' masių dalelių.

XVIII tarptautinė fizikos olimpiada, 1987 m. (Vokietija)



43 pav.

79. Kalnagūbrį adiabatiškai apteka drėgnas oras (43 pav.). Meteorologijos stotys M_0 ir M_3 įregistravo oro slėgį p_0=100 kPa, stotis M_2 – p_2=70 kPa. Oro temperatūra stotyje M_0 buvo t_0=+20° C. Orui kylant į kalną, kai slėgis pasidaro p_1=84,5 kPa, pradeda susidaryti debesys. Toliau kildamas oras, kuriame vyksta vandens garų kondensacija (oro masė, esanti virš kiekvieno paviršiaus kvadratinio metro, lygi 2000 kg), kalnagūbrio viršūnę (stotį M_2) pasiekia per 1500 s. Šio proceso metu iš kiekvieno oro kilogramo krituliais (lietumi) iškrinta m=2,45 g vandens.

1) Kokia yra debesų sluoksnio apatinės ribos temperatūra T_1?

2) Kokiame aukštyje h_1 virš stoties M_0 yra apatinė debesų riba, jei daroma prielaida, kad oro tankis didėjant aukščiui mažėja tiesiškai?

3) Kokia yra temperatūra T_2 kalnagūbrio viršūnėje?

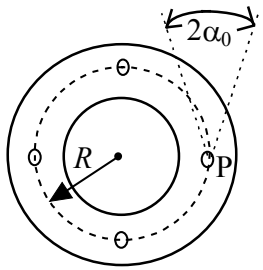
4) Kokio aukščio vandens stulpelis susidaro iš kritulių per 3 valandas? Garų kondensacijos sąlygas srityje nuo M_1 iki M_2 tarkite esant vienodas.

5) Kokia yra temperatūra T_3 už kalnagūbrio esančioje stotyje M_3? Palyginkite oro būsenas stotyse M_3 ir M_0.

Nurodymai ir duomenys. Į orą žiūrėkite kaip į idealias dujas. Vandens garų įtakos oro savitajai šilumai ir tankiui, taip pat ir savitosios garavimo šilumos priklausomybės nuo temperatūros nepaisykite. Temperatūrą nurodykite 1 K tikslumu, debesų apatinės ribos aukštį – 10 m tikslumu, kritulių stulpelio aukštį – 0,1 mm tikslumu.

Oro savitoji šiluma mus dominančių temperatūrų intervale c_p=1005 J/(kg·K); oro tankis stotyje M_0 esant slėgiui p_0 ir temperatūrai T_0 – ρ=1,189 kg/m^3; vandens savitoji garavimo šiluma debesyse – q_v=2500 kJ/kg; $c_p/c_v=\chi$=1,4; g=9,81 m/s^2.

80. Iš taškinio šaltinio P išlėkęs elektronų pluoštelis įlekia į toroido formos ritės magnetinį lauką $\vec{B}$ išilgai lauko linijų (44 pav.). Kampas $2\alpha_0$, kuriame telpa pluoštelis, labai mažas (α_0<<1). Pagreitinti įtampa U_0 elektronai įlekia į toroidą ties jo vidutiniu spinduliu R. Tarkite, kad $\vec{B}$ modulis yra pastovus. Į elektronų tarpusavio sąveiką pluoštelyje neatsižvelkite.



44 pav.

1) Norint, kad pluoštelis judėtų išilgai toroido lauko linijų, reikia sudaryti elektronus atlenkiantį vienalytį $\vec{B}_1$ srauto tankio magnetinį lauką. Apskaičiuokite B_1 elektronui, judančiam toroide apskrita R spindulio trajektorija.

2) Apskaičiuokite toroido magnetinio lauko, fokusuojančio elektronų pluoštelį keturiuose taškuose, tarp kurių kampinis atstumas lygus $\pi/2$ (žr. rutuliukus 44 pav.), srauto tankio modulį B.

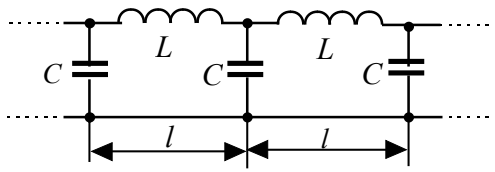
Nurodymas: nagrinėdami trajektorijas į magnetinio lauko linijų kreivumą neatsižvelkite.

3) Nesant atlenkiančio lauko B_1 elektronų pluoštelis nepasilieka toroide, o išlekia iš jo dreifuodamas statmenai toroido plokštumai. Įrodykite, kad radialinis elektronų nuokrypis nuo įlėkimo spindulio R yra baigtinis. Nustatykite dreifo greičio kryptį.

Nurodymas: į pluoštelio prasiskyrimo kampą šiuo atveju neatsižvelkite. Pasinaudokite energijos ir impulso tvermės dėsniais.

Duomenys: e/m=1,76·10^{11} C/kg, U_0=3 kV, R=50 mm.

81. Sinusiniams srovės stiprio ir įtampos virpesiams sklindant begaline L-C grandine (45 pav.) dviejų gretimų grandžių kondensatorių įtampų fazės skiriasi pastoviu dydžiu φ.



45 pav.

1) Nustatykite φ priklausomybę nuo ω, L ir C (ω – kampinis virpesių dažnis).

2) Nustatykite bangų sklidimo greitį, jeigu kiekvienos grandies ilgis lygus l.

3) Kokiai sąlygai esant virpesių sklidimo greitis silpnai priklauso nuo ω ir kam lygi to greičio vertė tuo atveju?

4) Pasiūlykite paprastą mechaninį modelį, analogišką anksčiau aprašytai elektrinei grandinei, ir išveskite lygtis, pagrindžiančias šią analogiją.

Pagalbinės formulės:

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2}),$$

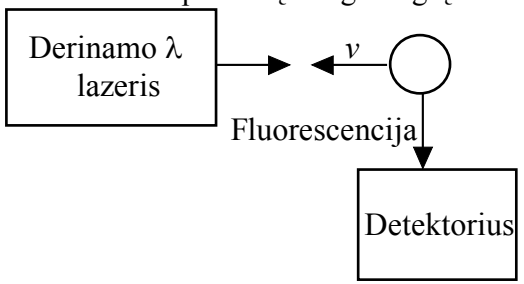
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$

XIX tarptautinė fizikos olimpiada, 1988 m. (Austrija)

83. ***Greičio nustatymas panaudojant Doplerio efektą.*** Fotonų spinduliavimo ir sugerties procesai yra grįžtamieji, todėl fotoną sugėręs atomas netrukus gali jį vėl savaime išspinduliuoti (fluorescencija). Šis reiškinys panaudojamas šiuolaikiniuose dalelių registravimo ir identifikavimo metoduose, taip pat atominių dalelių greičių spektroskopijoje.

Idealiame eksperimentiniame įrenginyje (46 pav.) dalelės (vieną kartą jonizuoti jonai) greičiu v juda prieš kintamo bangos ilgio lazerio spindulį. Nejudančios dalelės (v=0) gali būti sužadinamos λ_0=600 nm bangos ilgio spinduliais. Pagal Doplerio principą judančioms dalelėms sužadinti reikia kitokio bangos ilgio, todėl lazerį reikia suderinti kitam bangos ilgiui $\lambda(v)$. Jonų greičių spektras intervale nuo v_1=0 iki v_2=6000 m/s duotas 47 pav.

1) Pasinaudodami klasikiniu Doplerio efektu nustatykite, koks turi būti lazerio spindulių bangos ilgių intervalas, kad būtų



46 pav.

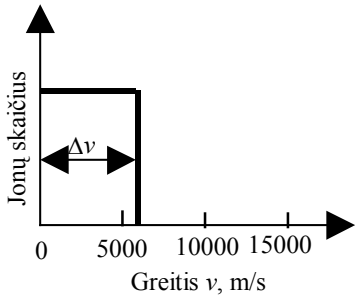
sužadinamos visos dalelės. Kokybiškai pavaizduokite sugeriamų fotonų skaičiaus pasiskirstymo priklausomybę nuo lazerio bangos ilgio.

Norint tiksliau apskaičiuoti reikia naudotis reliatyvistine formule

$$\nu' = \nu\sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}.$$

Įvertinkite, kokia paklaida daroma naudojantis klasikiniu artutinumu.

2) Tarkime, kad jonai prieš juos sužadinant pagreitinami elektriniu lauku, esant įtampai U. Koks yra kiekybinis sąryšis tarp greičių spektro pločio Δv ir greitinančios įtampos U? Padidėja ar sumažėja dalelių greičių spektro plotis jas greitinant?



47 pav.

3) Jonas, kurio krūvio ir masės santykis $e/m=4\cdot10^6$ C/kg, gali būti sužadintas dviejų bangų ilgių λ_1=600 nm ir $\lambda_2=\lambda_1+10^{-3}$ nm fotonais. Įrodykite, kad du lazerio spektro bangų ilgių intervalai persidengia žadinant visus jonus. Ar galima dviejų lygmenų žadinimo spektrus išskirti, pagreitinant jonus elektriniu lauku, esant įtampai U? Jei taip, nustatykite mažiausią įtampos vertę.

84. Maksvelo diskas. Vienalytis cilindrinis diskas (masė M=0,40 kg, spindulys R=0,060 m, storis d=0,010 m) pakabintas ant dviejų prie jo ašies (spindulys r) pritvirtintų vienodo ilgio siūlų. Į siūlų masę ir storį, taip pat į ašies masę galima neatsižvelgti. Vyniojant siūlus sunkio centras pakeliamas į H=1,0 m aukštį, paskui diskas paleidžiamas (48 pav.). Pasiekęs žemiausią padėtį diskas vėl ima kilti. Manydami, kad taškai A ir P visą laiką išlieka toje pačioje vertikalėje (49 pav.), atsakykite į šiuos klausimus:

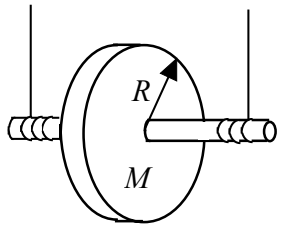
1) Kokį kampinį greitį įgyja diskas, kai jo sunkio centras būna nuėjęs kelią s?

2) Kokią slenkamojo judėjimo kinetinę energiją turi diskas, kai jo sunkio centras būna nuėjęs s=0,50 m kelią? Kaip ši energija santykiauja su kitų rūšių energijomis, jei ašies spindulys r=0,0030 m?

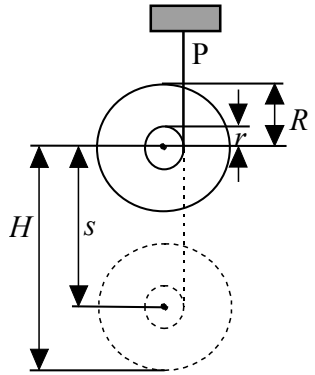
3) Kokio dydžio įtempimo jėga veikia kiekvieną iš dviejų siūlų leidžiantis diskui?

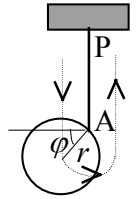
4) Kylant diskui nustatykite jo kampinio greičio priklausomybę nuo posūkio kampo φ (50 pav.). Nustatykite (bent kokybiškai) disko sunkio centro poslinkio ir greičio dedamųjų Dekarto sistemoje priklausomybę nuo kampo φ.

5) Mažiausia įtempimo jėga, kuriai esant siūlas nutrūksta, yra T_{min}=10 N. Iš kokio didžiausio aukščio galima leisti diską, kad jam kylant siūlas dar nenutrūktų?



48 pav.





50 pav.

49 pav.

85. *Rekombinacijos procesai dujiniame išlydyje*. Dujinio išlydžio aukštosios temperatūros plazmoje yra (Z-1) kartą jonizuoti atomai, kurių branduolyje yra Z protonų. Šiuos atomus žymėkime $A^{(Z-1)+}$.

1) Nagrinėkime atvejį, kai vienintelis atomo $A^{(Z-1)+}$ elektronas yra pagrindinėje būsenoje. Šioje būsenoje elektrono atstumo nuo branduolio kvadrato r_0^2 vidurkį apibrėšime kaip jo koordinačių neapibrėžtumų kvadratų $(\Delta x)^2$, $(\Delta y)^2$ ir $(\Delta z)^2$ sumą. Elektrono impulso kvadrato P_0^2 vidurkį apibrėšime kaip impulso projekcijų į

koordinačių ašis neapibrėžtumų kvadratų $(\Delta P_x)^2$, $(\Delta P_y)^2$ ir $(\Delta P_z)^2$ sumą. Kokią nelygybę tenkina sandauga $(P_0^2).(r_0^2)$?

2) $A^{(Z-1)+}$ jonas gali pagauti antrą elektroną šio proceso metu išspinduliuodamas fotoną. Užrašykite lygtis, nusakančias šių spindulių dažnį. (Dažnių skaičiuoti nereikia.)

3) Apskaičiuokite $A^{(Z-1)+}$ vidinę energiją žinodami, kad pagrindinėje būsenoje ji yra mažiausia. Skaičiuodami padarykite šias prielaidas: a) elektrono potencinės energijos išraiškose imkite $r=r_0$ iš 1) klausimo; b) kinetinės energijos išraiškose impulso kvadrato P_0^2 vidurkį skaičiuokite iš apytikslės lygybės $(P_0^2).(r^2)=\hbar^2$.

4) Panašiu būdu apskaičiuokite $A^{(Z-1)+}$ sistemos, atsiradusios vykstant rekombinacijai, pagrindinės būsenos energiją. Vidutinius elektronų atstumus nuo branduolio pažymėkite r_1 ir r_2 (analogiškai 3) klausimo r_0). Galite tarti, kad atstumas tarp elektronų lygus r_1+r_2. Kiekvieno impulso kvadrato vidutinė vertė tenkina neapibrėžtumo sąryšį $(P_1^2).(r_1^2)=\hbar^2$ ir $(P_2^2).(r_2^2)=\hbar^2$.

Nurodymas. Pasinaudokite tuo, kad atomo pagrindinės būsenos energija esti mažiausia, kai $r_1=r_2$.

5) Kokiai Z vertei esant rekombinacijos metu išspinduliuojamas fotonas, kurio dažnis $\omega_0=2{,}5\cdot10^{17}$ rad/s? Kokios medžiagos yra šis jonas?

Pastaba. Šiame punkte nagrinėkite tik pagrindinėje būsenoje esančio jono rekombinaciją su nejudančiu elektronu.

XX tarptautinė fizikos olimpiada, 1989 m. (Lenkija)

88. Skysčiai A ir B netirpsta vienas kitame. Sočiųjų garų slėgiai p_i (i=A arba B) gana tiksliai tenkina dėsnį

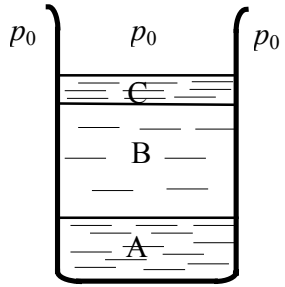
$$\ln(p_i/p_0)=a_i/T+b_i,$$

čia p_0 – normalusis atmosferos slėgis, T – garų absoliutinė temperatūra, a_i ir b_i – tam tikros konstantos, priklausančios nuo

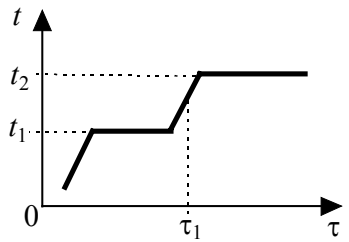
skysčio, (simbolis ln žymi natūrinį logaritmą, t.y. logaritmą, kurio pagrindas e=2,7182818…). Tikslios skysčių A ir B p_i/p_0 vertės duotos lentelėje:

t, °C	p_i/p_0	
	i=A	i=B
40	0,284	0,07278
90	1,476	0,6918

a) Apskaičiuokite skysčių A ir B virimo temperatūras esant slėgiui p_0.



56 pav.



57 pav.

b) Skysčius A ir B supylus į vieną indą, jie išsidėstė sluoksniais taip, kaip parodyta 56 pav. Virš skysčio B įpiltas plonas sluoksnis negaruojančio skysčio C, kuris netirpsta skysčiuose A ir B ir neleidžia laisvai garuoti skysčiui B iš jo paviršiaus. Dujinėje būsenoje esančių medžiagų A ir B molio masių santykis lygus $\gamma=M_A/M_B=8$. Skysčių A ir B masės iš pradžių buvo vienodos ir lygios m=100 g kiekviena. Skysčių stulpelių inde aukščiai bei skysčių tankiai yra tokie, kad bet kuriame indo taške slėgis nesiskiria nuo normaliojo atmosferos slėgio p_0. Šiai skysčių sistemai lėtai ir tolygiai tiekiant šilumą pasirodė, kad skysčių temperatūros t priklausomybės nuo laiko τ grafikas yra toks, kaip parodyta 57 pav. Nustatykite horizontaliąsias grafiko dalis

atitinkančias temperatūras t_1 ir t_2 (vieno laipsnio tikslumu) ir skysčių A ir B mases laiko momentu τ_1.

Pastaba. Tarkite, kad skysčių garai gana tiksliai: 1) tenkina Daltono dėsnį, pagal kurį dujų mišinio slėgis lygus mišinį sudarančių dujų dalinių slėgių sumai; 2) iki slėgių, lygių sočiųjų garų slėgiams, gali būti laikomi idealiosiomis dujomis.

89. Trys nesantys vienoje tiesėje materialieji taškai P_1, P_2, P_3, kurių masės m_1, m_2, m_3, tarp savęs sąveikauja tik gravitacinėmis jėgomis ir nesąveikauja su kitais kūnais. Per šių taškų masių centrą statmenai trikampio $P_1P_2P_3$ plokštumai einančią ašį pažymėkime σ. Kokias sąlygas turi tenkinti atstumai tarp taškų $P_1P_2=a_{12}$, $P_2P_3=a_{23}$, $P_1P_3=a_{13}$ ir tų taškų sistemos sukimosi kampinis greitis ω, kad sukantis sistemai trikampio $P_1P_2P_3$ forma nesikeistų, t. y. kad sistema apie ašį σ suktųsi kaip kietas kūnas?

90. Išnagrinėkite, kokios yra galimybės elektroninį mikroskopą su magnetiniu lauku valdomu U=511 kV įtampa pagreitintų elektronų pluoštu paversti protoniniu mikroskopu, kuriame protonai būtų greitinami $-U$ įtampa. Tam tikslui atsakykite į du klausimus:

a) Įtampa U pagreitintas elektronas patenka į sritį su nevienalyčiu magnetiniu lauku $\vec{B}$, kurį sukuria nejudinamų ričių L_1, L_2, …, L_n sistema. Srovių stipriai ritėse atitinkamai lygūs i_1, i_2, …, i_n. Šioje srityje elektronas juda tam tikra trajektorija T. Kokio stiprio srovės i_1', i_2', …, i_n' turi tekėti ritėmis L_1, L_2, …, L_n, kad įtampa $-U$ pagreitintas protonas srityje su magnetiniu lauku judėtų ta pačia trajektorija T ir į tą pačią pusę, kaip ir elektronas?

Nurodymas. Išsiaiškinkite, kokiai sąlygai esant trajektoriją aprašanti lygtis abiem atvejais yra ta pati. Galima pasinaudoti sąryšiu

$$\vec{P}\frac{d\vec{P}}{dt}=\frac{1}{2}\frac{d\vec{P}^2}{dt}=\frac{1}{2}\frac{dP^2}{dt},$$

čia P - dalelės impulsas.

b) Kiek kartų padidėtų ar sumažėtų minėtojo mikroskopo skiriamoji geba (t. y. mažiausias atstumas tarp dviejų taškinių

kūnų, kurių disko formos atvaizdai dar išskiriami), jeigu elektronų pluoštą pakeistume protonų pluoštu? Tarkite, kad mikroskopo skiriamąją gebą lemia tiktai dalelių banginės savybės. Taip pat tarkite, kad elektronų ir protonų greičiai prieš jų greitinimą įtampa buvo lygūs nuliui. Kad būtų paprasčiau, dar manykite, kad elektronų ir protonų savųjų magnetinių momentų sąveikos su išoriniu magnetiniu lauku galima nepaisyti ir kad magnetiniame lauke judėdamos šios dalelės nespinduliuoja elektromagnetinių bangų.

Pastaba. Fizikoje dažnai naudojamas energijos vienetas elektronvoltas (1 eV) ir išvestiniai vienetai 1 keV ir 1 MeV. 1 eV lygus 1 V potencialų skirtumą pralėkusio elektrono energijos pokyčiui. Skaičiuodami naudokitės tokiomis vertėmis: elektrono rimties energija $E_e=m_ec^2$=511 keV, protono rimties energija $E_p=m_pc^2$=938 MeV.

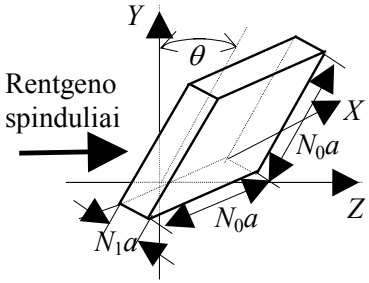
XXI tarptautinė fizikos olimpiada, 1990 m. (Olandija)

92. ***Rentgeno spindulių difrakcija kristale.*** Nagrinėsime Rentgeno spindulių difrakciją stačiakampėje kristalinėje gardelėje. Tam tikslui pradžioje išnagrinėsime plokščiosios monochromatinės bangos, statmenai krintančios į dvimatę gardelę, kurią sudaro tarp savęs statmenų plyšių sistema, difrakciją. Atstumai tarp plyšių lygūs atitinkamai d_1 ir d_2. Vienos krypties plyšių skaičius lygus N_1, kitos – N_2. Difrakcinis vaizdas gaunamas lygiagrečiame su gardele ekrane, esančiame atstumu L nuo gardelės ($L>>N_1d_1$, N_2d_2).

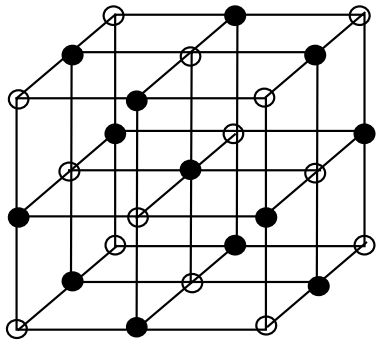
a) Apskaičiuokite pagrindinių maksimumų ekrane padėtį ir plotį. (Maksimumo pločiu vadinamas atstumas tarp dviejų gretimų minimumų, esančių abiejose maksimumo pusėse).

Dabar panagrinėkite ploną kubinio kristalo plokštelę, kurios matmenys $N_0a\times N_0a\times N_1a$. Čia a - gardelės konstanta, o $N_1<<N_0$. Rentgeno spindulių, nukreiptų Z ašies kryptimi, kritimo į kristalą

kampas θ yra mažas (58 pav.). Difrakcinis vaizdas gaunamas ekrane, esančiame dideliame nuotolyje L nuo kristalo.



58 pav.

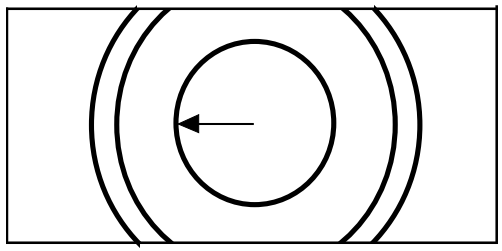


59 pav.

b) Apskaičiuokite maksimumų padėties ir pločio priklausomybę nuo kampo θ, kai θ mažas. Ką duoda sąlyga $N_1 << N_0$?

Difrakcinį vaizdą galima paaiškinti ir remiantis Brego teorija. Joje daroma prielaida, kad Rentgeno spinduliai atsispindi nuo gardelės plokštumų. Šių atsispindėjusių spindulių interferencija ir duoda difrakcinį vaizdą.

c) Įrodykite, kad atspindžiai (vadinami Brego atspindžiais) duoda tokius pat maksimumus, kaip ir punkte b).

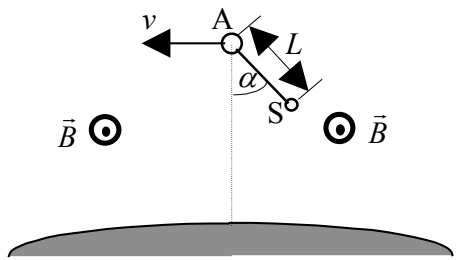


60 pav.

Tiriant miltelių metodu Rentgeno spindulių pluoštas esti išsklaidomas didelio skaičiaus mažų miltelius sudarančių kristaliukų. (Be abejo, atskirų kristaliukų matmenys esti didesni negu gardelės konstanta a). 0,15 nm bangos ilgio Rentgeno spinduliai, išsklaidyti kalio druskos KCl (turinčios kubinę gardelę; žr. 59 pav.) miltelių, L=0,10 m atstumu esančioje fotoplokštelėje duoda bendracentrių tamsių žiedų seriją (60 pav). Mažiausio žiedo spindulys lygus 0,053 m. Kalio ir chloro jonų matmenys praktiškai vienodi, tad galima manyti, jog jie yra lygiaverčiai sklaidos centrai.

d) Apskaičiuokite atstumą tarp kristalo gretimų K jonų.

93. *Eksperimentai Žemės magnetosferoje.* 1991 m. gegužės mėnesį aplink Žemę bus paleistas kosminis laivas „Atlantis". Jo apskrita orbita bus pusiaujo plokštumoje. Tam tikru momentu kosminis laivas išleis L ilgio labai mažos masės standžiu strypu pririštą satelitą S. Trinties galima nepaisyti.



61 pav.

Tegu α – kampas tarp strypo ir tiesės, einančios per „Atlantį" ir Žemės centrą (61 pav.). S taip pat bus pusiaujo plokštumoje. Satelito masė bus gerokai mažesnė už „Atlančio" masę, o L kur kas mažesnis už orbitos spindulį.

a_1) Apskaičiuokite, kokiam (kokiems) α esant sistemos padėtis Žemės atžvilgiu bus pastovi, t. y. kokioms α vertėms esant šis kampas laikui einant nesikeis.

a_2) Išnagrinėkite sistemos stabilumą šioje padėtyje visų pusiausvirųjų būsenų atvejais.

Tarkite, kad tam tikru laiko momentu strypas nežymiai nukreipiamas nuo pusiausvyros padėties, bet išlieka pusiaujo plokštumoje. Dėl to sistemoje atsiranda svyravimai.

b) Šių svyravimų periodą išreikškite per vieno apsisukimo aplink Žemę trukmę.

61 pav. Žemės magnetinis laukas yra statmenas brėžinio plokštumai ir nukreiptas į skaitytoją. Dėl strypo orbitinio judėjimo tarp jo galų atsiranda potencialų skirtumas. Aplinką (magnetosferą) sudaro praretintosios jonizuotos dujos, kurių elektrinis laidumas labai didelis. Panaudojant kontaktines plokšteles, įtaisytas strypo galuose A ir S, strypas elektriškai sujungiamas su jonizuotomis dujomis ir juo ima tekėti elektros srovė.

b_1) Nustatykite šios srovės kryptį.

Žinoma, kad apsisukimo aplink Žemę periodas T=5,4·10^3 s, strypo ilgis L=2,0·10^4 m, Žemės magnetinio lauko srauto tankis B=5,0·10^{-5} T, „Atlančio" masė M=100 t.

Vėliau prie strypo prijungiamas srovės šaltinis (esantis laive), sukuriantis srovę, tekančią priešinga kryptimi negu anksčiau aprašytoji srovė.

b_2) Kiek ilgai reikėtų leisti tą srovę norint, kad orbitos aukštis pakistų 10 m? Tarkite, kad kampas α dabar lygus nuliui. Į laidžioje magnetosferoje tekančias sroves neatsižvelkite. Padidės ar sumažės orbitos aukštis?

94. *Besisukanti neutroninė žvaigždė.* Milisekundinis pulsaras – tai spinduliuotės šaltinis Visatoje, spinduliuojantis labai trumpus impulsus, kurių periodas nuo vienos iki kelių milisekundžių. Jo spinduliuotė esti radijo dažnių srityje ir gali būti priimama bei impulsų periodas išmatuojamas geru radijo imtuvu.

Radijo bangų impulsus skleidžia ypatingų žvaigždžių – neutroninių žvaigždžių paviršius. Tai labai didelio medžiagos tankio žvaigždės, greitai besisukančios apie savo ašį. Jų masė esti maždaug tokia, kaip Saulės masė, bet jų spindulys tesiekia tik kelias dešimtis kilometrų. Dėl greito sukimosi žvaigždė šiek tiek susiploja. Tarkime, kad r_p – atstumas tarp centro ir žvaigždės paviršiaus ties ašigaliu, o r_e – atstumas tarp centro ir paviršiaus

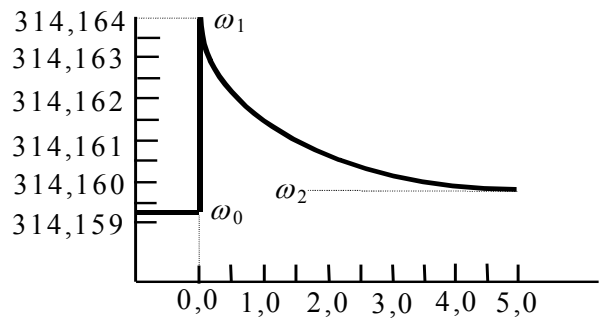
ties pusiauju. Susiplojimo koeficientas apibrėžiamas taip: $e=(r_e-r_p)/r_p$.

Panagrinėkite neutroninę žvaigždę, kurios masė 2,0·10^{30} kg, vidutinis spindulys 1,0·10^4 m ir apsisukimo periodas 2,0·10^{-2} s.

a) Apskaičiuokite susiplojimo koeficientą, jei gravitacijos konstanta lygi 6,67·10^{-11} N·m^2/kg^2.

Dėl energijos nuostolių žvaigždės sukimasis po truputį lėtėja, todėl susiplojimas mažėja. Tačiau žvaigždė turi kietą plutą, plūduriuojančią skystoje masėje (branduolyje). Retkarčiais plutoje įvyksta drebėjimai, kurių metu žvaigždės forma šiek tiek pakinta. Pastebėta, kad tokių drebėjimų metu bei po jų plutos kampinis greitis pakinta. Tai pavaizduota 62 pav., kuriame horizontaliojoje ašyje pažymėtas laikas (paromis), o vertikaliojoje – plutos kampinis greitis (radianais per sekundę).

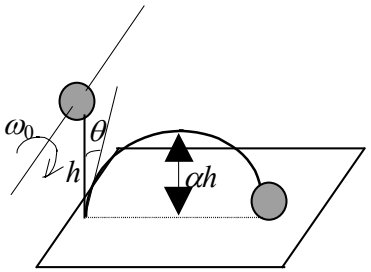
b) Pasinaudodami 62 pav. apskaičiuokite skysto branduolio spindulį. Manykite, kad plutos ir branduolio tankiai yra vienodi. Į branduolio formos kitimus galima neatsižvelgti.



62 pav.

XXII tarptautinė fizikos olimpiada, 1991 m. (Kuba)

95. 63 pav. pavaizduotas vienalytis R spindulio rutulys. Iš pradžių rutulio masių centras buvo rimties būsenoje, tačiau pats rutulys kampiniu greičiu ω_0 sukosi apie per jo centrą einančią horizontalią ašį. Pats žemiausias rutulio taškas buvo h aukštyje virš grindų. Paleidus rutulį jis sunkio jėgai veikiant krinta, trenkiasi į grindis ir atšokęs nuo jų pakyla į žinomą aukštį αh. Grindys ir rutulys padaryti iš tokių medžiagų, kad galima neatsižvelgti į šių kūnų deformacijas smūgio metu. Šliaužimo trinties koeficientas tarp rutulio ir grindų lygus μ, rutulio masė m. Tarkite, kad rutulys yra ore ir kad smūgio į grindis trukmė labai maža (bet nelygi nuliui). Rutulio inercijos momentą per jo centrą einančios ašies atžvilgiu skaičiuokite pagal formulę $I=2/5mR^2$.



63 pav.

1) Manydami, kad rutulio sąlyčio su grindimis metu jis visą tą laiką slysta, nustatykite: a) atšokimo kampo θ tangentą, b) horizontalųjį rutulio centro poslinkį tarp pirmojo ir antrojo jo smūgių į grindis, c) mažiausią ω_0 vertę šiuo atveju.

2) Atsakykite į a) ir b) punktų klausimus tardami, kad rutulys nustoja slysti dar nepasibaigus smūgio į grindis trukmei.

3) Nubraižykite tgθ priklausomybės nuo ω_0 grafikus 1) ir 2) atvejais.

96. Nelaidžia kvadrato formos su užapvalintais kampais vija, kurios kraštinė L, juda daug mažų įelektrintų rutuliukų (64 pav.). Kiekvieno rutuliuko greitis u, krūvis q, atstumas tarp rutuliukų a. Rutuliukai kaip karoliai suverti ant viją sudarančių strypų. Kraštinė L daug ilgesnė už atstumą a. Viją sudarantys nelaidūs strypai įelektrinti vienodo tankio krūviu, kompensuojančiu visų rutuliukų krūvį. Visi duomenys pateikti su vija susietoje sistemoje.

Nagrinėsime atvejį, kai vija greičiu $\vec{v}$ juda lygiagrečiai su kraštine AB erdvėje su vienalyčiu $\vec{E}$ stiprio elektriniu lauku, statmenu vijos greičiui. Judėjimo metu vija esti plokštumoje, sudarančioje su lauko kryptimi kampą θ. Atsižvelgdami į reliatyvistinius reiškinius su nejudančiu stebėtoju susietoje sistemoje, kurios atžvilgiu vija juda greičiu v, nustatykite tokius dydžius:

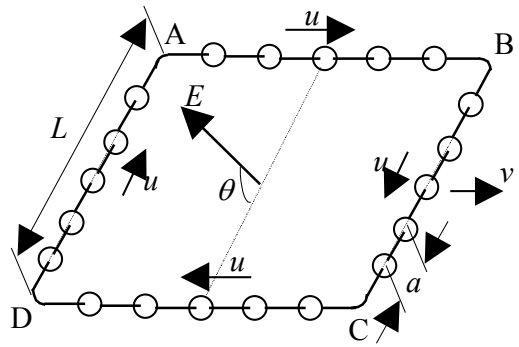
1) atstumus tarp rutuliukų kiekvienoje vijos kraštinėje;

2) suminį (strypas+rutuliukai) kiekvienos vijos kraštinės krūvį;

3) elektrinių jėgų, veikiančių viją kartu su rutuliukais, momentą;

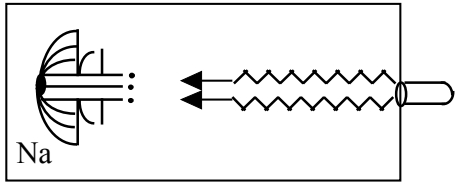
4) vijos ir rutuliukų sąveikos su elektriniu lauku energiją.

Pastabos. Elektros krūvis nepriklauso nuo atskaitos sistemos. Paveiksle parodytos tik santykinės vektorių kryptys. Į spinduliavimą galima neatsižvelgti.

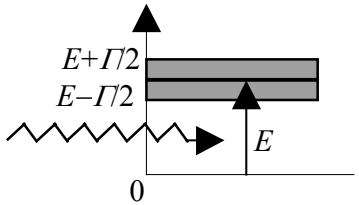


64 pav.

97. Norint smulkiau ištirti pavienių atomų savybes reikia mokėti sukurti tokias sąlygas, kad atomai tam tikrą laiką būtų sutelkti nedideliame tūryje ir beveik nejudėtų. Tam tikslui neseniai pradėtas naudoti metodas, pavadintas atomų lazerinio atšaldymo metodu. Panagrinėkime jo esmę.

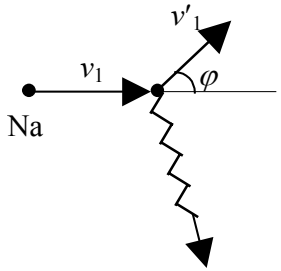


65 pav.



66 pav.

^{23}Na atomai, gaunami garinant $T=10^3$ K temperatūroje, kolimatoriumi suglaudžiami į siaurą pluoštą ir nukreipiami į vakuuminę kamerą (65 pav.). Visas atomų pluošto skerspjūvis apšviečiamas galingo lazerio šviesos priešpriešiniu pluoštu. Lazerio spinduliuotės dažnis parenkamas taip, kad vyktų fotonų rezonansinė sugertis atomais, judančiais greičiu $\vec{v}_0$ ir esančiais pagrindinėje būsenoje. Sugerdamas šviesą atomas pereina į pirmąjį sužadintą lygmenį, kurio energija E ir plotis Γ (66 pav.), o jo greitis pakinta tam tikru dydžiu $\Delta v_1=v_1-v_0$. Paskui atomas savaime išspinduliuoja fotoną ir grįžta į pagrindinę būseną. Jo greitis šio proceso metu pakinta dydžiu $\Delta v'=v'_1-v_1$, o atomas nuo savo pirmykštės judėjimo krypties nukrypsta kampu φ (67 pav.).



67 pav.

Tokie sugerties ir spinduliavimo aktai kartojasi daug kartų, kol atomo greitis nepakinta dydžiu Δv ir rezonansinė f dažnio fotonų sugertis pasidaro nebegalima. Paskui reikia keisti lazerio spinduliuotės dažnį, kad vyktų kitą greitį turinčių atomų rezonansinė sugertis, toliau stabdanti atomus, kol kai kurių atomų greičiai nepasidarys ganėtinai maži.

Pradiniame šio reiškinio nagrinėjimo etape galima nekreipti dėmesio į jokius kitus atomų sąveikos procesus, išskyrus sugertį ir

savaiminį šviesos spinduliavimą. Tarsime, kad lazerio spindulys yra toks intensyvus, kad pagrindinėje būsenoje esantis atomas iš karto sugeria fotoną.

Žinodami, kad $E=3{,}36\cdot10^{-19}$ J, $\Gamma=7{,}0\cdot10^{-27}$ J, šviesos greitis $c=3{,}0\cdot10^8$ m/s, protono masė $m=1{,}67\cdot10^{-27}$ kg, Planko konstanta $h=6{,}62\cdot10^{-34}$ J·s, Bolcmano konstanta $k=1{,}38\cdot10^{-23}$ J/K, atsakykite į šiuos klausimus:

1) Koks turi būti lazerio spinduliuotės dažnis f, kad vyktų rezonansinė sugertis atomais, kurių energija lygi vidutinei atomų energijai iki jiems praeinant kolimatorių? Kokiu dydžiu Δv_1 pakis tokio atomo greitis po pirmo fotono sugerties?

2) Kokį greičių intervalą Δv_0 turintys atomai gali sugerti fotoną, kurio dažnis toks, kaip apskaičiuota 1) punkte?

3) Kokiu didžiausiu kampu φ gali būti išsklaidytas atomas, vieną kartą išspinduliavęs fotoną?

4) Kokiu didžiausiu dydžiu Δv sumažėjus atomo greičiui jis dar gali sugerti to paties f dažnio fotoną?

5) Įvertinkite, po kokio sugerties ir išspinduliavimo aktų skaičiaus atomo, judančio pluošto ašimi, greitis nuo v_0 praktiškai sumažės iki nulio.

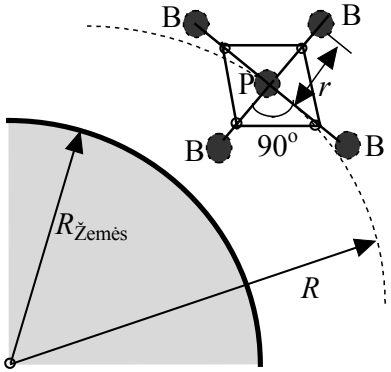
6) Įvertinkite fotono sugerties ir išspinduliavimo proceso trukmę. Kokį atstumą atomas nulėks per tą trukmę?

XXIII tarptautinė fizikos olimpiada, 1992 m. (Suomija)

98. Aplink Žemę apskrita žinomo spindulio R orbita, esančia pusiaujo plokštumoje, juda iš kelių kūnų sudarytas satelitas (68 pav.). Centrinis kūnas P lengvais netampriais siūlais sujungtas su

keturiais simetriškai išsidėsčiusiais kūnais B, kurių kiekvieno masė m. Ši sistema visą laiką esti orbitos plokštumoje ir žinomu kampiniu greičiu ω (nejudančių žvaigždžių atžvilgiu) sukasi apie centrą P. Kad kūnų tarpusavio padėtis be reikalo nesikeistų ir visa šių kūnų sistema judėtų kaip vienas kietas kūnas, radialieji siūlai tarp savęs yra sujungti kitais plonais siūlais, sudarančiais vienas su kitu 90° kampus.

1) Apskaičiuokite, kokia jėga pririštas prie kūno siūlas veikia tą kūną. Išnagrinėkite atvejus, kai vektoriai $\vec{R}$ ir $\vec{r}$ esti lygiagretūs, antilygiagretūs, statmeni (gal būt kaip tik šiais atvejais jėgos esti didžiausios ar mažiausios).



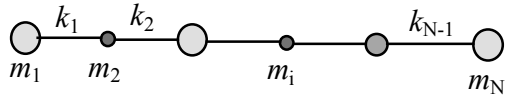
68 pav.

2) Kiekviename kūne B yra mechanizmas, gaunantis energiją iš saulės baterijų. Šis mechanizmas greitai ima traukti į save siūlą tuo momentu, kai įtempimo jėga esti didžiausia, ir jį atleidžia, kai ta jėga esti mažiausia: siūlo ilgio pokyčiai sudaro 1 % jo ilgio (vidutinio atstumo tarp B ir P). Visą kitą laiką siūlo ilgis nekinta. Apskaičiuokite tokio mechanizmo „grynąją" vidutinę per vieno kūno B apsisukimo aplink centrą P periodą galią. (Galia nusakoma suminiu įtempimo jėgos darbu, atsižvelgiant į ženklą, padalytu iš vieno apsisukimo periodo).

3) Aprašykite, kokius satelito judėjimo pokyčius sukelia minėtųjų mechanizmų atliekamas darbas, t.y. kaip kinta orbitinis greitis, orbitos spindulys, kampinis greitis ir satelito gravitacinė potencinė energija. Ar galima satelitą perkelti: a) į aukštesnę orbitą? b) į labai didelio spindulio orbitą?

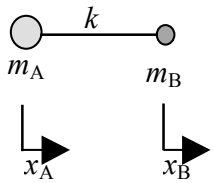
Nurodymai. Išnagrinėkite abiejų galimų kampinio greičio ω krypčių atvejus. Į Saulės ir Mėnulio trauką nekreipkite dėmesio – pakanka išnagrinėti tik satelito ir Žemės sąveiką. Nesistenkite ieškoti labai tikslių sprendinių – pakaks 5 % tikslumą užtikrinančių apytikslių sprendinių.

99. Šiame uždavinyje nagrinėsime ašinį (išilginį) tiesinės molekulės judėjimą išilgai jos ašies, kai visi judantys atomai išlieka vienoje tiesėje. Tariama, kad molekulė susideda iš N atomų, kurių masės m_1, m_2, m_3, …, m_N ir kad kiekvienas atomas susietas su savo artimiausiais kaimynais cheminiais ryšiais, kurie modeliuojami nesvariomis spyruoklėmis, tenkinančiomis Huko dėsnį. Spyruoklių tamprumo koeficientai k_1, k_2, k_3, …, k_N (69 pav.). Yra žinoma, kad laisvuosius išilginius tiesinės molekulės virpesius sudaro atskirų atomų virpesių superpozicija. Tokie virpesiai vadinami normaliaisiais virpesiais, arba normaliosiomis modomis. Jiems vykstant visi atomai virpa vienodais dažniais, o savo pusiausvyros padėtis praeina tuo pačiu metu.



69 pav.

1) Tegu x_i - i-tojo atomo poslinkio iš jo pusiausvyros padėties koordinatė. Šį atomą veikiančią jėgą F_i išreikškite per momentinius (akimirkinius) poslinkius x_1, x_2, x_3, …, x_N ir tamprumo koeficientus k_1, k_2, k_3, …, k_{N-1}. Koks sąryšis tarp jėgų F_1, F_2, F_3, …, F_N? Pasinaudodami šiuo sąryšiu nustatykite priklausomybę tarp poslinkių x_1, x_2, x_3, …, x_N ir pateikite jos fizikinę interpretaciją.

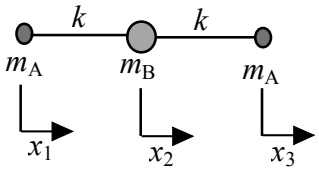


70 pav.

2) Išnagrinėkite dviatomės molekulės AB judėjimą (70 pav.). Atomus A ir B veikiančią jėgą išreikškite per poslinkius x_A ir x_B bei koeficientą k. Aprašykite galimus atomų judėjimo molekulėje tipus ir nustatykite jų

virpesių dažnius. Paaiškinkite gautuosius rezultatus atkreipdami dėmesį į tą faktą, kad atomai gali virpėti vienodais dažniais, nors jų masės ir skirtingos (tai ir yra normalioji moda).

3) Išnagrinėkite triatomės molekulės ABA (71 pav.) galimus judesius. Kiekvieną atomą veikiančias jėgas išreikškite per poslinkius x_1, x_2, x_3. Nustatykite molekulės normaliąsias modas ir atitinkamus dažnius.



71 pav.

4) CO_2 molekulės išilginių virpesių dviejų modų dažniai lygūs $3{,}998\cdot10^{13}$ ir $7{,}042\cdot10^{13}$ Hz. Apskaičiuokite C-O ryšio tamprumo koeficientą. Įvertinkite, kiek tiksliai naudojamas artutinumas (tampriųjų jėgų) derinasi su pateiktomis skaitinėmis vertėmis. Anglies atomo masė lygi 12 a. m. v., deguonies atomo – 16 a. m. v. (1 a. m. v.=$1{,}660\cdot10^{-27}$ kg).

100. Šiame uždavinyje palydovas - tai vienodai įšilęs R=1 m spindulio rutulys. Visas palydovo paviršius yra vienodas. Palydovas yra netoli nuo Žemės, bet ne jos šešėlyje. Tarkime, kad Saulė yra absoliučiai juodas kūnas, kurio paviršiaus temperatūra T_0=6000 K, spindulys $R_0=6{,}96\cdot10^8$ m. Atstumas tarp Saulės ir Žemės $L=1{,}5\cdot10^{11}$ m. Palydovas įšyla nuo Saulės spindulių iki tokios temperatūros, kurioje palydovo išspinduliuojama galia tampa lygi jo sugeriamajai galiai. Žinoma, kad absoliučiai juodo kūno paviršiaus vieneto spinduliavimo galią nusako Stefano ir Bolcmano dėsnis:

$$P=\sigma T^4, \text{ čia } \sigma=5{,}67\cdot10^{-8}\ \mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-4}}.$$

Pirmu artutinumu galima manyti, kad Saulė ir palydovas sugeria visą į juos krintančią spinduliavimo galią.

1) Išveskite išraišką palydovo temperatūrai apskaičiuoti ir apskaičiuokite jos skaitinę vertę.

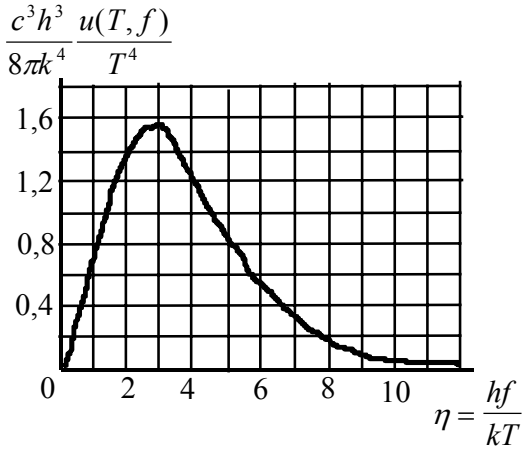
2) Absoliučiai juodo kūno spinduliavimo spektrą apibūdina spektrinė funkcija $u(T,f)$, turinti tokį pavidalą:

$$u(T,f)df=\frac{8\pi k^4T^4}{c^3h^3}\frac{\eta^3d\eta}{e^\eta-1},$$

čia $u(T,f)df$ – elektromagnetinių spindulių, kurių dažniai yra intervale $[f,\ f+df]$, energijos tankis, $h=6{,}6\cdot10^{-34}$ J·s – Planko konstanta, $k=1{,}4\cdot10^{-23}$ J·K^{-1} – Bolcmano konstanta, $c=3\cdot10^8$ m/s – šviesos greitis, $\eta=hf/(kT)$. Suintegravę funkciją $u(T,f)$ visame dažnių intervale ir visomis galimomis kryptimis gautume Stefano ir Bolcmano dėsnį, apibūdinantį paviršiaus vieneto spinduliavimo galią. 72 pav. duotas vadinamasis normalusis spektras, aprašomas funkcija

$$\frac{c^3h^3}{8\pi k^4}\frac{u(T,f)}{T^4}.$$

Praktiškai stengiamasi palaikyti kiek galima mažesnę palydovo temperatūrą. Tam tikslui palydovo paviršius padengiamas tam tikra danga, atspindinčia visų dažnių, viršijančių tam tikrą ribą, spinduliuotę, bet visiškai sugeriančia mažesnių dažnių spindulius. Tarkime, kad tas ribinis dažnis tenkina sąryšį hf/k=1200 K. Įvertinkite, kokia šiuo atveju bus palydovo temperatūra.



72 pav.

Dėmesio! Nesistenkite ieškoti labai tikslaus atsakymo. Pasinaudokite apytiksle formule, tinkama esant mažoms x vertėms:

$$e^x=\exp(x)\approx 1+x.$$

Integralas

$$\int_0^\infty \frac{\eta^3 d\eta}{e^\eta - 1} = \frac{\pi^4}{15},$$

funkcija $\eta^3/(e^\eta-1)$ turi maksimumą, kai η=2,82.

3) Palydove paprastai esti saulės baterijomis maitinama elektroninė aparatūra. Tarkime, kad aparatūros sunaudojama 1 kW galia palydovo viduje virsta šiluma. Kokia šiuo atveju bus palydovo paviršiaus temperatūra?

4) Viena firma taip reklamuoja savo specialius dažus: „Šie dažai atspindės daugiau kaip 90 % krintančios spinduliuotės (regimojoje ir infraraudonojoje srityse), be to, jie spinduliuos visų dažnių (regimojoje ir infraraudonojoje srityse) spindulius kaip absoliučiai juodas kūnas, tuo apsaugodami palydovą nuo perkaitimo. Taigi dažai sudarys sąlygas palydovui atvėsti iki pačios žemiausios temperatūros". Ar galimi tokie dažai? Atsakymą pagrįskite.

5) Kokiomis savybėmis turi pasižymėti danga, kad sferinio kūno, panašaus į nagrinėtą palydovą, temperatūra pakiltų aukščiau, negu apskaičiavote 1) punkte?

XXIV tarptautinė fizikos olimpiada, 1993 m. (JAV)

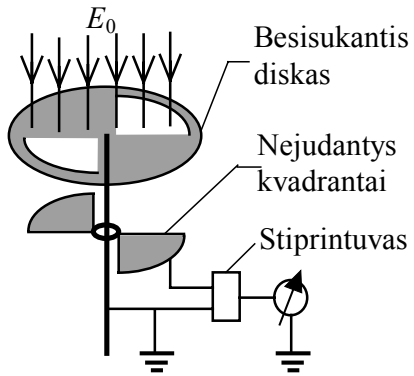
101. Elektrostatikos požiūriu Žemės paviršių galima laikyti geru laidininku. Jis turi krūvį Q_0 ir vidutinį paviršinio krūvio tankį σ_0.

1) Esant palankioms oro sąlygoms nukreiptas žemyn į Žemės paviršių elektrinis laukas E_0 apytikriai lygus 150 V/m. Nustatykite paviršinio krūvio tankį ir visą Žemės paviršiaus krūvį.

2) Žemyn nukreiptas elektrinis laukas kylant aukštyn mažėja ir 100 m aukštyje jis apytikriai lygus 100 V/m. Apskaičiuokite vidutinį 1 m^3 krūvį atmosferos sluoksnyje tarp Žemės paviršiaus ir 100 m aukščio.

3) 2) punkte nustatytas krūvio tankis iš tikrųjų yra beveik vienodo kiekio teigiamų ir neigiamų vienakrūvių jonų, esančių tūrio vienete (n_+ ir n_-), rezultatas. Arti Žemės paviršiaus, esant palankioms oro sąlygoms, $n_+\approx n_-\approx 6\cdot 10^8$ m^{-3}. Šie jonai juda veikiami vertikalaus elektrinio lauko. Jų greitis proporcingas elektrinio lauko stipriui, $v\approx 1{,}5\cdot 10^{-4}E$, kur v išreiškiamas m/s, o E – V/m.

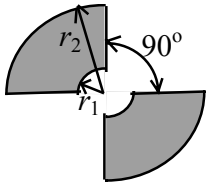
Kiek laiko prireiktų, kad pusė Žemės paviršiaus krūvio būtų dėl atmosferos jonų judėjimo neutralizuota, jeigu nevyktų kitų šio krūvio dydį palaikančių procesų (pvz., žaibas)?



73 pav.

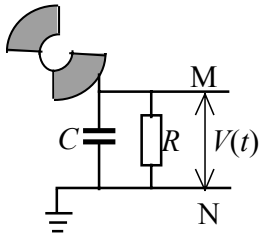
4) Atmosferos elektrinį lauką, taip pat ir tankį σ_0, galima išmatuoti sistema, kuri pavaizduota 73 pav. Metalinių kvadrantų pora, izoliuota nuo Žemės, bet sujungta tarp savęs, padėta po įžemintu besisukančiu disku su dviem kvadrantų formos išpjovomis (73 pav. atstumas tarp kvadrantų ir disko padidintas, kad būtų aiški prietaiso konstrukcija). Kiekvieno apsisukimo metu izoliuoti kvadrantai du kartus patenka į elektrinį lauką, o paskui (kas ¼ periodo) esti visiškai ekranuojami.

Tegul T – apsisukimo periodas, o r_1 ir r_2 – vidinis ir išorinis izoliuotų kvadrantų spinduliai (žr. 74 pav.).



74 pav.

Tegul t=0 – laiko momentas, kai izoliuoti kvadrantai yra visiškai ekranuoti. Nustatykite viso krūvio $q(t)$, indukuoto izoliuotų kvadrantų viršutiniame paviršiuje, išraišką kaip lauko funkciją nuo t=0 iki t=T/2.



75 pav.

Nubraižykite šios priklausomybės grafiką.

Atmosferos jonų srauto efekto šiuo atveju galima nepaisyti.

5) Sistema, aprašyta 4) punkte, lygiagrečiai sujungta su stiprintuvu, kurio įėjimo talpa C ir varža R (žr. 75 pav.). (Tarkime, kvadrantų sistemos labai maža talpa palyginti su C.)

Nubraižykite potencialų skirtumo V tarp taškų M ir N priklausomybės nuo laiko t grafiką apsisukant diskui vieną kartą jam tik pradėjus suktis periodu T, kai:

a) $T=T_a<<CR$,

b) $T=T_b>>CR$.

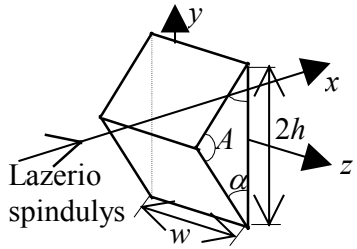
(Tarkite, kad C ir R vertės yra pastovios, tik a) ir b) atvejais skiriasi periodai T).

Nustatykite apytikslę santykio V_a/V_b išraišką esant didžiausioms $V(t)$ vertėms a) ir b) atvejais.

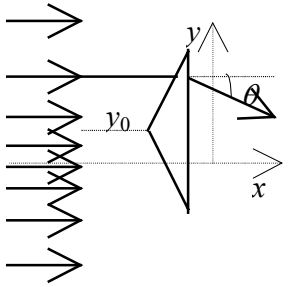
6) Tarkime, kad E_0=150 V/m, r_1=1 cm, r_2=7 cm, C=0,01 μF, R=20 MΩ. Kokia bus didžiausia V vertė vieno apsisukimo metu?

102. *Lazerinės jėgos, veikiančios skaidrią prizmę.* Lūždamas galingas lazerio spindulys nemaža jėga gali veikti mažus skaidrius objektus. Panagrinėkime nedidelę stiklinę prizmę, kurios viršūnės kampas $A=\pi-2\alpha$, pagrindo ilgis $2h$, plotis w. Prizmės stiklo lūžio rodiklis n, tankis ρ.

Į prizmę nukreiptas horizontalus lazerio spindulys. Ašis x nukreipta pradinio spindulio kryptimi, prizmės viršūnė nukreipta prieš spindulio kryptį, prizmės pagrindas lygiagretus su yz plokštuma, trikampio paviršiai lygiagretūs su xy plokštuma (76 pav.). Tarkime, kad oro lūžio rodiklis lygus 1, o prizmės paviršius apdorotas taip, kad šviesa nuo jo neatsispindi.



76 pav.



77 pav.

Lazerio spindulio intensyvumas z ašies kryptimi yra pastovus, o toldamas nuo x ašies y ašies kryptimi į abi puses tiesiškai mažėja: spindulio intensyvumas yra didžiausias ir lygus I_0, kai y=0, ir lygus 0, kai y=±4h. (Intensyvumas yra ploto vienetui tenkanti galia ir matuojamas W/m^2).

1) Parašykite lygtis, iš kurių kampas θ gali būti išreikštas dydžiais α ir n, kai lazerio spindulys krinta į viršutinį prizmės šoną (77 pav.).

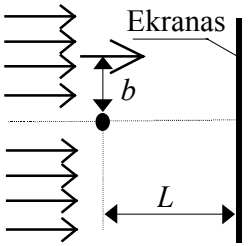
2) Išreikškite jėgos, kuria lazeris veikia prizmę, x ir y dedamąsias dydžiais I_0, θ, h, w ir y_0, kai prizmės viršūnė dydžiu y_0 pasislinkusi nuo x ašies, kol $|y_0|\le 3h$ (žr. 77 pav.). Nubraižykite vertikaliosios ir horizontaliosios dedamųjų priklausomybės nuo y_0 grafikus.

3) Tarkime, lazerio spindulio plotis z ašies kryptimi yra 1 mm, o y ašies kryptimi – 80 μm, prizmės α=30°, h=10 μm, n=1,5, ρ=2,5 g/cm^3. Kokia lazerio galia reikalinga išlaikyti prizmę pusiausvirą sunkio jėgos (y ašies krypties) lauke, kai prizmės

viršūnė pasislinkusi žemyn nuo lazerio spindulio ašies $y_0=-h/2=-5$ μm atstumu?

4) Analogiškas 3) uždučiai bandymas atliekamas nesvarumo sąlygomis, esant $I_0=10^8$ W/m^2. Prizmė patraukiama nuo lazerio ašies $y=h/20$ atstumu ir be pradinio greičio paleidžiama. Kokiu dažniu ji svyruos?

103. ***Elektronų pluoštas.*** Vienalytis didelės energijos lygiagretus elektronų pluoštas sukurtas panaudojus greitinančią įtampą V_0. Elektronai juda pro ilgą, ploną, teigiamai įelektrintą varinę vielą, kuri yra įtempta statmenai pradinio pluošto krypčiai taip, kaip parodyta 78 pav. Čia b yra atstumas, kuriuo pro vielą pralėktų elektronas, jei viela nebūtų įelektrinta. Vėliau elektronai pataiko į ekraną. Atstumas nuo vielos iki ekrano $L>>b$. Iš pradžių pluoštas užima plotį $\pm b_{max}$ atžvilgiu ašies, einančios per vielą. Pluošto plotį statmena 78 pav. kryptimi ir vielos ilgį galima tarti esant begalinius. Įelektrinta viela yra statmena brėžinio plokštumai. (Brėžinys nubraižytas nesilaikant mastelio).



78 pav.

Vielos spindulys $r_0=10^{-6}$ m. Didžiausia vertė $b=b_{max}=10^{-4}$ m. Vielos elektros krūvio ilginis tankis $\tau=4{,}4\cdot10^{-11}$ C/m. Greitinančioji įtampa $V_0=2\cdot10^4$ V. Atstumas tarp vielos ir ekrano $L=0{,}3$ m.

Pastaba: atsakydami į 2) – 4) klausimus priimkite pagrįstas prielaidas, leidžiančias supaprastinti skaičiavimus ir tuo būdu gauti analizinius ir skaitinius sprendinius.

1) Nustatykite vielos sukurto elektrinio lauko stiprį E. Nubraižykite E priklausomybės nuo atstumo iki vielos ašies grafiką.

2) Remdamiesi klasikine fizika apskaičiuokite elektronų atsilenkimo kampą. Atlikite tai tokioms parametro b vertėms, kurioms esant elektronai nesusiduria su viela. Pažymėkite nedidelį

kampą tarp pradinės elektronų greičio krypties ir jų greičio prie ekrano θ_{gal}. Apskaičiuokite jį.

3) Apskaičiuokite ir pavaizduokite elektronų pasiskirstymo diagramą (t. y. intensyvumo pasiskirstymą) ekrane pagal klasikinę fiziką. Nustatykite tą pasiskirstymą apibūdinančių dydžių vertes.

4) Kvantinės fizikos, palyginti su klasikine, yra iš esmės skirtingos pasiskirstymo diagramos savybės. Pavaizduokite kvantinį rezultatą ir nustatykite jo kiekybines charakteristikas.

XXV tarptautinė olimpiada, 1994 m. (Kinija)

106. ***Reliatyvistinė dalelė.*** Specialiojoje reliatyvumo teorijoje rimties masės m_0 laisvos dalelės energijai E ir judesio kiekiui p galioja sąryšis

$$E=\sqrt{p^2c^2+m_0^2c^4}=mc^2.$$

Kai tokią dalelę veikia konservatyvi jėga, visa jos energija, išreiškiama mc^2 ir potencinės energijos suma, yra pastovi. Jei dalelės energija labai didelė, rimties energijos galima nepaisyti (tokia dalelė vadinama ultrareliatyvistine).

1) Nagrinėsime ultrareliatyvistinės dalelės vienmatį judėjimą (rimties energijos nepaisysime) veikiant pastovaus dydžio jėgai f, nukreiptai į koordinačių pradžią. Pradiniu laiko momentu $t=0$ dalelė yra koordinačių pradžioje, o jos judesio kiekis yra p_0. Aprašykite dalelės judėjimą vieno svyravimo metu, pavaizduodami grafiškai koordinatės x priklausomybę nuo laiko t ir judesio kiekio p priklausomybę nuo koordinatės x. Išreikškite posūkio taškų koordinates per p_0 ir f. Proceso kryptį (p,x) grafike nurodykite rodyklėmis.

2) Mezonas – tai dalelė, sudaryta iš dviejų kvarkų. Jo rimties masė yra lygi jį sudarančių kvarkų energijų sumai, padalytai iš c^2. Nagrinėjame vienmatį mezono modelį, kai kvarkai juda išilgai x ašies, traukia vienas kitą pastovaus dydžio jėga f ir laivai prasilenkia. Į kvarkų rimties masę neatsižvelgiame. Laiko

momentu t=0 kvarkai yra koordinačių pradžioje, t. y. $x_1=x_2=0$. Nubraižykite abiejų kvarkų (x,t) ir(p,t) grafikus, posūkio taškus pavaizduokite per M ir f diagramose nurodykite procesų kryptis. Nustatykite didžiausią atstumą tarp kvarkų.

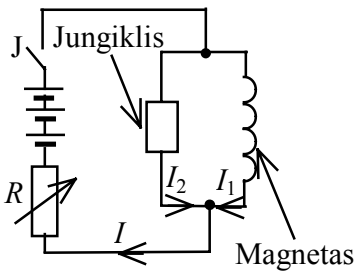
3) Antrojoje dalyje panaudotą atskaitos sistemą pažymime S. Sistema S′ juda priešinga x ašiai kryptimi pastoviu greičiu v=0,6c. Laiko momentu $t=t'=0$ koordinatės x ir x' sutampa. Grafiškai pavaizduokite abiejų kvarkų judėjimą diagramoje (x',t'). Posūkio taškų koordinates pavaizduokite per M,f,c. Apskaičiuokite didžiausią atstumą tarp kvarkų sistemoje S′. Koordinatės sistemose S ir S′ susijusios Lorenco transformacija:

$$x'=\gamma(x+\beta ct), t'\gamma(t\beta x/c),$$

čia $\beta=v/c$, $\gamma=1/\sqrt{1-\beta^2}$, o v – sistemos S greitis sistemos S′ atžvilgiu.

4) Mezonas, kurio rimties energija Mc^2=140 MeV, juda 0,6c greičiu laboratorinėje atskaitos sistemoje S′. Apskaičiuo-kite jo energiją toje sistemoje.

107. *Superlaidus magnetas.* Superlaidus magnetas paprastai esti sudarytas iš superlaidžios vielos solenoido ir superlaidaus jungiklio. Įdėjus magnetą į skystą helį, t. y. esant 4,2 K temperatūrai, laidais tekanti srovė neišskiria Džaulio šilumos, nes grandinės varža lygi nuliui. Jungiklio varža gali būti keičiama: r=0 superlaidžios būsenos ir $r=r_n$ normalios būsenos. Kai magnetas ir jungiklis esti superlaidūs, srovė jais teka neapibrėžtai ilgai. Todėl išjungus išorinį srovės šaltinį magnetinis laukas lieka pastovus.

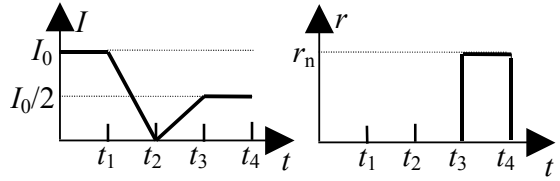


81 pav.

Pašildžius jungiklį jo varža tampa r_n, mūsų atveju 5 Ω. Solenoido induktyvumas yra lygus 10 H. Srovės stipris I reguliuojamas

parenkant kintamą varžą R. Grandinės schema duota 81 pav. Uždavinys sprendžiamas naudojant grafikus.

1) Srovės stipris I ir jungiklio varža tolydžiai keičiami taip, kaip parodyta 82 pav. grafikuose. Iš pradžių $I_1=I_2=I_0/2$. Nubraižykite I_1 ir I_2 priklausomybės nuo laiko grafikus, kai $t_1<t<t_4$.



82 pav.

2) Laiko momentu t=0 įjungiamas jungiklis J. Tuo momentu r=0, I_1=0, R=7,5 Ω, I=0,5 A. Esant įjungtam jungikliui J, varža r kinta taip, kaip parodyta 83 pav. grafike. Nubraižykite I, I_1, ir I_2 priklausomybės nuo laiko grafikus.

83 pav.

3) Kai superlaidus jungiklis yra normalios būsenos, juo gali tekėti ne stipresnė kaip 0,5 A srovė, nes tekant stipresnei srovei jungiklis esti sugadinamas. Superlaidus magnetas iki laiko momento t=3 min dirba stabiliu režimu, I=0, $I_1=-I_2$=20 A. Kaip galima sumažinti srovės stiprį iki nulio (keliais etapais) nesugadinant jungiklio? Pavaizduokite grafiškai I, I_1, I_2 ir r pakitimus.

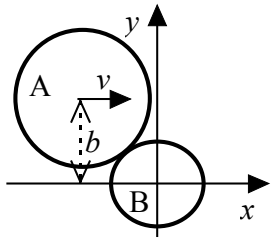
4) Superlaidus magnetas iki laiko momento t=3 min dirba stabiliu režimu, juo tekant 20 A stiprio srovei. Kaip pereiti į stabilų režimą esant 30 A srovės stipriui, nepažeidžiant ankstesnėje užduotyje nurodytų apribojimų jungikliui?

108. *Diskų susidūrimas.* Vienalytis m_A masės R_A spindulio diskas greičiu v be trinties slysta horizontalia plokštuma xy lygiagrečiai su x ašimi atstumu b nuo tos ašies ir susiduria su to paties storio m_B masės R_B spindulio disku, kurio centras sutampa

su koordinačių sistemos pradžia (84 pav.). Diskų susidūrimo taško greičio dedamosios, statmenos jų centrus jungiančiai tiesei, susidūrimo metu tarp savęs yra lygios.

1) Nustatykite diskų greičių projekcijas į x ir y ašis susidūrimo metu.

2) Nustatykite diskų kinetines energijas po susidūrimo.



84 pav.

XXVI tarptautinė fizikos olimpiada, 1995 m. (Australija)

111. ***Raudonasis gravitacinis poslinkis ir žvaigždės masės nustatymas.***

a) Iš žvaigždės paviršiaus išspinduliuojamas fotonas, kurio dažnis f ir efektinė masė m. Įrodykite, kad fotono dažnio pokytis Δf, fotonui išlėkus iš žvaigždės gravitacijos lauko, kai $\Delta f \ll f$, išreiškiamas formule

$$\frac{\Delta f}{f} = -\frac{GM}{Rc^2},$$

čia G – gravitacijos konstanta, M – žvaigždės masė, R – žvaigždės spindulys, c – šviesos greitis. Raudonasis spektro linijų poslinkis gali būti panaudotas santykiui M/R nustatyti. Žinant R, galima nustatyti M.

b) Vienos mūsų galaktikos žvaigždės link paleista automatinė kosminė stotis išmatuoti žvaigždės masę M ir spindulį R. Žvaigždės paviršiuje He^+ jonų išspinduliuoti fotonai registruojami rezonansinės sugerties metodu, sužadinant He^+ jonus stoties kameroje formuojamame pluoštelyje. Sugertis galima tik tada, kai He^+ jonai tam tikru greičiu juda žvaigždės link ir tuo kompensuoja raudonąjį poslinkį. He^+ jonų greitis žvaigždės atžvilgiu $v=\beta c$ matuojamas kaip atstumo iki artimiausio žvaigždės taško funkcija. Eksperimento duomenys pateikti lentelėje. Panaudodami visus

eksperimento duomenis grafiniu būdu nustatykite žvaigždės masę M ir spindulį R. Atsakymo paklaidos nevertinkite.

Greičio parametras $\beta=v/c$ (10^{-5})

3,352 3,279 3,195 3,077 2,955

Atstumas iki žvaigždės paviršiaus d (10^8 m)

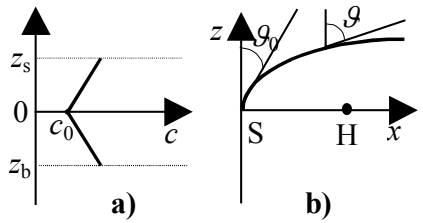
38,90 19,98 13,32 8,99 6,67

c) Šio eksperimento metu, nustatant R ir M vertes, paprastai atsižvelgiama į fotono dažnio pokytį dėl spinduliuojančiojo atomo atatrankos. (Šiluminis judėjimas praplečia spinduliuotės juostą, tačiau nekeičia maksimumo padėties, todėl tariame, kad į visus šiluminius efektus atsižvelgta).

i) Tegul ΔE yra dviejų atomo energijos lygmenų energijų skirtumas, kai atomai nejuda. Tegul atomas, esantis ramybės būsenos, išspinduliuoja fotoną ir pats išjuda. Išveskite išspinduliuoto atomo energijos hf reliatyvistinę priklausomybę nuo ΔE ir atomo rimties masės m_0.

ii) Gaukite skaitinį reliatyvistinio dažnio poslinkio ($\Delta f/f$) įvertinimą He^+ jonams. Rezultatas turėtų būti daug mažesnis už raudonąjį poslinkį b) punkte.

Duomenys: šviesos greitis $c=3{,}0\cdot10^8$ m/s, He rimties masė $m_0c^2=4\times938$ MeV, Boro energija $E_n=-13{,}6Z^2/n^2$ eV, gravitacijos konstanta $G=6{,}7\cdot10^{-11}$ N·m²·kg⁻².



85 pav.

112. Garso greitis vandenyje priklauso nuo gylio, vandens temperatūros, druskos koncentracijos. 85 pav. a) parodyta garso greičio c priklausomybė nuo gylio z, kai mažiausias greitis c_0 esti viduryje tarp vandenyno paviršiaus ir dugno. Imame $z=0$, kur greitis mažiausias, z_s yra vandenyno paviršius, z_b - dugnas. Kai $z>0$, greitis išreiškiamas formule $c=c_0+bz$, kai $z<0$, $c=c_0-bz$. Čia $b=|dc/dz|$ yra pastovus garso gradiento modulis. 85

pav. b) parodytas vandenyno pjūvis xz plokštuma (x – horizontalė). Toje plokštumoje garso greitis išreiškiamas 85 pav. a) parodyta priklausomybe. Garso šaltinis yra taške, kurio koordinatės x=0, z=0. Garsą, sklindantį kuria nors kryptimi, pavaizduojame spinduliu, išeinančiu iš šaltinio kampu ϑ_0 (85 pav. b). Dėl garso greičio priklausomybės nuo z spindulys išlinksta, kampas ϑ išilgai trajektorijos kinta.

a) Įrodykite, kad pradinė trajektorijos dalis yra lankas, kurio spindulys $R=c_0/(b\sin\vartheta_0)$, kai $0\le\vartheta_0\le\pi/2$.

b) Išveskite formulę, siejančią z_s, c_0 ir b, atitinkančią mažiausią kampo ϑ_0 vertę spinduliams, neatsispindintiems nuo vandenyno paviršiaus.

c) 85 pav. b) pavaizduotas imtuvas H, kurio koordinatės z=0, $x=X$. Gaukite išraišką, siejančią b, X ir c_0 ir atitinkančią seriją kampo ϑ_0 verčių, leidžiančių garsui pasiekti imtuvą H. Tam, kad nebūtų garso atspindžio, tarkite, jog z_s ir z_b yra gana dideli.

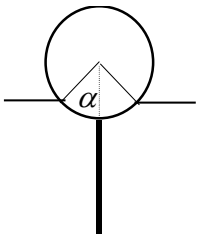
d) Apskaičiuokite keturias mažiausias ϑ_0 vertes, kai X=10000 m, c_0=1500 m/s, b=0,02000 s^{-1}.

e) Išveskite formulę laikui, reikalingam garsui nusklisti nuo S iki H esant mažiausiam kampui ϑ_0, apskaičiuoti. Apskaičiuokite tą laiką naudodami d) punkto duomenis. Gali būti naudinga formulė

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\ln tg(x/2).$$

Nustatykite laiką, per kurį tiesus spindulys nusklinda nuo S iki H. Kuris spindulys – tiesus ar atitinkantis mažiausią kampą ϑ_0, nusklis greičiau?

113. Plūdę sudaro a spindulio l ilgio pastovaus d tankio cilindras ir kietas vienalytis strypas, pritvirtintas cilindro viduryje statmenai cilindro ašiai (86 pav.). Strypo masė lygi cilindro masei, jo ilgis lygus cilindro skersmeniui, tankis didesnis už jūros vandens tankį. Plūdė plūduriuoja ρ tankio jūros vandenyje.



86 pav.

a) Gaukite išraišką, siejančią plūduriavimo kampą α su santykiu d/ρ. Į strypo tūrį neatsižvelkite.

b) Panardinta į mažą gylį z ir paleista plūdė pradeda vertikaliai svyruoti apie pusiausvyros padėtį. Nustatykite, kaip to svyravimo dažnis priklauso nuo α, a ir laisvojo kritimo pagreičio g. Tarkite, kad vandens judėjimo įtaka gali būti įvertinta trečdaliu padidinant plūdės efektinę masę. Tarkite, kad kampas α nėra mažas.

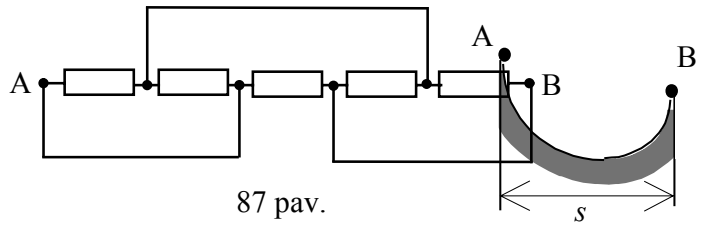
c) Raskite svyravimo dažnio priklausomybę nuo a ir g plūdei sukinėjantis apie cilindro ašį. Strypo nuokrypio nuo vertikalės kampą tarkite esant mažą, į vandens dinamiką ir klampą neatsižvelkite.

d) Plūdėje įtaisytas akselerometras, leidžiantis tirti vertikaliuosius ir sukamuosius svyravimus. Nustatyta, kad vertikaliųjų svyravimų periodas 1 s, sukamųjų 1,5 s. Panaudodami tą informaciją parodykite, kad plūduriavimo kampas artimas 90°, įvertinkite cilindro spindulį ir masę, žinodami, kad cilindro ilgis yra lygus jo spinduliui. Vandens tankis ρ=1000 kg/m^3, laisvojo kritimo pagreitis g=9,8 m/s^2.

XXVII tarptautinė fizikos olimpiada, 1996 m. (Norvegija)

116. (Penkios šio uždavinio dalys tarp savęs nesusijusios).

a) Penki rezistoriai, kurių kiekvieno varža 1 Ω, sujungti taip, kaip parodyta 87 pav. Jungiamųjų laidų varža labai maža. Nustatykite varžą tarp taškų A ir B.



87 pav.

88 pav.

b) Slidininkas be pradinio greičio startuoja iš taško A ir čiuožia šlaitu

nedarydamas posūkių ir nestabdydamas (88 pav.). Trinties koeficientas lygus μ. Jam sustojus taške B, horizontalusis jo poslinkis buvo lygus s. Koks aukščių skirtumas tarp taškų A ir B? (Slidininko greitis nebuvo didelis, tad galima nepaisyti papildomo slėgio į sniegą, atsirandančio dėl trajektorijos kreivumo. Taip pat galima neatsižvelgti į oro pasipriešinimą ir μ priklausomybę nuo greičio.)

c) Termiškai izoliuotas metalo gabalas kaitinamas elektros srove esant pastoviai galiai P ir atmosferos slėgiui. Metalo temperatūra T laikui t einant didėja pagal dėsnį

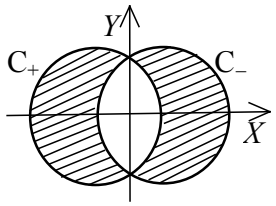
$$T(t)=T_0[1+a(t-t_0)]^{1/4}.$$

Čia a, t_0 ir T_0 - pastovūs dydžiai. Nustatykite metalo šiluminės talpos $C_p(T)$ priklausomybę nuo temperatūros eksperimento temperatūrų intervale.

d) Juodas plokščias paviršius, kurio temperatūra pastovi ir lygi T_1, yra lygiagretus su kitu juodu plokščiu paviršiumi, kurio temperatūra irgi yra pastovi, bet žemesnė ir lygi T_2. Tarp paviršių yra vakuumas. Norint sumažinti šiluminės spinduliuotės srautą tarp šių paviršių įdedamas šiluminis ekranas, sudarytas iš dviejų plonų juodų plokštelių, lygiagrečių su plokštėmis (89 pav.). Per tam tikrą laiką nusistovi pusiausvyra. Kiek kartų ekranas sumažina šilumos srautą? Į baigtinių plokščių matmenų sąlygojamus pakraščio efektus neatsižvelkite.

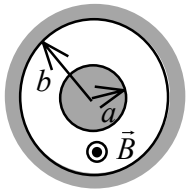
89 pav.

e) Dviem tiesiais labai ilgais nemagnetiniais vienas nuo kito izoliuotais laidininkais C_+ ir C_-, lygiagrečiais su Z ašimi, teka vienodo dydžio, bet priešingų krypčių srovės I. Laidininkų skerspjūvius (90 pav. užbrūkšniuoti) lemia D skersmens skrituliai, esantys XY plokštumoje, atstumas tarp kurių centrų lygus $D/2$. (Taigi kiekvieno laidininko skerspjūvio plotas lygus $(\pi/12+\sqrt{3}/8)D^2$). Srovės vienodai pasiskirsčiusios visame skerspjūvio plote. Apskaičiuokite magnetinio srauto tankį $B(x,y)$ erdvėje tarp laidininkų.



90 pav.

117. Erdvėje tarp dviejų bendraašių cilindrinių laidininkų yra vakuumas (91 pav.). Vidinio cilindro spindulys lygus a, o vidinis išorinio cilindro spindulys lygus b. Išoriniam cilindrui (vadinamam anodu) galima suteikti teigiamą vidinio cilindro atžvilgiu potencialą U. Sistema yra vienalyčiame nuolatiniame magnetiniame lauke $\vec{B}$, lygiagrečiame su cilindrų ašimi ir nukreiptame į mus (žr. 91 pav.). Vidinis cilindras emituoja elektronus, kurių kiekvieno masė m ir krūvis $-e$.



91 pav.

a) Tarkime, kad išorinio cilindro potencialas lygus U, tačiau B=0. Elektronas iš vidinio cilindro paviršiaus išlekia labai mažu greičiu. Apskaičiuokite jo greitį tuo momentu, kai jis pasieks anodą. Atsakymą pateikite dviem atvejais: nereliatyvistiniu ir reliatyvistiniu artutinumais.

Nurodymas. Tolesniuose šio uždavinio punktuose naudokite nereliatyvistinį artutinumą.

b) Dabar tarkime, kad U=0, bet yra vienalytis magnetinis laukas $\vec{B}$. Elektronas išlekia spindulio kryptimi turėdamas pradinį greitį v_0. Jei magnetinis laukas viršija tam tikrą vertę B_0, elektronas niekada nepasieks anodo. Schemiškai pavaizduokite elektrono trajektoriją, jei B truputį viršija B_0. Nustatykite B_0.

Nurodymas. Tolimesniuose punktuose yra ir potencialas U, ir vienalytis magnetinis laukas B.

c) Magnetinis laukas suteikia elektronui judesio kiekio momentą L cilindrų ašies atžvilgiu. Parašykite judesio kiekio

momento kitimo spartos dL/dt išraišką. Įrodykite, jog iš jos galima gauti, kad dydis $L–keBr^2$ (čia k – bematis koeficientas, o r – atstumas iki cilindro ašies) lieka pastovus judant elektronui. Nustatykite k.

d) Panagrinėkime labai mažu greičiu iš vidinio cilindro išlėkusį elektroną. Toks elektronas nepasiekia anodo ir nutolsta nuo cilindrų ašies didžiausiu atstumu r_m. Apskaičiuokite elektrono greičio didžiausio jo nuotolio taške priklausomybę nuo r_m.

e) Magnetinį lauką norime panaudoti anodo srovei reguliuoti. Kai $B>B_0$, labai mažu greičiu išlėkęs elektronas nepasieks anodo. Nustatykite B_0.

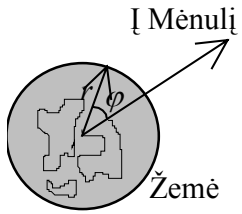
f) Jei elektronai iš vidinio cilindro paviršiaus išlaisvinami kaitinant tą cilindrą, tai bendru atveju elektrono greitis prie vidinio cilindro paviršiaus esti nelygus nuliui. Tarkime, kad lygiagrečioji su $\vec{B}$ jo pradinio greičio dedamoji yra v_B, o statmenosios – v_r (spindulio kryptimi) ir v_φ (statmena spinduliui kryptimi). Nustatykite šiuo atveju magnetinį lauką B_0, kuriam esant elektronas nepasieks anodo.

118. Panagrinėkime kai kurias bendrąsias jūrų potvynių ir atoslūgių Žemėje savybes. Kad būtų paprasčiau, padarysime šias prielaidas: Žemė ir Mėnulis sudaro izoliuotą sistemą; atstumas tarp Žemės ir Mėnulio yra pastovus; Žemė yra visiškai padengta vandenyno; nepaisysime dinaminių efektų, sąlygojamų Žemės sukimosi apie savo ašį; Žemės gravitacinė trauka yra tokia, kokia ji būtų, jei visa jos masė būtų sutelkta Žemės centre. Duoti tokie dydžiai: Žemės masė M=5,98·10^{24} kg, Mėnulio masė M_M=7,3·10^{22} kg, Žemės spindulys R=6,37·10^6 m, atstumas tarp Žemės ir Mėnulio centrų L=3,84·10^8 m, gravitacijos konstanta G=6,67·10^{-11} m^3·kg^{-1}·s^{-2}.

a) Mėnulis ir Žemė sukasi apie bendrą masių centrą C kampiniu greičiu ω. Koks atstumas tarp C ir Žemės centro? Nustatykite ω skaitinę vertę.

Dabar naudosimės apie tašką C besisukančia koordinačių sistema, kurios viena iš ašių sutampa su linija, einančia per Žemės ir Mėnulio centrus. Šioje koordinačių sistemoje Žemės paviršių gaubiantys vandenys yra statiški. Plokštumoje P, einančioje per C statmenai sukimosi ašiai, kiekvieno materialaus taško, esančio ant skysto paviršiaus, padėtis gali būti apibūdinama polinėmis koordinatėmis r ir φ, kaip tai parodyta 92 pav. (čia r yra atstumas nuo Žemės centro). Nagrinėsime skysto Žemės paviršiaus formą plokštumoje P, užrašę to paviršiaus lygtį taip:

$$r(\varphi)=R+h(\varphi).$$



92 pav.

b) Panagrinėkime m masės materialųjį tašką, esantį ant Žemės skysto paviršiaus (plokštumoje P). Mūsų atskaitos sistemoje jį veikia išcentrinė jėga ir Mėnulio bei Žemės traukos jėgos. Atsižvelgdami į šias tris jėgas, užrašykite potencinės energijos išraišką.

Nurodymas: bet kokia jėga $F(r)$, nukreipta radialiai kokios nors koordinačių sistemos atžvilgiu, yra lygi sferinę simetriją turinčios potencinės energijos $U(r)$ išvestinei, paimtai su minuso ženklu: $F(r)=–U'(r)$.

c) Apytiksliai išreikškite potvynio bangos $h(\varphi)$ formą per M, M_M ir kitus dydžius. Koks šio modelio duodamas skirtumas (metrais) tarp potvynio ir atoslūgio vandens aukščių?

XXVIII tarptautinė fizikos olimpiada, 1997 m. (Kanada)

119. ***Palyginimo uždaviniai.*** a) Prie nesvarios idealios spyruoklės prikabintas nedidelis kūnas svyruoja aukštyn ir žemyn dažniu f. Spyruoklė perkerpama pusiau ir kūnas prikabinamas prie vienos iš spyruoklės dalių galo. Koks bus šios naujos svyruoklės dažnis f_1?

b) Nesužadinto vandenilio atomo spindulys a_0=0,0529 nm (tai Boro radiusas). Koks bus „miuoninio vandenilio", kuriame

elektroną pakeičia to paties krūvio, bet 207 kartus didesnės masės miuonas, spindulys a_1? Tarkite, kad protono masė ženkliai didesnė tiek už miuono, tiek už elektrono masę.

c) Vidutinė Žemės temperatūra T=287 K. Kam būtų lygi vidutinė Žemės temperatūra T_1, jeigu 1 % sumažėtų atstumas tarp Žemės ir Saulės?

d) Vieną dieną oras yra sausas ir jo tankis ρ=1,2500 kg/m^3. Kitą dieną oro drėgmė padidėja tiek, kad 2 % oro masės sudaro vandens garai. Slėgis ir temperatūra išlieka nepakitę. Koks to drėgnojo oro tankis ρ_1? Vidutinė sauso oro molio masė lygi 28,8 g/mol, vandens molio masė 18 g/mol. Taikykite idealiųjų dujų modelį.

e) Sraigtasparnis gali kyboti ore, jei jo variklis išvysto mechaninę galią P. Kokią mechaninę galią P_1 turėtų išvystyti iš tų pačių medžiagų pagamintas sraigtasparnis, kurio visi tiesiniai matmenys būtų sumažinti du kartus, kad jis irgi kybotų ore?

120. *Branduolių masė ir jų stabilumas.* Šiame uždavinyje visos energijos matuojamos megaelektronvoltais (MeV). 1 MeV=1,6·10^{-13} J.

Atomo branduolio, susidedančio iš Z protonų ir N neutronų (tokio branduolio atominė masė A=N+Z), masė M lygi laisvų tą branduolį sudarančių nukleonų (protonų ir neutronų) masių sumai minus branduolio ryšio energija, padalyta iš šviesos greičio kvadrato (B/c^2). Taigi

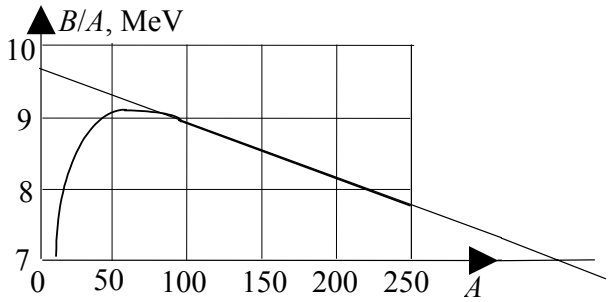
$$Mc^2=Zm_pc^2+Nm_nc^2-B.$$

93 pav. grafike parodyta, kaip didžiausia B/A vertė (duotai A vertei) priklauso nuo A.

a) Kai atominė masė viršija tam tikrą vertę A_α, branduolio ryšio energija visuomet esti ganėtinai maža, todėl gali būti emituojama alfa dalelė (alfa dalelė – tai helio atomo branduolys, jo A=4). Įvertinkite A_α, tiesiškai aproksimuodami tą 93 pav. kreivės dalį, kurioje A>100.

Tarkime, kad šiame modelyje branduoliai prieš alfa skilimą, taip pat ir po jo susidarę branduoliai turi ryšio energiją, atvaizduotą

93 pav. kreive, ir kad visa alfa dalelės ryšio energija B_α=25,0 MeV (iš grafiko to nenustatysite!).



93 pav.

b) Iš Z protonų ir N neutronų susidedančio branduolio (A=Z+N) ryšio energija gali būti apskaičiuota pagal šią pusiau empirinę formulę:

$$B=a_vA-a_nA^{2/3}-a_cZ^2A^{-1/3}-a_a(N-Z)^2/A-\delta.$$

Parametras δ lygus: $+a_pA^{-3/4}$ branduoliams, kurių N ir Z nelyginiai skaičiai; 0 branduoliams, kurių N lyginis, o Z nelyginis skaičius, arba atvirkščiai; $-a_pA^{-3/4}$ branduoliams, kurių N ir Z lyginiai skaičiai. Koeficientų vertės: a_v=15,8 MeV; a_n=16,8 MeV; a_c=0,72 MeV; a_a=23,5 MeV; a_p=33,5 MeV.

i) Išveskite formulę protonų skaičiui Z_{max}, atitinkančiam didžiausią duotosios atominės masės A branduolio ryšio energiją, apskaičiuoti. Šiuose skaičiavimuose parametrą δ atmeskite.

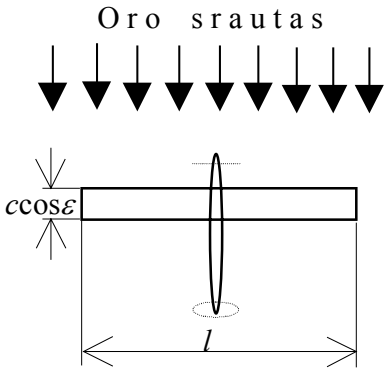
ii) Kam lygus didžiausią B/A vertę turinčio branduolio, kurio atominė masė A=200, protonų skaičius Z? Šį kartą į parametrą δ atsižvelkite.

iii) Išnagrinėkite šiuos tris branduolius, kurių atominė masė A=128: ${}^{128}_{53}J$, ${}^{128}_{54}Xe$, ${}^{128}_{55}Cs$. Nustatykite, kurie iš jų energijos požiūriu yra stabilūs ir kurie turi pakankamai energijos, kad galėtų vykti toliau išvardyti skilimo procesai: 1) β^- skilimas (iš branduolio išlekia elektronas); 2) β^+ skilimas (iš branduolio išlekia pozitronas); 3) $\beta^-\beta^-$ skilimas (iš branduolio vienu metu išlekia du

elektronai); 4) elektrono pagavimas (branduoliai pasiima atomo elektroną).

Elektrono (ir pozitrono) rimties masės energija $m_e c^2$=0,51 MeV, protono $m_p c^2$=938,27 MeV, neutrono $m_n c^2$=939,57 MeV.

121. ***Saulės energiją naudojantis lėktuvas.*** Jums reikia sukonstruoti lėktuvą, kuris galėtų išsilaikyti ore tik Saulės energijos dėka. Efektyviausia konstrukcija turi sparnus, kurių visas viršutinis paviršius padengtas saulės elementais. Tie elementai tiekia elektros energiją propelerį sukančiam varikliui. Tarkime, kad sparnas yra stačiakampio, kurio ilgis l ir plotis c, formos. Sparno plotas $S=cl$, o ilgio ir pločio santykį pažymėkime $A=l/c$. Norėdami apytiksliai aprašyti sparno veikimą, galime nagrinėti į sparną krintantį oro sluoksnį, kurio aukštis x, ilgis l, ir paskui nukrypstantį nuo sparno žemyn kampu ε. Oro greičio modulio pokytis labai nedidelis. Galima parinkti optimalią ε vertę. Šis paprastas modelis esti artimas tikrovei, jei $x=\pi/4$. Tarkime, kad mūsų atveju taip ir yra. Visą lėktuvo masę pažymėkime M ir tarkime, kad jis skrenda horizontalia kryptimi greičiu v jį supančio oro atžvilgiu. Tolesniuose skaičiavimuose nagrinėkite tik aptekantį sparną orą. Propelerio įtakos oro srautui nepaisykite. 94 pav. parodytas lėktuvo vaizdas iš viršaus (su lėktuvu susietos atskaitos sistemos atžvilgiu), o 95 pav. sparno vaizdas iš šono (judančios kartu su lėktuvu atskaitos sistemos atžvilgiu).



94 pav.

a) Iš pradžių nagrinėkite oro impulso pokytį neatsižvelgdami į oro greičio modulio kitimą. Išveskite keliamosios jėgos L ir horizontaliosios pasipriešinimo jėgos D_1 priklausomybių nuo greičio v, kampo ε ir oro tankio ρ išraiškas.

b) Toliau nagrinėjant reikia atsižvelgti į oro trintį su aptekamu sparno paviršiumi. Dėl to atsiranda papildoma horizontali pasipriešinimo jėga D_2. Oras sulėtėja neženkliai. Jo greičio modulio pokytis Δv, kai $\Delta v/v$<<0,01, gali būti išreikštas formule

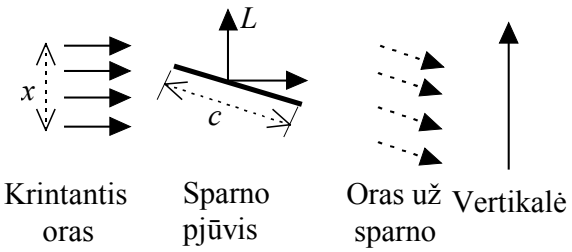
$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{f}{A}.$$

Dydis f nepriklauso nuo ε.

Išveskite skridimo greičio v_0 priklausomybės nuo M, f, A, S, ρ ir g (laisvojo kritimo pagreičio) išraiškas esant mažiausiai galiai, kuri reikalinga, kad lėktuvas skristų pastoviame aukštyje pastoviu greičiu. Atmeskite $\varepsilon^2 f$ bei aukštesnių eilių dydžius.

Skaičiuojant jums gali būti naudinga mažiems kampams tinkanti formulė

$$1-\cos\varepsilon \approx \frac{\sin^2\varepsilon}{2}.$$



95 pav.

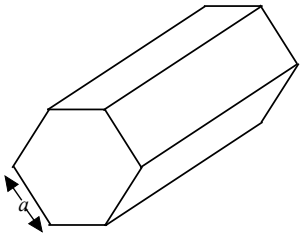
c) Nubraižykite grafiką, pavaizduojantį, kaip galia P priklauso nuo greičio v modulio. Tame pačiame brėžinyje dviem kreivėmis parodykite, kaip galia priklausytų nuo greičio, jei kiekviena pasipriešinimo jėga veiktų atskirai. Raskite mažiausios galios P_{min} priklausomybės nuo M, f, A, S, ρ ir g išraišką.

d) Apskaičiuokite sparno apkrovą Mg/S (N/m^2) ir skridimo greitį v_0 (m/s) tuo atveju, kai saulės elementų tiekiama energija pakankama, kad propelerio varikliai išvystytų I=10 W mechaninę

galią, tenkančią vienam sparno paviršiaus kvadratiniam metrui. ρ=1,25 kg/m^3, f=0,004, A=10.

XXIX tarptautinė fizikos olimpiada, 1998 m. (Islandija)

123. ***Šešiakampės prizmės riedėjimas.*** Yra ilga kieta nesideformuojanti šešiakampė vienalytė prizmė (panaši į pieštuką), kurios masė M, o skerspjūvis – taisyklingasis šešiakampis, kurio briauna lygi a (97 pav.).Tokios prizmės inercijos momentas centrinės ašies atžvilgiu yra



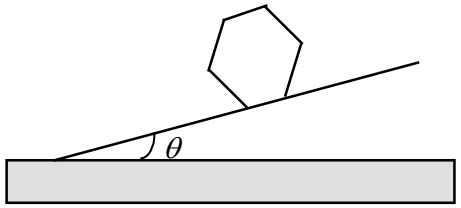
97 pav.

$$I=\frac{5}{12}Ma^2,$$

o jos inercijos momentas kurios nors briaunos atžvilgiu

$$I'=\frac{17}{12}Ma^2.$$

a) Prizmė padedama ant nuožulniosios plokštumos, sudarančios su horizontu mažą kampą θ taip, kad jos simetrijos ašis būtų horizontali (98 pav.). Tarkime, prizmės sienos yra šiek tiek įlenktos į vidų ir riedanti nuožulniąja plokštuma prizmė ją liečia tik briaunomis. (Šio įlenkimo įtakos prizmės inercijos momentams nepaisykite.) Prizmė truputį pajudinama ir ima, neslysdama ir neprarasdama kontakto su plokštuma, netolygiai judėti ja žemyn. Kadangi prizmės judėjimas netolygus, jos kampiniai greičiai, kuriai nors briaunai prieš pat paliečiant plokštumą ω_i ir tuoj pat po sąlyčio ω_f, yra skirtingi. Įrodykite, kad tarp jų esti toks sąryšis:



98 pav.

$$\omega_f=s\omega_i$$

ir nustatykite koeficiento s vertę.

b) Tarkime, kad prizmės kinetinės energijos prieš pat smūgį briauna į plokštumą ir tuoj pat po jo yra lygios atitinkamai K_i ir K_f. Įrodykite, kad

$$K_f=rK_i$$

ir nustatykite koeficiento r vertę.

c) Kad prizmė dar kartą atsitrenktų briauna į plokštumą, K_i turi būti didesnė už tam tikrą mažiausią savo vertę $K_{i\ min}$, kurią galima išreikšti taip:

$$K_{i\ min}=\delta Mga.$$

Čia g=9,81 m/s^2 – laisvojo kritimo pagreitis.

Koeficientą δ išreikškite per nuožulniosios plokštumos polinkio kampą θ ir koeficientą r.

d) Jei c) punkto sąlyga patenkinta, prizmės judėjimas nuožulniąja plokštuma nusistovi ir kinetinė energija K_i jai riedant turi pastovią vertę $K_{i\theta}$. Įrodykite, kad

$$K_{i\theta}=kMga$$

ir k išreikškite per θ ir r.

e) 0,1^o tikslumu apskaičiuokite mažiausią nuožulniosios plokštumos polinkio kampą θ_0, kuriam esant vieną kartą prasidėjęs prizmės judėjimas gali tęstis ir toliau.

124. ***Vanduo po ledynine kepure.*** Ledyninė kepurė – tai ant žemės esantis storas ledo sluoksnis. Jo storis gali siekti kelis kilometrus, o horizontalia kryptimi šis sluoksnis tęsiasi šimtus kilometrų. Uždavinyje nagrinėjamas ledo tirpimas ir vanduo po tirpstančio ledo sluoksniu, t.y. ledo lydymosi taške. Šiomis sąlygomis galima padaryti prielaidą, kad slėgio skirtumus ledas sąlygoja kaip klampus skystis, bet jis deformuojasi (daugiausia dėl vertikalaus judėjimo) kaip trapi medžiaga. Spręsdami uždavinį naudokitės šiais duomenimis: vandens tankis ρ_v=1,0·10^3 kg/m^3, ledo tankis ρ_l=0,917·10^3 kg/m^3, ledo savitoji lydymosi šiluma L_l=3,4·10^5 J/kg, ledo savitoji šiluma c_l=2,1·10^3 J/(kg·^{o}C), uolienų ir magmos tankis ρ_r=2,9·10^3 kg/m^3, uolienų ir magmos savitoji šiluma c_r=700 J/(kg·^{o}C), uolienų ir magmos savitoji lydymosi

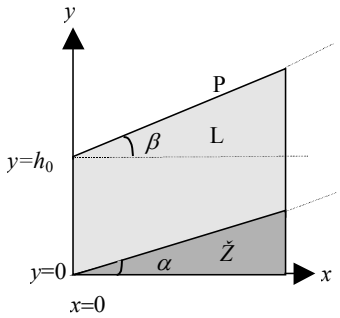
šiluma L_r=4,2·10^5 J/kg, vidutinis šilumos srautas, sklindantis į išorę per žemės paviršių J_q=0,06 W/m^2, ledo lydymosi taškas T_0=0°C.

a) Panagrinėkite storą ledyninę kepurę toje vietoje, kur iš žemės į išorę sklinda vidutinis šilumos srautas. Pasinaudodami duotais duomenimis, apskaičiuokite per metus išsilydžiusio ledo sluoksnio storį d.

b) Dabar panagrinėkite viršutinę ledyninės kepurės dalį. Tarkite, kad po kepure esantis žemės paviršius pasviręs kampu α, o viršutinis ledyninės kepurės paviršius – kampu β, kuris gali būti ir didesnis, ir mažesnis už α, ir neigiamas (99 pav.). (Šiame ir tolesniuose paveiksluose P – ledyninės kepurės paviršius, Ž – žemė, L – ledas). Vertikalus ledo storis taške x=0 lygus h_0. Tada viršutinio ir apatinio ledyninės kepurės paviršių lygtys bus tokios:

$$y_1=x\mathrm{tg}\alpha,$$

$$y_2=h_0+x\mathrm{tg}\beta.$$



99 pav.

Išveskite išraišką, siejančią slėgį ledyninės kepurės apačioje p su horizontaliąja koordinate x.

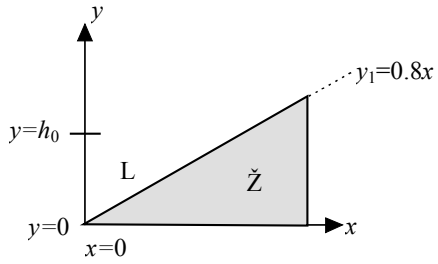
Nustatykite matematinį sąryšį tarp kampų β ir α tuo atveju, kai vanduo tarp ledyninės kepurės ir žemės neteka jokia kryptimi. Įrodykite, kad šis sąryšis gali būti užrašytas taip:

$$\mathrm{tg}\beta=s\mathrm{tg}\alpha$$

ir nustatykite (analizine forma) koeficientą s.

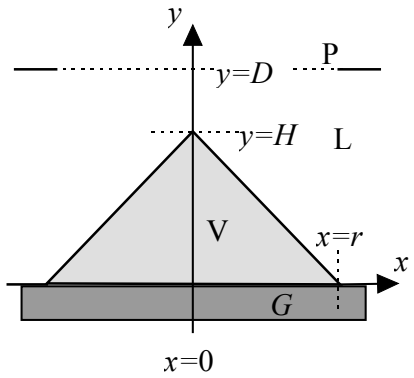
100 pav. tiesė y=0,8x aprašo žemės paviršių po ledynine kepure. Vertikalus storis h_0 taške x=0 yra 2 km. Tarkime, apačioje esantis vanduo yra pusiausviras. Grafike nubrėžkite tiesę y_1 ir pridėkite tiesę y_2, vaizduojančią viršutinį ledo paviršių.

c) Ant horizontalios žemės esančio storo ledo sluoksnio pradinis storis D=2,0 km. Jo viduje staiga ištirpus daliai ledo atsirado kūgio formos vandens tūris. To kūgio aukštis H=1,0 km, spindulys r=1,0 km (101 pav., kuriame V – vanduo). Tarkite, kad likęs ledas dėl šios priežasties pajuda tik vertikalia kryptimi. Analiziškai aprašykite ledyninės kepurės formą po to, kai susiformavo vandens kūgis ir buvo pasiekta hidrostatinė pusiausvyra. Šios ledyninės kepurės formą taip pat pavaizduokite grafiškai.



100 pav.

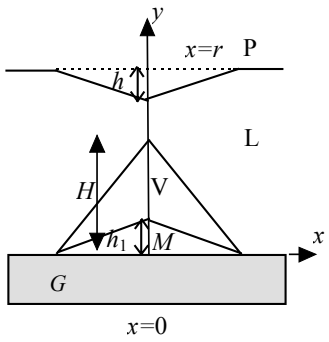
d) Kasmetinės ekspedicijos metu tarptautinė mokslininkų grupė tyrinėja šylančią ledyninę kepurę Antarktidoje. Paprastai ji atrodo kaip nemažas plokščias paviršius, tačiau kartą ten buvo aptikta kraterio pavidalo įduba, turinti apversto kūgio formą. Jos gylis h=100 m, spindulys r=500 m (102 pav., kuriame M – įsiveržusi uoliena (magma). Ledo storis tyrinėjimų rajone 2000 m.



101 pav.

Pasitarę mokslininkai nusprendė, kad labiausiai tikėtina įvykus nedideliam vulkano išsiveržimui po ledynine kepure. Nedidelis išsilydžiusios uolienos (magmos) kiekis pateko į apatinę ledyninės kepurės dalį, sukietėjo ir atvėso, išlydydamas tam tikrą ledo kiekį. Mokslininkai stengiasi įvertinti tokio „įsiveržimo" (magmos patekimo po ledynine kepure) tūrį ir suvokti, kas atsitiko tokiu būdu išsilydžius ledui.

Tarkime, ledas judėjo tik vertikalia kryptimi, iš pradžių magma buvo skysta ir buvo 1200°C temperatūros. Paprastumo dėlei dar tarkime, kad išsiveržusi magma turėjo kūgio, kurio pagrindas skritulys, o jo centras yra toje pačioje vertikalėje, kaip ir paviršiaus įdubos centras, formą. Magmos kilimo trukmę manykime esant trumpą palyginti su šilumos mainų proceso trukme. Taip pat tarkime, kad šiluma sklido vertikalia kryptimi, o vanduo visą laiką turėjo kūgio, esančio virš magmos išsiveržimo centro, formą.



102 pav.

Atsižvelgus į šias prielaidas reikia manyti, kad ledo lydymasis vyksta dviem etapais. Iš pradžių magmos paviršiuje atsirandantis vanduo nesti pusiausviras ir teka tolyn. Galima tarti, kad šio vandens temperatūra esti lygi 0°C. Vėliau pasiekiama hidrostatinė pusiausvyra ir vanduo susitelkia virš įsiveržusios magmos nebetekėdamas tolyn.

Jums reikia nustatyti šiuos parametrus nusistovėjus šiluminei pusiausvyrai:

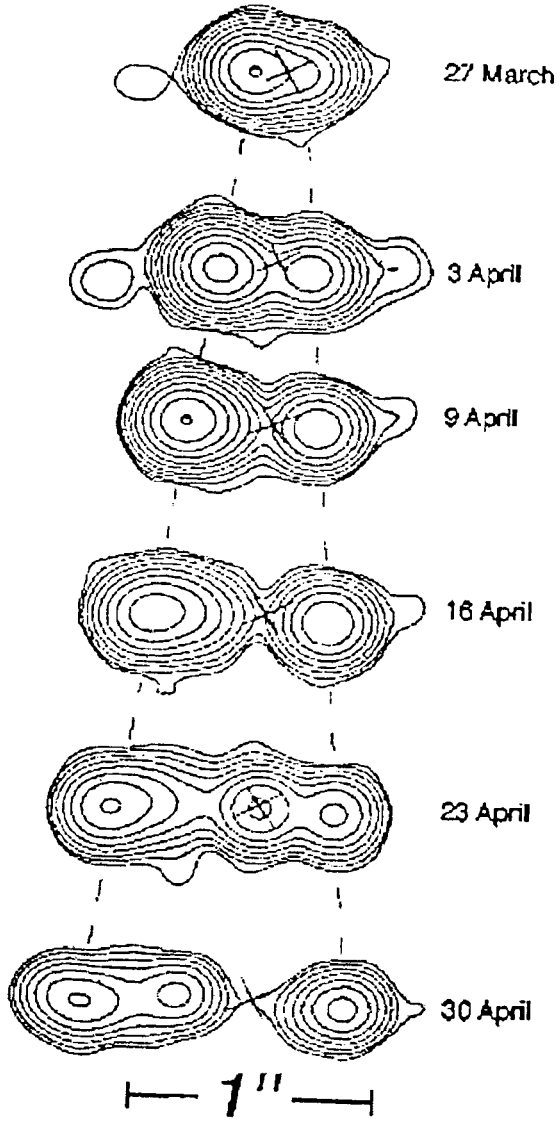
1) Po ledynine kepure atsiradusio vandens kūgio aukštį H (dugno proceso pradžioje atžvilgiu).

2) Įsiveržimo aukštį h_1.

3) Viso susidariusio vandens masę m_{viso} ir tolyn nutekėjusio vandens masę m'.

Naudodamiesi 102 pav. koordinačių sistema, atsižvelgdami į mastelį nubraižykite uolienos įsiveržimo ir likusio vandens formas.

125. *Greičiau už šviesą?* Šis uždavinys skirtas 1994 m. atliktų sudėtingo radijo bangų šaltinio, esančio mūsų galaktikoje, stebėjimo rezultatų analizei.



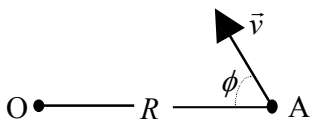
103 pav.

103 pav. pavaizduota serija stebėjimų, atliktų radioteleskopu įvairiais laiko momentais centimetrinių bangų diapazone. Kontūrai vaizduoja pastovių spinduliavimo stiprių linijas, panašiai kaip paviršiaus aukščiai esti vaizduojami topografiniuose žemėlapiuose. Du matomi maksimumai atitinka du objektus, judančius iš bendro centro, paveiksle žymimo kryžiuku. Šis centras irgi yra stiprus radijo bangų šaltinis, tačiau kitame bangų diapazone, todėl paveiksle yra nematomas. Tarkime, jo padėtis yra pastovi, o matavimai buvo atlikti skirtingomis dienomis tuo pačiu paros metu. Paveikslo mastelį rodo apačioje esanti atkarpa, atitinkanti vieną kampo sekundę ($1'' = 1/3600^{\circ}$). Atstumas iki šios dangaus kūnų sistemos centro yra apie $R \approx 12{,}5$ kpc (kiloparsekų). (1 kpc$=3{,}09\cdot 10^{19}$ m.) Šviesos greitis $c=3{,}00\cdot 10^{8}$ m/s. Spręsdami šį uždavinį paklaidų neskaičiuokite.

a) Pažymėkite kampus $\theta_1(t)$ ir $\theta_2(t)$, kuriais kryžiuku pažymėto centro atžvilgiu matomi šie radijo spindulių šaltiniai. Čia indeksai 1 ir 2 žymi atitinkamai kairį ir dešinį šaltinius, o t yra jų stebėjimo laikas. Šaltinių kampiniai greičiai stebint iš Žemės lygūs ω_1 ir ω_2, o juos atitinkantys skersiniai greičiai gali būti pažymėti $v'_{1\perp}$ ir $v'_{2\perp}$.

Pagal 103 pav. nustatykite ω_1 ir ω_2 skaitines vertes ir pateikite jas išreikštas kampo milisekundėmis per dieną (''/d). Taip pat nustatykite $v'_{1\perp}$ ir $v'_{2\perp}$ skaitines vertes. (Kai kas čia gali jus ir nustebinti.)

b) Atsiradusią problemą pabandykite išspręsti panagrinėdami stebėjimą šviesos šaltinio, greičiu $\vec{v}$ judančio tiese, sudarančia kampą ϕ su kryptimi į tolimą stebėtoją O (104 pav.). Greitį galima pateikti $v=\beta c$ pavidalu. Stebėtojo matuojamas atstumas iki spinduliavimo šaltinio lygus R, o stebimas kampinis jo greitis yra ω. Statmena stebėjimo tiesei kryptimi registruojamas greitis yra $v'_{\perp}$. Išreikškite ω ir $v'_{\perp}$ per β, R ir ϕ.



104 pav.

c) Tarkite, kad du atsiskyrę ir vienas nuo kito tolyn judantys a) punkte aprašyti objektai juda priešingomis kryptimis vienodais greičiais $v=\beta c$. Pasinaudodami b) punkte gautais rezultatais, išreikškite β ir ϕ per kampinius greičius ω_1 ir ω_2 bei atstumą R. Čia ϕ yra kampas, aptartas b) punkte kairiajam objektui, žymimam indeksu 1. Išreikškite β ir ϕ žinomais dydžiais ir apskaičiuokite jų skaitines vertes pasinaudodami a) punkte gautais rezultatais.

d) Vieno šaltinio atveju, išnagrinėtu punkte b), nustatykite, kokiai sąlygai esant greitis statmena kryptimi $v'_{\perp}$ gali būti didesnis už šviesos greitį c. Šią sąlygą pateikite $\beta=f(\phi)$ pavidalu ir užrašykite funkcijos f analizinę išraišką. Grafiškai pavaizduokite plokštumos (β,ϕ) fizikinę prasmę turinčią sritį. Užštrichuokite tą srities dalį, kurioje $v'_{\perp}>c$.

e) Tęsdami b) punkte pradėtą vieno šaltinio nagrinėjimą, suraskite išraišką maksimaliai $v'_{\perp}$ vertei $(v'_{\perp})_{\max}$ apskaičiuoti, kai duota β vertė. Atkreipkite dėmesį, kad šis dydis neribotai didėja, kai $\beta \to 1$.

f) Įžangoje pateikta R vertė nėra labai tiksli, todėl mokslininkai ieško galimybių tiksliau ją išmatuoti. Viena iš idėjų yra tokia. Tarkime, galima išmatuoti dėl Doplerio efekto pakitusius judančių šaltinių spinduliuotės bangų ilgius λ_1 ir λ_2, o nejudančioje sistemoje abiejų šaltinių spinduliuotė yra vienoda ir jos bangos ilgis lygus λ_0. Pasinaudoję reliatyvistinio Doplerio efekto išraiška

$$\lambda = \lambda_0(1-\beta\cos\phi)(1-\beta^2)^{-1/2}$$

ir manydami, kad abu objektai juda tokiu pat greičiu v, galime nustatyti, kad ieškomasis dydis $\beta=vc$ gali būti išreikštas per λ_0, λ_1 ir λ_2 taip:

$$\beta = \sqrt{1-\frac{a\lambda_0^2}{(\lambda_1+\lambda_2)^2}}.$$

Nustatykite koeficiento a skaitinę vertę.

Taigi matuojant bangų ilgius galima įvertinti didelius atstumus.

XXX tarptautinė fizikos olimpiada, 1999 m. (Italija)

127. Spinduliuotės sugertis dujose. Vertikalus cilindrinis indas su idealiosiomis dviatomėmis dujomis uždarytas skaidriu stūmokliu, galinčiu slankioti be trinties. Pradžioje dujų temperatūra inde yra lygi aplinkos temperatūrai. Aplinkos slėgis p_0. Indo sienelių ir stūmoklio šilumos laidumas ir šiluminė talpa yra labai maži, todėl į šilumos nuostolius dėl šilumos mainų neatsižvelkite.

Per skaidrų stūmoklį į indą nukreipiama pastovia galia spinduliuojančio lazerio spinduliuotė, kuri visa sugeriama dujų inde ir virsta šiluma. Stūmoklis ima kilti aukštyn. Po tam tikro laiko lazeris išjungiamas ir išmatuojamas stūmoklio poslinkis.

1) Panaudodami žemiau pateiktus duomenis ir (jei reikia) žinomas fizikines konstantas, apskaičiuokite dujų temperatūrą ir slėgį joms sugėrus spinduliuotę.

2) Apskaičiuokite mechaninį darbą, dujų atliktą sugėrus spinduliuotę.

3) Apskaičiuokite visą dujų sugertą energiją.

4) Apskaičiuokite dujų sugeriamos lazerio spinduliuotės galią ir per laiko vienetą sugertų fotonų skaičių.

5) Apskaičiuokite spinduliuotės energijos virtimo pakelto stūmoklio potencine energija naudingumo koeficientą.

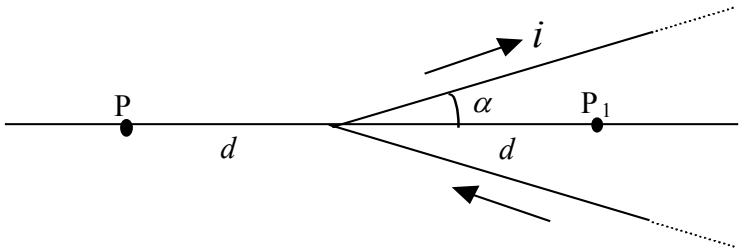
Toliau cilindras lėtai parverčiamas ant šono paguldant jį horizontaliai. Šilumos mainai tarp dujų ir aplinkos nevyksta.

6) Nustatykite, ar pakito dujų slėgis bei temperatūra. Jei pakito, tai kiek.

<u>*Duomenys*</u>: aplinkos temperatūra T_0=20,0 ^{o}C, vidinis cilindro skersmuo $2r$=100 mm, stūmoklio masė m=800 g, dujų kiekis inde, išreikštas moliais, n=0,100 mol, molinė savitoji dujų šiluma esant pastoviam tūriui c_V=20,8 J/(mol·K), lazerio spinduliuojamos šviesos bangos ilgis λ=514 nm, spinduliavimo trukmė Δt=10,0 s, stūmoklio poslinkis paveikus spinduliuote dujas Δs=30,0 mm.

128. „V" formos laido magnetinis laukas. Vienas iš pirmųjų sėkmingai Ampero paaiškintų magnetinių reiškinių yra laidų, kuriais teka srovė, kuriamo magnetinio lauko skaičiavimas ir jo palyginimas su kitomis prielaidomis, kurias pirmieji padarė Bio ir Savaras.

Ypač įdomus yra atvejis, kai labai ilgas plonas laidas, kuriuo teka nuolatinė i stiprio srovė, sulenkiamas „V" forma taip, kad viršūnės kampas būtų 2α (107 pav.). Pagal Ampero skaičiavimus magnetinės indukcijos B vertė taške P, esančiame „V" formos laido simetrijos ašyje atstumu d nuo viršūnės, yra proporcinga tg(α/2). Ampero rezultatas vėliau buvo panaudotas Maksvelo elektromagnetinėje teorijoje ir šiuo metu yra visuotinai priimtas.



107 pav.

Pasinaudodami šiuolaikiniu elektromagnetizmo supratimu:

1) Raskite magnetinės indukcijos vektoriaus $\boldsymbol{B}$ kryptį taške P.

2) Žinodami, kad B yra proporcingas tg$(\alpha/2)$, raskite proporcingumo koeficientą k lygybėje $|B(\mathrm{P})| = k\cdot\mathrm{tg}(\alpha/2)$.

3) Apskaičiuokite magnetinę indukciją B taške P_1, simetriškame viršūnės atžvilgiu taškui P, t.y. esančiame kampo simetrijos ašyje tuo pačiu atstumu d, bet viduje kampo „V".

4) Norėdami išmatuoti magnetinę indukciją, taške P padedame labai mažą magnetinę rodyklę, kurios inercijos momentas I, o magnetinis dipolinis momentas p_m. Ji svyruoja plokštumoje, kurioje yra vektorius $\boldsymbol{B}$. Raskite mažų svyravimų periodo priklausomybę nuo B.

Nagrinėdami šį uždavinį Bio ir Savaras padarė prielaidą, kad taške P magnetinė indukcija turėtų būti lygi $B(P)=i\mu_o\alpha/\pi^2 d$. Čia μ_o – magnetinė konstanta. Jie bandė eksperimentiškai patikrinti, kuri iš dviejų interpretacijų (Ampero ar Bio ir Savaro), yra teisinga matuodami magnetinės rodyklės svyravimų periodo priklausomybę nuo kampo α. Tačiau kai kurioms α vertėms skirtumas buvo per mažas, kad jį galima būtų lengvai išmatuoti.

5) Tarkime, kad norėdami eksperimentiškai pastebėti šių dviejų prielaidų skirtumus magnetinės adatos svyravimų periodui T taške P, mes privalome turėti mažiausiai 10% skirtumą, t. y. $T_1>1{,}10T_2$. (Čia T_1 atitinka Ampero prielaidą, o T_2 – Bio ir Savaro). Raskite, maždaug kokiose ribose reikia parinkti kampą α, kad galima būtų nustatyti, kuri prielaida yra teisinga.

<u>*Nurodymas*</u>. Jūsų skaičiavimuose gali būti naudinga ši trigonometrijos formulė:

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

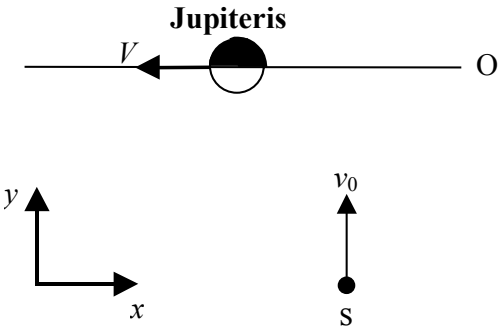
129. Kosminis zondas į Jupiterį. Šioje užduotyje nagrinėjamas dažnai naudojamas būdas pagreitinti kosminius zondus nukreipiant juos tam tikra kryptimi. Skriedamas palei planetą kosminis zondas gali žymiai padidinti greitį ir pakeisti judėjimo kryptį planetos orbitinio judėjimo energijos sąskaita. Čia nagrinėjamas kosminis zondas, pralekiantis netoli Jupiterio.

Jupiteris skrieja apie Saulę elipse, kurią galime apytikriai laikyti spindulio R apskritimu.

1) Raskite Jupiterio judėjimo greitį V jam skriejant orbita apie Saulę.

2) Kai kosminis zondas yra tiesės atkarpoje tarp Saulės ir Jupiterio, raskite atstumą nuo Jupiterio, kuriam esant Saulės ir Jupiterio gravitacinės traukos jėgos yra lygios.

m=825 kg masės kosminis zondas skrieja palei Jupiterį. Tariame, kad kosminio zondo trajektorija yra Jupiterio orbitos plokštumoje. Nagrinėkime tik tą erdvės sritį, kurioje Jupiterio trauka viršija visas kitas gravitacines jėgas. Atskaitos sistemoje, susietoje su Saulės masės centru, pradinis kosminio zondo greitis yra $v_0=1{,}00\cdot10^4$ m/s (išilgai teigiamos y ašies krypties), o Jupiterio greitis nukreiptas neigiama x ašies kryptimi (žr. 108 pav., kuriame pateiktas vaizdas Saulės masės centro atskaitos sistemoje. Čia O žymi Jupiterio orbitą, o s yra kosminis zondas). „Pradinis greitis" reiškia kosminio zondo greitį tarpplanetinėje erdvėje pakankamai toli nuo Jupiterio, bet srityje, kur Saulės trauka yra nereikšminga lyginant su Jupiterio trauka. Tarkime, kad nagrinėjamo reiškinio trukmė maža, todėl galima neatsižvelgti į Jupiterio judėjimo apie Saulę krypties pokytį. Taip pat tarkime,



108 pav.

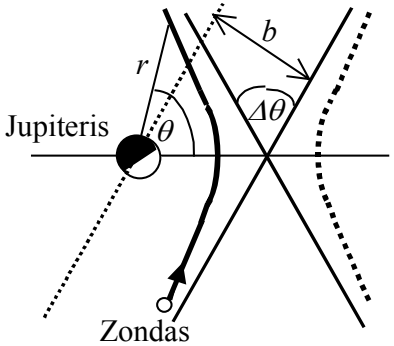
kad kosminis zondas praskrieja už Jupiterio, t.y., kosminio zondo x koordinatė yra didesnė negu Jupiterio tuo metu, kai y koordinatės yra vienodos.

3) Raskite kosminio zondo judėjimo kryptį (kampą φ tarp tos krypties ir x ašies) ir jo greitį v' atskaitos sistemoje, susietoje su Jupiteriu, kai kosminis zondas yra toli nuo Jupiterio.

Kosminio zondo trajektorija atskaitos sistemoje, susietoje su Jupiteriu yra hiperbolė. Jos lygtis polinėje koordinačių sistemoje yra

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{v'^2 b^2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2Ev'^2 b^2}{G^2 M^2 m}}\cos\theta\right). \qquad (1)$$

Čia b yra atstumas tarp vienos iš asimptočių ir Jupiterio (vadinamasis *smūgio parametras*), E – kosminio zondo pilnutinė mechaninė energija atskaitos sistemoje, susietoje su Jupiteriu, G – gravitacijos konstanta, M – Jupiterio masė, r ir θ – polinės koordinatės (radialinis atstumas ir polinis kampas).



109 pav.

109 pav. pateiktos dvi hiperbolės šakos, aprašomos (1) lygtimi, taip pat parodytos asimptotės ir polinės koordinatės.

4) Tardami, kad potencinė energija esant dideliam atstumui yra lygi nuliui, raskite kosminio zondo pilnutinę mechaninę energiją E atskaitos sistemoje, susietoje su Jupiteriu, kai kosminis zondas juda beveik pastoviu greičiu esant silpnoms gravitacinėms jėgoms.

5) Panaudodami kosminio zondo trajektoriją aprašančią lygtį (1), raskite nuokrypio kampą $\Delta\theta$ atskaitos sistemoje, susietoje su Jupiteriu (žr. 109 pav.) ir išreikškite jį per pradinį greitį v' ir smūgio parametrą b.

6) Tardami, kad kosminis zondas negali praskrieti pro Jupiterio paviršių atstumu, mažesniu negu du Jupiterio spinduliai, raskite minimalų galimą smūgio parametrą ir maksimalų nuokrypio kampą.

7) Gaukite lygtį, siejančią galutinį kosminio zondo greitį v'' susietoje su Saule atskaitos sistemoje tiktai su Jupiterio greičiu V, pradiniu kosminio zondo greičiu v_0 ir nuokrypio kampu $\Delta\theta$.

8) Panaudodami anksčiau gautus rezultatus, apskaičiuokite susietoje su Saule atskaitos sistemoje greičio v'' skaitinę vertę, kai nuokrypio kampas yra didžiausias.

<u>*Nurodymas.*</u> Gali būti naudingos tokios trigonometrinės formulės:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

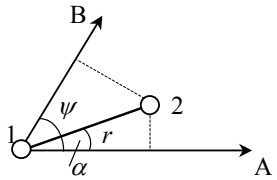
TEORINIŲ UŽDUOČIŲ SPRENDIMAI

XVI tarptautinė fizikos olimpiada, 1985 m. (Jugoslavija)

69. 69.1 pav. parodyta antenų 1 ir 2 (atstumas tarp jų r) padėtys ir kryptys į miestus A ir B (kampas tarp jų ψ). Pilnutinis fazių postūmis tarp abiejose antenose vykstančių virpesių kažkokiame erdvės taške kryptimis A ir B yra lygus:

$$\Delta(\mathrm{A}) = 2\pi\frac{r\cos\alpha}{\lambda} + \Delta\varphi\,; \qquad (1)$$

$$\Delta(\mathrm{B}) = 2\pi\frac{r\cos(\psi-\alpha)}{\lambda} + \Delta\varphi. \qquad (2)$$



69.1 pav.

Čia λ – siųstuvo bangos ilgis; $\Delta\varphi$ – fazių skirtumas tarp antenose vykstančių virpesių; α – kampas tarp plokštumos, kurioje yra antenos, ir linkmės į miestą A.

Užrašysime intensyvumo maksimumo sąlygą mieste A ir minimumo – mieste B:

$$\Delta(\mathrm{A}) = (2n+1)\,\pi, \qquad (3)$$

$$\Delta(\mathrm{B}) = 2k\pi. \qquad (4)$$

Čia n ir k – sveikieji skaičiai. Iš išraiškų (1) – (4) gaunama:

$$\Delta(\mathrm{B}) - \Delta(\mathrm{A}) = 2\pi\frac{r}{\lambda}\left[\cos(\psi-\alpha) - \cos\alpha\right] = 2\pi(k-n).$$

Iš čia

$$r = \frac{\lambda}{4\sin(\psi/2)}\,\frac{2(k-n)}{\sin(\alpha-\psi/2)}\,.$$

Atstumas r tarp antenų bus mažiausias, jei $k = n$ ir $\alpha - \psi/2 = -\pi/2$. Šiuo atveju

$$r_{\min} = \frac{\lambda}{4\sin(\psi/2)}\,; \qquad (5)$$

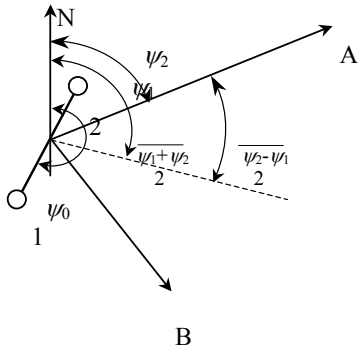
$$\alpha = \frac{\psi-\pi}{2}\,, \qquad (6)$$

t. y. statmuo į plokštumą, kurioje yra antenos, yra kampo ψ pusiaukampinė. Iš išraiškų (1), (3), (5) ir (6) gaunama:

$$\Delta\varphi = \pi/2.$$

Jei ženklas $\Delta\varphi$ pakinta iš $\pi/2$ į $-\pi/2$, gaunamas priešingas reiškinys: didžiausias spinduliuotės intensyvumas bus kryptimi A, o mažiausias – kryptimi B.

69.2 pav. parodyta antenų padėtys, kryptis į šiaurę N, o taip pat kryptys į miestus A ir B. Matome, kad



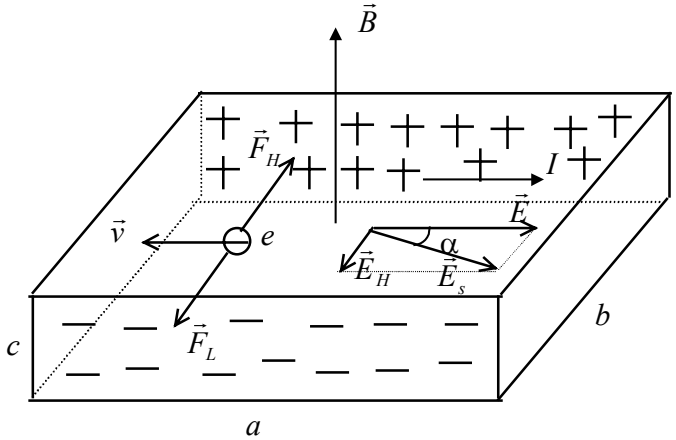
69.2 pav.

$$\psi = \psi_2 - \psi_1 = 85^\circ;$$

$$r_{\min} = \frac{\lambda}{4\sin(\psi/2)} = \frac{c}{4\nu\sin(\psi/2)} \approx 4{,}1\ \mathrm{m}\,.$$

$$\psi_0 = 90^\circ + \frac{\psi_1+\psi_2}{2} = 204{,}5^\circ\,.$$

70. a) Magnetiniame lauke v greičiu judančius elektronus veikia Lorenco jėga $F_L=evB$ (70.1 pav.). Jos veikiami elektronai nukrypsta b briaunos kryptimi, todėl b briaunai statmenose



70.1 pav.

strypelio sienose atsiranda paviršiniai krūviai. Jie sukuria b briaunos kryptimi nukreiptą elektrinį lauką E_H. Potencialų skirtumas tarp tų b briaunai statmenų sienelių $U_H=bE_H$ vadinamas Holo įtampa. Šis laukas veikia elektronus priešinga Lorenco jėgai kryptimi $F_H=eE_H$ jėga. Kai tenkinama lygybė $F_L=F_H$, paviršinių krūvių tankis (taip pat ir E_H, U_H) nustoja didėti. Taigi esant pusiausvyrai

$$evB=eE_H,$$

$$E_H=vB.$$

Srovės stipris strypelyje $I=envbc=enuEbc$. Iš čia nustatome, kad

$$v=\frac{I}{enbc},$$

$$E_H=\frac{IB}{enbc},$$

$$E=\frac{I}{enubc}.$$

Elektrinis laukas strypelyje

$$\vec{E}_s=\vec{E}+\vec{E}_H.$$

Jo modulis

$$E_s=\sqrt{E^2+E_H^2}=\frac{I}{enbc}\sqrt{\frac{1}{u^2}+B^2}\approx 4{,}1\ \text{V/m}.$$

Kampas tarp $\vec{E}_s$ ir srovės tekėjimo krypties

$$\alpha=\operatorname{arctg}\left(\frac{E_H}{E}\right)=\operatorname{arctg}(Bu)\approx 38^o.$$

b) Potencialų skirtumas tarp strypelio priešingų sienų briaunos b kryptimi (Holo įtampa)

$$U_H=bE_H=\frac{IB}{enc}=25\ \text{mV}.$$

c) Potencialų skirtumas U_H kinta taip:

$$U_H=\frac{I_0B_0}{enc}\sin\omega t\sin(\omega t+\varphi)=\frac{I_0B_0}{enc}\sin\omega t(\sin\omega t\cos\varphi+$$

$$+\cos\omega t\sin\varphi)=\frac{I_0B_0}{enc}(\sin^2\omega t\cos\varphi+\sin\omega t\cos\omega t\sin\varphi).$$

Pasinaudodami žinomomis trigonometrijos formulėmis

$$\sin^2\omega t=\frac{1-\cos 2\omega t}{2}$$

ir

$$\sin 2\omega t=2\sin\omega t\cos\omega t,$$

gauname:

$$\sin^2\omega t\cos\varphi+\sin\omega t\cos\omega t\sin\varphi=\frac{1-\cos 2\omega t}{2}\cos\varphi+$$

$$\frac{1}{2}\sin 2\omega t\sin\varphi=\frac{1}{2}\left[\cos\varphi-(\cos 2\omega t\cos\varphi-\sin 2\omega t\sin\varphi)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\cos\varphi-\cos(2\omega t+\varphi)\right].$$

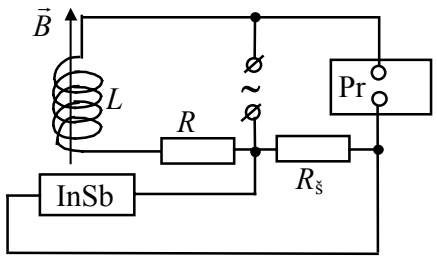
Taigi

$$U_{\text{H}} = \frac{I_0 B_0}{2enc}\cos\varphi - \frac{I_0 B_0}{2enc}\cos(2\omega t + \varphi).$$

Matome, kad nuolatinę dedamąją išreiškia pirmasis šios formulės dėmuo:

$$U_{\text{H}0} = \frac{I_0 B_0}{2enc}\cos\varphi.$$

d) Prietaiso Pr naudojama galia $P=I_{\text{ef}}U_{\text{ef}}\cos\varphi_1$. Čia I_{ef} ir U_{ef} – srovės stiprio ir įtampos efektinės vertės, φ_1 – fazių skirtumas tarp srovės stiprio ir įtampos. Holo įtampos nuolatinė dedamoji $U_{\text{H}0}\sim I_0B_0\cos\varphi$. Čia φ – fazių skirtumas tarp srovės stiprio strypelyje ir magnetinio srauto tankio. Kad būtų $P\sim U_{\text{H}0}$, reikia, kad būtų $I_0\sim I_{\text{ef}}$, $B_0\sim U_{\text{ef}}$ ir kad nebūtų fazių skirtumo tarp B_0 ir U_{ef}. Šiuos reikalavimus galima patenkinti sujungus grandinę pagal 70.2 pav. schemą ir InSb strypelį įtaisius ritės magnetiniame lauke.



70.2 pav.

Jei $R\gg\omega L$, srovės stipris ritėje, taigi ir magnetinio srauto tankis, bus proporcingas prietaiso įtampai, o fazių skirtumas tarp šių dydžių, lygus arctg($\omega L/R$), bus mažas. Srovės stipris lygiagrečiai su šunto varža $R_š$ sujungtame InSb strypelyje bus proporcingas srovės stipriui prietaise, o jų fazės sutaps, t. y. $\varphi_1=\varphi$. Taigi InSb strypelio Holo įtampos nuolatinė dedamoji $U_{\text{H}0}\sim I_0B_0\cos\varphi\sim I_{\text{ef}}U_{\text{ef}}\cos\varphi=P$.

71. Tegul kosminio laivo masė m, o startuoja jis iš Žemės orbitos. Tada prieš startą kosminio laivo energija Saulės atžvilgiu

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM_S}{R}, \qquad (1)$$

čia M_S – Saulės masė, R – Žemės atstumas iki Saulės. Kad kosminis laivas galėtų išskristi iš Saulės sistemos, turi galioti sąryšis

$$E\geq 0. \qquad (2)$$

Prieš startą kosminio laivo orbitinis greitis yra toks pat, kaip Žemės. Iš antrojo Niutono dėsnio

$$G\frac{M_E M_S}{R^2} = M_E\frac{v_0^2}{R}$$

gauname, kad Žemės orbitinis greitis

$$v_0 = \sqrt{G\frac{M_S}{R}}. \qquad (3)$$

Dabar iš (2) ir (3) formulių plaukia

$$v \geq \sqrt{2}v_0. \qquad (4)$$

Tegul starto iš Žemės orbitos metu kosminio laivo greitis pakinta dydžiu $\vec{v}_k$ ir pasidaro

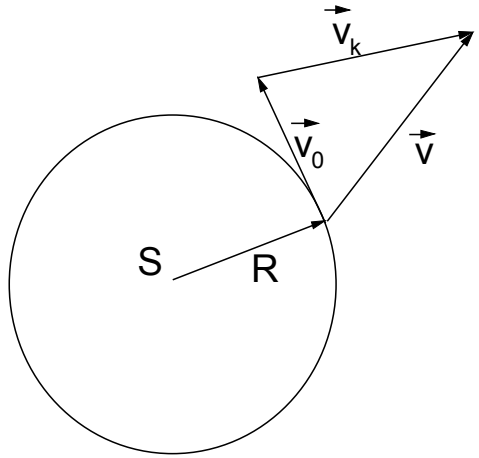
$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_k. \qquad (5)$$

Iš 71.1 pav. brėžinio matyti, kad $v \leq v_0 + v_k$ arba $v_k \geq v - v_0$. Atsižvelgę į (4) formulę gauname, kad minimali greičio pokyčio vertė bus

$$v_k = (\sqrt{2}-1)v_0 \approx 12{,}4\ \text{m/s}, \qquad (6)$$

kai kampo tarp vektorių $\vec{v}_0$ ir $\vec{v}$ vertė bus lygus nuliui.

Tegul kosminio laivo greitis padidėja tiek, kad jo orbita kerta Marso orbitą, kaip schematiškai parodyta 71.2 pav.



71.1 pav.

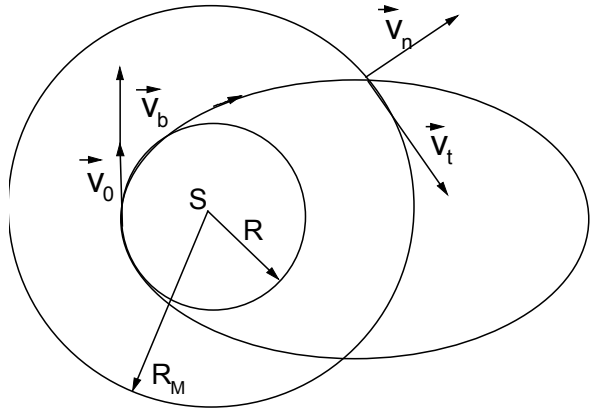
Tegul Marso orbitos kirtimo taške kosminio laivo greičio tangentinė dedamoji yra $\vec{v}_t$, o normalinė orbitai dedamoji $\vec{v}_n$. Iš judesio kiekio momento ir energijos tvermės dėsnių plaukia sąryšiai

$$m(v_0 + v_b)R = mv_t R_M,$$

$$\frac{1}{2}m(v_0 + v_b)^2 - G\frac{mM_S}{R} = \frac{1}{2}m(v_t^2 + v_n^2) - G\frac{mM_S}{R_M},$$

čia R_M – Marso orbitos spindulys. Išsprendę šias lygtis v_t ir v_n atžvilgiu gauname

$$v_t = (v_0 + v_b)\frac{R}{R_M}, \qquad (7)$$



71.2 pav.

$$v_n = \left\{(v_0 + v_b)^2\left(1 - \frac{R^2}{R_M^2}\right) - 2v_0^2\left(1 - \frac{R}{R_M}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (8)$$

Kadangi gravitacinis laukas yra potencialinis, Marso atžvilgiu kosminis laivas tiek priartėdamas, tiek nutoldamas turės tą patį greitį, pakis tik greičio kryptis. Kad praskridęs pro Marsą kosminis laivas galėtų išskristi iš Saulės sistemos, turi būti patenkintas (6) sąryšis, kur vietoje Žemės orbitinio greičio v_0 bus Marso orbitinis greitis v_M:

$$v_k' = (\sqrt{2} - 1)v_M = (\sqrt{2} - 1)v_0\sqrt{\frac{R}{R_M}}. \qquad (9)$$

Kosminio laivo greitis Marso atžvilgiu

$$v_k' = \sqrt{v_n^2 + (v_t - v_M)^2}. \qquad (10)$$

Sulyginę (9) ir (10) lygčių dešiniąsias puses ir pasinaudoję (7) ir (8) formulėmis apskaičiuojame

$$v_0 + v_b = v_0\left\{\left(\frac{R}{R_M}\right)^{\frac{3}{2}} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{R_M}\right)^3 + 2 - 2\sqrt{2}\frac{R}{R_M}}\right\}. \quad (11)$$

Mechanikoje yra galimos trajektorijos, kai kūnas juda į priešingą pusę. Tuomet kosminis aparatas būtų stabdomas. Mus domina atvejis, kai kosminis laivas yra greitinamas. Todėl (11) formulėje imame viršutinį ženklą ir apskaičiuojame v_b:

$$v_b = v_0\left\{\left(\frac{R}{R_M}\right)^{\frac{3}{2}} + \sqrt{\left(\frac{R}{R_M}\right)^3 + 2 - 2\sqrt{2}\frac{R}{R_M}} - 1\right\}. \quad (12)$$

Įstatę skaitines dydžių vertes gauname

$$v_b \approx 0{,}185 v_0 \approx 5{,}5 \text{ km/s}. \quad (13)$$

Santykinė sutaupyta energija

$$k = \frac{v_k^2 - v_b^2}{v_k^2} \approx 0{,}8 \approx 80\,\%. \quad (14)$$

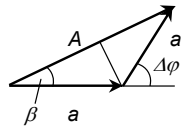
Skrendant pro Marsą kosminio laivo energija Saulės atžvilgiu pakinta. Energijos tvermės dėsnis lieka galioti, nes šiuo atveju pakinta ir Marso energija.

XVII tarptautinė fizikos olimpiada, 1986 m. (Didžioji Britanija)

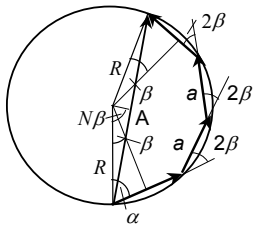
74. 1. Eigos skirtumas tarp dviejų bangų, sklindančių iš plyšių L ir M, yra lygus $d\sin\theta$ ir fazių skirtumas $\Delta\varphi = (2\pi d\sin\theta)/\lambda$. Sudedant virpesius, gaunama:

$$y = a\cos(2\pi\nu t - 2\pi x/\lambda) + a\cos(2\pi\nu t - 2\pi x/\lambda + \Delta\varphi) =$$
$$= 2a\cos(\Delta\varphi/2)\cos(2\pi\nu t - 2\pi x/\lambda + \Delta\varphi/2).$$

Pažymėję $\Delta\varphi/2 = \beta$, atstojamoji amplitudė $A = 2a\cos\beta$. Vektorinė diagrama pateikta 74.1 pav.



74.1 pav.



74.2 pav.

2. Virpesius iš N plyšių sudėsime pasinaudodami vektorine diagrama (74.2 pav.). Visos gautojo daugiakampio kraštinės lygios a, kampai tarp kraštinių lygūs $(\pi - 2\beta)$. Apie daugiakampį galima nubrėžti spindulio R apskritimą. Nesunkiai galima įrodyti, kad

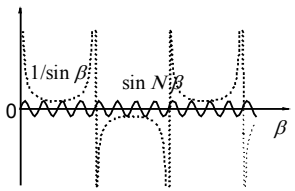
$$R = a/(2\sin\beta) \quad \text{ir} \quad A = a(\sin N\beta/\sin\beta).$$

Fazių skirtumas tarp pradinės ir atstojamosios bangų nusakomas kampu

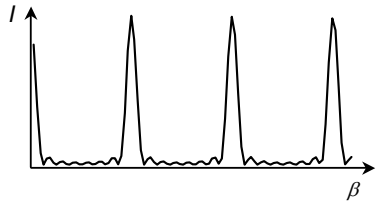
$$\alpha = (\pi/2 - \beta) - (\pi/2 - N\beta) = (N - 1)\beta.$$

3. Nubrėžkime funkcijų $\sin N\beta$ ir $1/\sin\beta$ grafikus viename mastelyje, kai $N = 8$ (74.3 pav.). Kadangi bangos intensyvumas proporcingas amplitudės kvadratui, nubrėžkime funkcijos $I = I_0 \sin^2 N\beta/\sin^2\beta$ (čia I_0 – krintančiosios šviesos intensyvumas) grafiką, kai $N = 8$ (74.4 pav.).

4. Pagrindiniuose maksimumuose vektorinė diagrama yra tiesė ir $2\beta = 2\pi n$ (čia $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Atstojamosios bangos amplitudė lygi Na, o intensyvumas $I = I_0 N^2$.



74.3 pav.



74.4 pav.

5. Pagrindinių maksimumų sąlyga:

$\beta = n\pi$ arba $(\pi d \sin\theta)/\lambda = n\pi$.

Čia $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Kadangi $|\sin\theta| \le 1$, tai pagrindinių maksimumų skaičius neviršija $2d/\lambda + 1$.

6. Diferencijuojant pagrindinių maksimumų sąlygą pagal θ, gaunama:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\Theta} = \frac{d\cos\Theta}{n}.$$

Kai $\lambda >> \Delta\lambda$, tai $\Delta\lambda = (d\cos\theta\,\Delta\theta)/n$,

$$\Delta\Theta = n\Delta\lambda/(d\sqrt{1-(n\lambda/d)^2}\,.$$

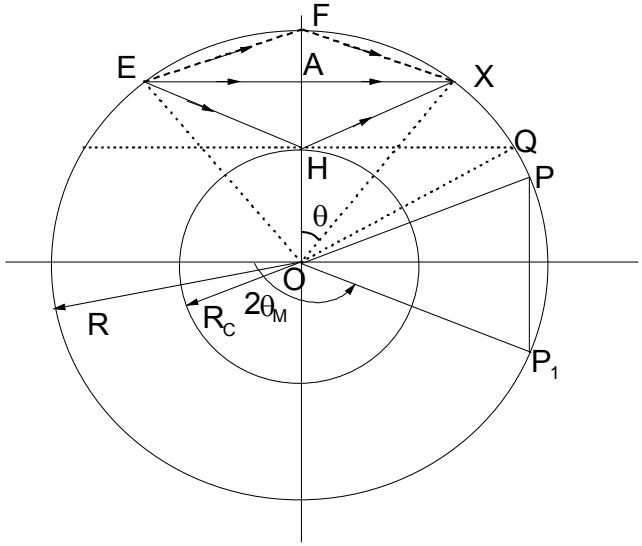
Įstačius $\lambda = 589{,}0$ nm; $\Delta\lambda = 0{,}6$ nm; $n = 2$ ir $d = 1{,}2\cdot10^{-8}$ m, gaunama

$$\Delta\Theta = 5{,}2\cdot10^{-7}\ \text{rad} = 0{,}3^{\circ}.$$

75. Šiame uždavinyje akustinėms bangoms taikomi geometrinės optikos principai, nes spinduliai R ir R_c yra dideli. Kai banga iš taško E iki taško X gali sklisti tiesiai ir tik apvalkale, kaip tai parodyta 75.1 pav., tada atkarpą EX ji nueina per laiko tarpą

$$\tau = \frac{2R\sin\theta}{v}, \qquad (1)$$

čia v – bangos greitis apvalkale. Kampas θ nurodo stebėtojo



75.1 pav.

padėtį šaltinio atžvilgiu. Laiko intervalas tarp p ir s bangų, ėjusių šiuo keliu, bus

$$\tau_1 = \frac{2R\sin\theta}{v_s} - \frac{2R\sin\theta}{v_p},$$

kur τ_1 – s bangos vėlavimo laikas, lyginant su p banga. Iš čia apskaičiuojame taško X padėtį nusakantį kampą θ

$$\theta = \arcsin\left\{\frac{\tau_1 v_p v_s}{2R(v_p - v_s)}\right\} = 8{,}92^{\circ} \approx 8^{\circ}55'. \qquad (2)$$

Tašką X bangos gali pasiekti tiesiai, kol $\theta < \angle HOQ = \theta_0$:

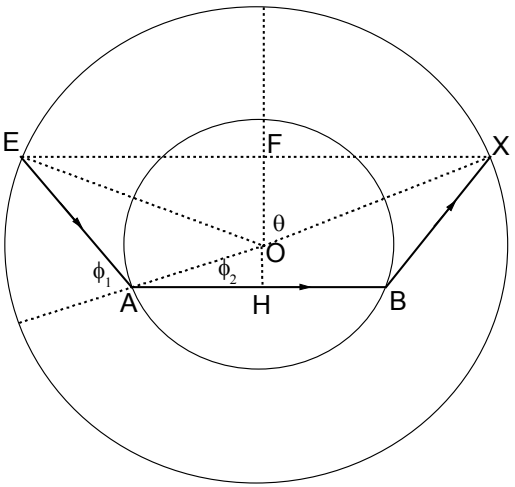
$$\theta < \theta_0,$$
$$\theta_0 = \arccos\frac{R_c}{R} = 57^\circ. \qquad (3)$$

Bangos tašką X gali pasiekti atsispindėjusios nuo branduolio (kelias EHX) ir atsispindėjusios nuo Žemės paviršiaus (kelias EFX). Bangų nueitas kelias būtų

$$s_{EHX} = 2\sqrt{R^2 + R_c^2 - 2R_c R\cos\theta},$$
$$s_{EFX} = 4R\sin\frac{\theta}{2}. \qquad (4)$$

Apskaičiavę s bangos vėlavimą gauname:

$$\tau_{EHX} = 7\ \text{min}\,36{,}65\ s,$$
$$\tau_{EFX} = 2\ \text{min}\,11{,}4\ s. \qquad (5)$$

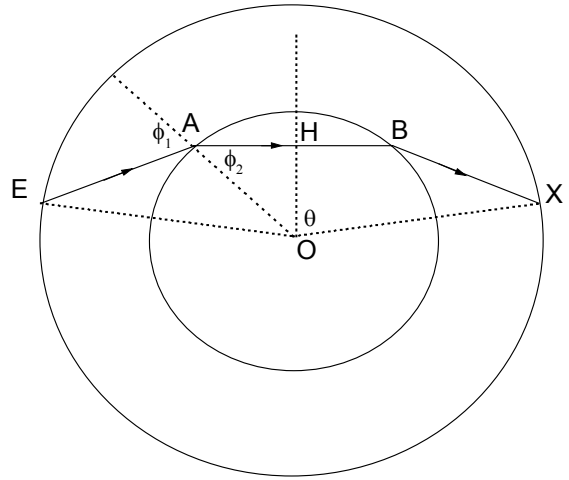


75.2 pav.

Šis rezultatas rodo, kad antrą seismografo įrašų grupę galima traktuoti kaip nuo branduolio atsispindėjusių bangų poveikį. Nuo Žemės paviršiaus atsispindėjęs signalas ateina beveik vienu metu su tiesiai ateinančiu signalu (*s* bangai laiko skirtumas 1 sekundė) ir jį atskirti sudėtinga, kadangi realūs bangų šaltiniai nėra taškiniai.

Pagal mūsų modelį skersinės *s* bangos negali būti stebimos srityje $\theta > \theta_0$. Išilginės *p* bangos į sritį $\theta > \theta_0$ gali patekti dviem keliais. Tai parodyta 75.2 pav. ir 75.3 pav. Iš garso bangų lūžimo dėsnio

$$\frac{\sin\phi_1}{\sin\phi_2} = \frac{v_p}{v_{cp}} \qquad (6)$$



75.3 pav.

ir sinusų teoremos trikampiui ΔEOA (75.2 pav) plaukia lygybė

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \phi_1 + \arcsin\left(\frac{v_{cp}\sin\phi_1}{v_p}\right) + \arcsin\left(\frac{R_c\sin\phi_1}{R}\right), \qquad (7)$$

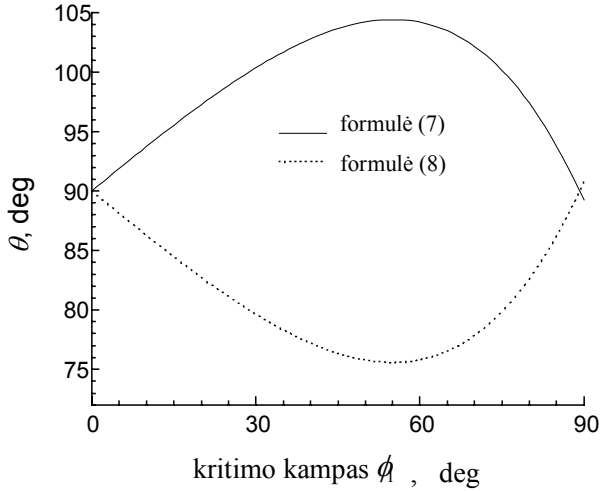
o pagal 75.3 pav. gauname lygybę

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \phi_1 - \arcsin\left(\frac{v_{cp}\sin\phi_1}{v_p}\right) - \arcsin\left(\frac{R_c\sin\phi_1}{R}\right). \qquad (8)$$

Tai ir yra 2 punkte reikalaujami sąryšiai. $\theta = \theta(\phi_1)$ grafikai pateikti 75.4 pav. Kreivių ekstremumas yra taške $\phi_1 = 55^\circ$, ekstremalios $\theta = \theta(\phi_1)$ vertės yra $\theta_{\min} = 75{,}58^{\mathrm{o}}$ ir $\theta_{\max} = 104{,}42^{\mathrm{o}}$.

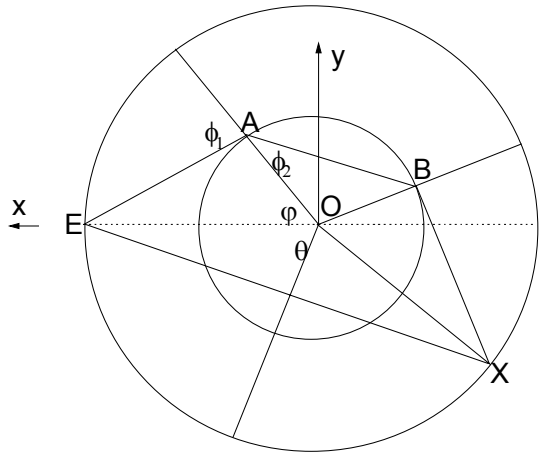
75.4 pav. grafikai rodo, kad du kartus apvalkalo ir branduolio riboje lūžusi banga gali ateiti tik į sritį, kurią riboja taškai P ir P_1

$$151{,}16^\circ < 2\theta < 208{,}84^\circ. \qquad (9)$$



75.4 pav.

Į sritį tarp taškų Q ir P dukart lūžusi banga patekti negali. Tai sritis, kur žemės drebėjimas jaučiamas silpnai, nes ten gali



75.5 pav.

patekti tik atsispindėjusios nuo Žemės paviršiaus arba nuo apvalkalo ir branduolio paviršiaus atsispindėjusios ir dukart lūžusios bangos.

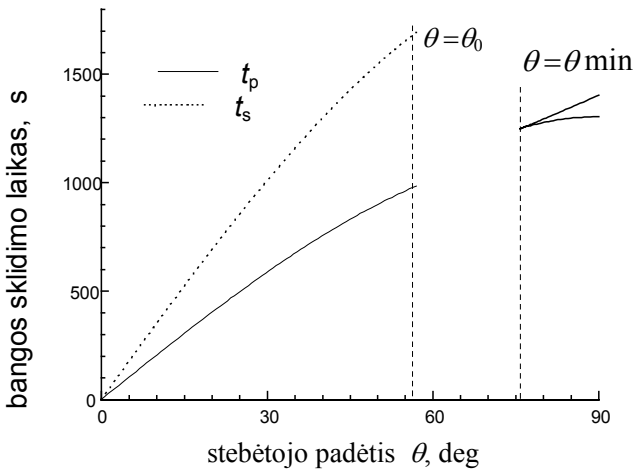
Kad nubraižytume p ir s bangų sklidimo tarp taškų E ir X trukmės grafiką, iš pradžių išreikšime θ per taško, kuriame bangos krenta į branduolio ir apvalkalo skiriamąjį paviršių, polinę koordinatę φ. Kaip matyti iš 75.5 pav., kai $-\theta_0 \le \varphi \le \theta_0$,

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi + \arcsin\left\{\frac{v_{cp}}{v_p}\sin\left(\varphi + \operatorname{arctg}\frac{R_c\sin\varphi}{R - R_c\cos\varphi}\right)\right\}. \qquad (10)$$

Tada p bangai kelio trukmė

$$t_p = \frac{2R_c}{v_{cp}}\cos\left\{\arcsin\left\{\frac{v_{cp}}{v_p}\sin\left(\varphi + \operatorname{arctg}\frac{R_c\sin\varphi}{R - R_c\cos\varphi}\right)\right\}\right\} + \frac{2}{v_p}\sqrt{R^2 + R_c^2 - 2R_cR\cos\varphi}. \qquad (11)$$

(10) ir (11) lygtys nėra simetriškos kampo φ ženklo pakeitimo atžvilgiu, tad funkcija $t = t(\theta)$ ne visur vienareikšmė. Kai bangos tašką X gali pasiekti tiesiai,



75.6 pav.

$$t_p = \frac{2R}{v_p}\sin\theta,$$
$$t_s = \frac{2R}{v_s}\sin\theta. \qquad (12)$$

76. Dalelės padėtį nusakysime apskritimo lanko ilgiu, skaičiuojamu nuo laisvai pasirinkto taško. Tegul tas taškas bus pirmos dalelės pusiausvyros padėtis. Dalelių pusiausvyros padėtis pažymime s_{10}, s_{20} ir s_{30}. Kai dalelių yra N ir jos yra ant spindulio R apskritimo, j-osios dalelės pusiausvyros padėtis bus

$$s_{j0} = (j-1)\frac{2\pi R}{N}. \qquad (1)$$

Paslinkus daleles jos užims padėtis s_j, $j = 1, 2, \ldots, N$. Remdamiesi Huko dėsniu trims dalelėms gauname tokią diferencialinių lygčių, nusakančių antrąjį Niutono dėsnį, sistemą:

$$\begin{aligned}
&m_1\ddot{z}_1 = k_1(z_2 - z_1 - l_1),\\
&m_2\ddot{z}_2 = -k_1(z_2 - z_1 - l_1) + k_2(z_3 - z_2 - l_2),\\
&m_3\ddot{z}_3 = -k_2(z_3 - z_2 - l_2) + k_3(z_4 - z_3 - l_3),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&m_j\ddot{z}_j = -k_{j-1}(z_j - z_{j-1} - l_{j-1}) + k_j(z_{j+1} - z_j - l_j),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&m_N\ddot{z}_N = -k_{N-1}(z_N - z_{N-1} - l_{N-1}).
\end{aligned} \qquad (2)$$

Čia k_j pažymėtas spyruoklės tarp j-osios ir $(j+1)$-osios dalelių. Pažymėję $s_j - s_{j0} = u_j$ gauname

$$\begin{aligned}
m_1\ddot{u}_1 &= k_1(u_2 - u_1) + k_3(u_3 - u_1),\\
m_2\ddot{u}_2 &= k_2(u_3 - u_2) + k_1(u_1 - u_2),\\
m_3\ddot{u}_3 &= k_3(u_1 - u_3) + k_1(u_2 - u_3).
\end{aligned} \qquad (3)$$

Kai $k_1 = k_2 = k_3 = k$ ir $m_1 = m_2 = m_3 = m$ diferencialinių lygčių sistemos (3) sprendimas algebriškai paprastesnis, tačiau tada tarp sistemos tikrinių verčių yra kartotinių ir uždavinio sprendimui reikia platesnių matematikos žinių. Šią problemą nesudėtinga apeiti, paėmus $m_2 \neq m$, $k_3 \neq k$ ir taip sumažinant uždavinio tikrinių verčių kartotinumą. Tada sistema (3) turi bendrąjį sprendinį

$$u_1(t) = A_1 + A_2 t - A_3 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_4 \cos(\omega_2 t + \phi_2),$$
$$u_2(t) = A_1 + A_2 t - 2A_4 \cos(\omega_2 t + \phi_2), \qquad (4)$$
$$u_3(t) = A_1 + A_2 t + A_3 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_4 \cos(\omega_2 t + \phi_2).$$

Čia pažymėta:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m} + \frac{2k_3}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m} + \frac{2k}{m_2}}, \qquad (5)$$

o $A_1, A_2, A_3, A_4, \phi_1, \phi_2$ - laisvos integravimo konstantos, randamos iš pradinių sąlygų. Išreikštu pavidalu sprendinyje nebepasirodo trečioji ciklinio dažnio vertė $\omega_3 = 0$. Jos generuoto dalinio sprendinio yra pirmi du dėmenys (4) lygčių dešinėje pusėje. Ši tikrinė vertė aprašo sistemos masės centro tolygų slenkamąjį judėjimą s koordinatės (tai apskritimo lankas) atžvilgiu. Kai $k_3 = k$ ir $m_2 = m$ iš (4) formulės plaukia mums reikalingo uždavinio sprendinys:

$$u_1(t) = A_1 + A_2 t - A_3 \cos(\omega t + \phi_1) + A_4 \cos(\omega t + \phi_2),$$
$$u_2(t) = A_1 + A_2 t - 2A_4 \cos(\omega t + \phi_2), \qquad (6)$$
$$u_3(t) = A_1 + A_2 t + A_3 \cos(\omega t + \phi_1) + A_4 \cos(\omega t + \phi_2),$$

čia $\omega = \sqrt{3}\sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{3}\omega_0$. Laisvų konstantų vertes randame iš pradinių sąlygų. Kadangi dalelės paslinktos iš pusiausvyros padėčių paleidžiamos be pradinio greičio $(\dot{u}_{10} = \dot{u}_{20} = \dot{u}_{30} = 0$, tai iš (6) plaukia

$$u_1(t) = a_1 - (a_1 - u_{10})\cos\omega t,$$
$$u_2(t) = a_1 - (a_1 - u_{20})\cos\omega t, \qquad (7)$$
$$u_3(t) = a_1 - (a_1 - u_{30})\cos\omega t,$$

kur $a_1 = \frac{1}{3}(u_{10} + u_{20} + u_{30})$. Ir tik daliniu atveju, kai $a_1 = 0$ dalelės svyruoja pagal paprastą harmoninį dėsnį. Dalelių pagreičių išraiškos akivaizdžiai seka iš (7) formulės. Tad visiškai atsakyta ir į 2) punkto klausimus.

n-osios dalelės judėjimo lygtį patogiausia rašyti remiantis antrąja lygčių sistemos (3) lygtimi. Iš jos iš karto plaukia, kad

$$m_n \ddot{u}_n = k_n(u_{n+1} - u_n) - k_{n-1}(u_n - u_{n-1}), \quad n = 1, 2, \ldots, N. \qquad (8)$$

Taikant (8) lygtį reikia turėti galvoje, kad dalelių grandinėlė yra uždara

$$k_{N+1} = k_1, \quad k_0 = k_N, \quad m_{N+1} = m_1,$$
$$u_{N+1} = u_1, \quad u_0 = u_N. \qquad (9)$$

Kai visos dalelės vienodos ir sujungtos vienodomis spyruoklėmis vietoje (8) turime lygtį:

$$\ddot{u}_n = \omega_0^2(u_{n+1} - u_n) - \omega_0^2(u_n - u_{n-1}), \quad n = 1, 2, \ldots, N. \qquad (10)$$

Į (10) įstačius sprendinį

$$u_n(t) = \sum_{j=1}^{N} a_j \sin\left(\frac{2\pi nj}{N} + \varphi\right)\cos(\omega_j t), n = 1,2,\ldots,N \qquad (11)$$

gauname, kad visos sistemos lygtys tapatingai patenkintos, kai

$$\omega_j = 2\omega_0 \sin\frac{\pi\ j}{N}, j = 1,2,\ldots,N. \qquad (12)$$

Griežtai imant $u_n(t)$, nusakytas (11) formule, nėra pagrindinio dinamikos uždavinio sprendinys (10) lygčiai, nes uždavinio sąlygoje pateiktasis sprendinys negali patenkinti pradinių sąlygų. Korektiškas sprendinys turi pavidalą

$$u_n(t) = \sum_{j=1}^{N} a_j \cos\left(\frac{2\pi nj}{N}\right)\cos(\omega_j t + \phi_j), \ n = 1,2,\ldots,N. \qquad (11a)$$

Diferencialinių lygčių sistemos (10) sprendiniai interpretuojami kaip grandinėle sklindančių dalinių bangų superpozicija. Kiekvienas sumos (11) formulės dešinėje pusėje narys aprašo dalinę bangą. Bet kuri grandinėlės dalelė dalyvauja visų bangų svyravimuose. (12) formulė nusako tų bangų ciklinius dažnius. Nesunku pastebėti, kad (11) lygtis nenusako sprendinio su cikliniu dažniu $\omega = 0$. Šį dažnį atitinkantis dalinis sprendinys yra tiesinė laiko funkcija. Reikia pastebėti, kad uždaros sistemos spektre dažnis $\omega = 0$ egzistuoja visada. Kai grandinėlėje daug dalelių iš (12) formulės plaukia, kad $0 \le \omega_j \le 2\omega_0$.

Apskaičiuosime, koks dalelių su numeriais n ir $(n+1)$ svyravimų amplitudžių santykis grandinėle sklindant bangai su numeriu j ir cikliniu dažniu (12). Amplitudes pagal (11) formulę aprašo dėmenys, kurių numeriai j:

$$u_{nj}(t) = a_j \sin(\frac{2\pi nj}{N} + \varphi)\cos(\omega_j t), n = 1,2,...,N. \qquad (13)$$

Kai $\frac{j}{N} << 1$ (mažų dažnių bangos), iš (13) gauname:

$$\frac{u_{n,j}}{u_{n+1,j}} = \frac{\sin(\frac{2\pi nj}{N} + \varphi)}{\sin(\frac{2\pi(n+1)j}{N} + \varphi)} =$$

$$= \frac{1}{\cos\frac{2\pi j}{N} + \mathrm{ctg}(\frac{2\pi nj}{N} + \varphi)\sin\frac{2\pi j}{N}} \approx \qquad (14)$$

$$\approx \frac{1}{1 + \frac{2\pi j}{N}\mathrm{ctg}(\frac{2\pi nj}{N} + \varphi)}.$$

Iš (12) formulės matyti, kad ciklinis dažnis didžiausias, kai $j = \frac{N}{2}$. Bet j turi būti sveikas skaičius. Kai N yra lyginis skaičius

$$\frac{u_{n,j}}{u_{n+1,j}} = \frac{\sin(\pi n + \varphi)}{\sin(\pi(n+1) + \varphi)} = -1. \qquad (15)$$

Šis rezultatas rodo, kad gali egzistuoti banga, kurioje gretimų dalelių nukrypimai nuo pusiausvyros padėties yra vienodi, bet į priešingas puses, o tai reiškia, kad egzistuoja stovinti banga. Kai N yra nelyginis skaičius, tai sveikas j vertes gauname iš santykių $j = \frac{N-1}{2}$ ir $j = \frac{N+1}{2}$. Amplitudžių santykis nėra tas pats abiem šioms j vertėms. Kai $j = \frac{N \mp 1}{N}$ gauname:

$$\frac{u_{n,j}}{u_{n+1,j}} = \frac{\sin(\frac{\pi n(N \mp 1)}{N} + \varphi)}{\sin(\frac{\pi(n+1)(N \mp 1)}{N} + \varphi)} =$$

$$= -\frac{1}{\cos\frac{\pi}{N} + \mathrm{ctg}(\frac{\pi n}{N} \mp \varphi)\sin\frac{\pi}{N}}. \qquad (16)$$

Kai $\frac{1}{N} << 1$, galime užsirašyti apytikslę išraišką

$$\frac{u_{n,j}}{u_{n+1,j}} \approx -\frac{1}{1 + \frac{\pi}{N}\mathrm{ctg}(\frac{\pi n}{N} \mp \varphi)}. \qquad (17)$$

Amplitudė, kuria bangoje, turinčioje numerį j, svyruoja n-oji dalelė,

$$u_{n,j} = a_j \sin(\frac{2\pi nj}{N} + \varphi). \qquad (18)$$

„gulės" ant sinusoidės, kurios periodas $\frac{N}{j}$. Taip bus visais atvejais, išskyrus tą, kai $\frac{N}{2}$ - sveikas skaičius (kai N lyginis). Tuomet maksimalaus dažnio bangai sklindant visos dalelės svyruoja su ta pačia amplitude, kaip plaukia iš (15) formulės, tik gretimos dalelės atsilenkia į priešingas puses nuo savo pusiausvyros padėties. Tuo atveju dalelių amplitudės būtų išsidėsčiusios ant lygiagrečių abscisių ašiai tiesių.

Pakeitus vieną grandinėlės dalelę lengva masės m' dalele, pastaroji svyruotų lyg pritvirtinta prie atramų dviem spyruoklėmis. Lengvosios dalelės svyravimų ciklinis dažnis apytiksliai būtų $\omega' \approx \sqrt{\frac{2k}{m'}}$. Lyginant su (12) turime

$$\omega' = \sqrt{\frac{2k}{m'}} = 2\omega_0\sqrt{\frac{m}{2m'}}. \qquad (19)$$

Kai $m' < \frac{m}{2}$ mažos dalelės svyravimų ciklinis dažnis viršija maksimalų ciklinį dažnį vienodų dalelių grandinėlėje.

XVIII tarptautinė fizikos olimpiada, 1987 m. (Vokietija)

79. 1) Pagal adiabatinio proceso lygtį, kurią taikysime ir tolesniam šio uždavinio sprendimui, $T_1=T_0(p_1/p_0)^{1-1/\chi}$ =279,4 K.

2) $h_1=2(p_0 - p_1)/(g(\rho_0 + \rho_1))$, h_1=1408 m, kur oro tankis ρ_1 apskaičiuotas iš idealių dujų būsenos lygties $p_0/(\rho_0 T_0)=p_1/(\rho_1 T_1)$.

3) Temperatūra kinta dėl dviejų procesų: adiabatinio atšalimo iki T_1 temperatūros kylant orui į kalną ir temperatūros padidėjimo ΔT dėl kondensacijos šilumos išsiskyrimo: $T_2=T_x+\Delta T$, kur $T_x=T_1(p_2/p_1)^{1-1/\chi}$, $\Delta T=q_v m/c_p$, T_2=270,9 K.

4) Kadangi pagal sąlygą virš 1m^2 paviršiaus yra 2000 kg oro, o iš jo 1 kg masės per τ_1=1500 s iškrinta m kritulių, tai kondensacijos greitis lygus 2000 m/τ_1, o per laiko tarpą τ = 3 h = 10800 s iškritusi vandens masė

$$m_v = \frac{2000\,\mathrm{m}}{\tau_1}\tau .$$

Be to, $m_v = \rho S\Delta h$, kur vandens tankis $\rho = 1\cdot 10^3$ kg/m^3. Tada

$$\rho S\Delta h = \frac{2000\,\mathrm{m}}{\tau_1}\tau$$

ir $\Delta h = \frac{2000\,\mathrm{m}}{\tau_1 \rho S}\tau$, Δh=35,3 mm.

5) $T_3=T_2\times(p_1/p_2)^{1-1/\chi}$, T_3=300 K. Pratekėjęs virš kalno oras pasidaro šiltesnis ir sausesnis.

80. Įtampa U_0 pagreitintų elektronų greitį apskaičiuojame pasinaudodami sąryšiu

$$\frac{mv^2}{2} = eU_0.$$

Taigi

$$v = \sqrt{\frac{2eU_0}{m}}.$$

Elektronus atlenkiantis vienalytis magnetinis laukas turi būti statmenas toroido plokštumai. Jo srauto tankį B_1 apskaičiuojame iš sąryšio

$$\frac{mv^2}{R} = evB_1$$

ir gauname:

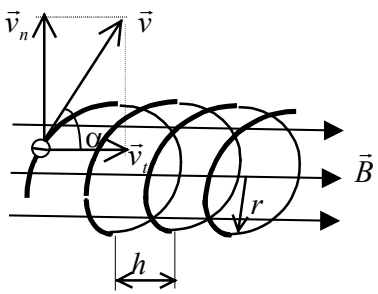
$$B_1 = \frac{mv}{eR} = \frac{m}{eR}\sqrt{\frac{2eU_0}{m}} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2U_0}{\frac{e}{m}}} = 3{,}7\ \text{mT}.$$

2) Jei kampas tarp vektorių $\vec{v}$ ir $\vec{B}$ nelygus 0 arba 90°, elektronas juda sraigtine linija, kurios ašis nukreipta išilgai magnetinio lauko jėgų linijų (80.1 pav.).

Išskaidykime greitį v į statmenąją ir lygiagrečiąją magnetiniam laukui dedamąsias v_n ir v_t:

$v_n = v\sin\alpha$,

$v_t = v\cos\alpha$.



80.1 pav.

Statmenoji dedamoji sąlygoja elektrono skriejimą apskritimu, kurio spindulį r rasime iš sąlygos

$$\frac{mv_n^2}{r} = ev_nB,$$

taigi

$$r = \frac{mv_n}{eB} = \frac{mv\sin\alpha}{eB}. \qquad (1)$$

Nuo lygiagrečiosios dedamosios priklauso atstumas tarp gretimų spiralės vijų $h = v_tT$. Čia

$$T = \frac{2\pi R}{v_n} = \frac{2\pi m}{eB} -$$

apskriejimo periodas. Taigi

$$h = \frac{2\pi mv\cos\alpha}{eB}.$$

Pluoštelio fokusavimo nuotolyje l sąlyga yra $l = nh$, (čia n=1, 2, 3, …). Pagal užduoties sąlygą $\alpha \le \alpha_0 << 1$, todėl $\cos\alpha \approx 1$, o

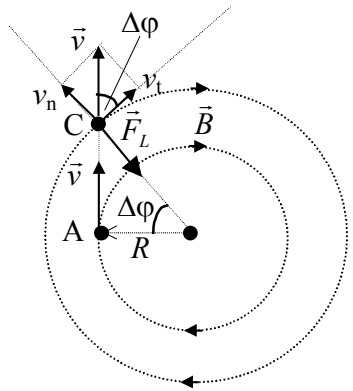
$$l = \frac{2\pi R}{4} = \frac{\pi R}{2}.$$

Taigi

$$\frac{\pi R}{2} = \frac{2\pi mv}{eB}n.$$

Iš čia gauname:

$$B = \frac{4mvn}{eB} = \frac{4mn}{eR}\sqrt{\frac{2eU_0}{m}} = \frac{4n}{R}\sqrt{\frac{2U_0}{\frac{e}{m}}}.$$



80.2 pav.

Įrašę skaitines vertes, kai n=1 gauname $B \approx 15$ mT.

3) Elektronų dreifas statmena toroido plokštumai kryptimi atsiranda dėl magnetinio lauko jėgų linijų kreivumo.

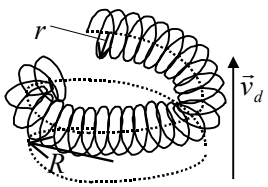
Tarkime, kad elektronas taške A įlekia į magnetinį lauką lygiagrečiai jo jėgų linijoms ir neveikiamas jėgos juda tiesiai greičiu v (80.2 pav.). Kai jis atsidurs taške C, kampas tarp $\vec{v}$ ir $\vec{B}$ bus $\Delta\varphi \ne 0$, todėl atsiras statmenoji magnetiniam laukui greičio dedamoji $v_n = v\sin\Delta\varphi \approx v\cdot\Delta\varphi$ ir elektroną veikianti Lorenco jėga $\Delta F_L = evB\cdot\Delta\varphi$. Jei magnetinio lauko jėgų linijos nukreiptos pagal laikrodžio rodyklę, jėga ΔF_L nukreipta statmenai brėžinio plokštumai į mus (80.2 pav. neparodyta). Šios jėgos veikiamas elektronas įgis tam tikrą į mus nukreiptą dreifo greitį v_d. Šis greitis taip pat yra statmenas magnetiniam laukui, taigi atsiras ir jo sąlygota Lorenco jėga $F_L = ev_dB$, nukreipta į toroido centrą. Kai dreifo greitis pasidarys toks, kad bus tenkinama lygybė $F_L = F_{\text{ic}}$, t. y.

$$ev_{\mathrm{d}}B = \frac{mv^2}{R},$$

arba, išreiškus v_{d} ir įrašius greičio išraišką per U_0,

$$v_{\mathrm{d}} = \frac{mv^2}{eBR} = \frac{2U_0}{BR},$$

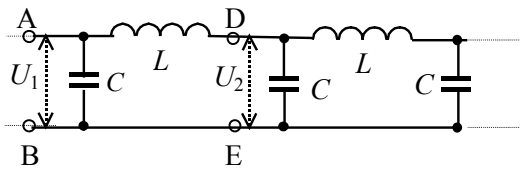
elektronas judės sukdamasis aplink R spindulio magnetinio lauko jėgos liniją, kartu dreifuodamas pastoviu greičiu v_{d} statmenai brėžinio plokštumai, t. y. judės dviguba sraigtine linija (80.3 pav.).



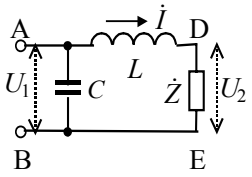
80.3 pav.

Sukimosi apie R spindulio jėgos liniją spindulys r aprašomas (1) formule ir yra baigtinis esant bet kokioms kampo α vertėms.

81. 1) Begalinės L-C grandinės kompleksinę varžą (impedansą) tarp taškų A ir B (81.1 pav.) pažymėkime $\dot{Z}$. Jei pirmąją grandį pašalintume, likusios dalies impedansas tarp taškų D ir E irgi būtų lygus $\dot{Z}$.



81.1 pav.



81.2 pav.

Pagal 81.2 pav.

$$\dot{Z} = \frac{-\frac{i}{\omega C}\left(i\omega L + \dot{Z}\right)}{i\omega L + \dot{Z} - \frac{i}{\omega C}}, \qquad (1)$$

arba

$$\dot{Z}^2 + i\omega L\dot{Z} - \frac{L}{C} = 0. \qquad (2)$$

(2) lygties sprendiniai yra

$$\dot{Z} = \frac{1}{2}\left(-i\omega L \pm \sqrt{\frac{(4-\omega^2 LC)L}{C}}\right). \qquad (3)$$

Pirmojo kondensatoriaus įtampą pažymėkime U_1 (ją galime pasirinkti realia), o antrojo kondensatoriaus $\dot{U}_2$. Tada pagal 81.2 pav. schemą

$$\dot{U}_2 = \dot{I}\dot{Z} = \frac{U_1\dot{Z}}{i\omega L + \dot{Z}}. \qquad (4)$$

Į (4) įrašę (3) ir atlikę matematinius veiksmus, gauname:

$$\dot{U}_2 = U_1 \cdot \frac{-i\omega L \pm \sqrt{\frac{(4-\omega^2 LC)L}{C}}}{i\omega L \pm \sqrt{\frac{(4-\omega^2 LC)L}{C}}} = \qquad (5)$$

$$= \frac{U_1}{2}\left[2 - \omega^2 LC \pm i\omega\sqrt{(4-\omega^2 LC)LC}\right].$$

Apskaičiavę (5) išraiškos modulį, įsitikiname, kad jis lygus U_1:

$$U_2 = U_1. \qquad (6)$$

Iš (5) ir (6) apskaičiuojame, kad

$$\cos\varphi = \frac{2-\omega^2 LC}{2}. \qquad (7)$$

Šiek tiek paprastesnę negu (7) išraišką galime gauti atlikę tokius trigonometrinius pertvarkymus:

$$\sin\varphi = 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} = 2\sin\frac{\varphi}{2}\sqrt{1-\sin^2\frac{\varphi}{2}}. \qquad (8)$$

Iš (8) išreiškę $\sin\frac{\varphi}{2}$, gauname:

$$\sin\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}}. \qquad (9)$$

Į (9) įrašę (7), gauname:

$$\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{\omega\sqrt{LC}}{2},$$

taigi

$$\varphi=2\arcsin\frac{\omega\sqrt{LC}}{2}. \qquad (10)$$

2) Tarkime, kad *i*-tojo kondensatoriaus įtampos kitimo dėsnis yra

$$U_i=U_0\cos\omega t.$$

Tada *i*+1-ojo kondensatoriaus įtampa

$$U_{i+1}=U_0\cos\omega\left(t-\frac{l}{v}\right)=U_0\cos(\omega t-\varphi).$$

Iš čia nustatome, kad

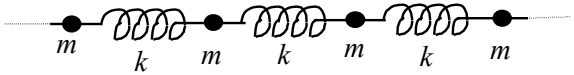
$$\varphi=\frac{\omega l}{v},$$

t. y. bangų sklidimo greitis

$$v=\frac{\omega l}{\varphi}=\frac{\omega l}{2\arcsin\frac{\omega\sqrt{LC}}{2}}. \qquad (11)$$

3) Kai $\frac{\omega\sqrt{LC}}{2}<<1$, $\arcsin\frac{\omega\sqrt{LC}}{2}\approx\frac{\omega\sqrt{LC}}{2}$. Tada $v\approx\frac{l}{\sqrt{LC}}$ ir beveik nepriklauso nuo kampinio dažnio ω.

4) Analogiškas elektrinei grandinei mechaninis modelis pavaizduotas 81.3 pav. Jį sudaro vienodomis spyruoklėmis sujungti *m* masės rutuliukai.



81.3 pav.

Rutuliuko judėjimą veikiant harmoninei jėgai aprašo lygtis

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+kx=F_0\cos\omega t. \qquad (12)$$

(Čia *k* - spyruoklės tamprumo koeficientas).

Analogiška lygtis elektrinei grandinei gaunama užrašant antrąją Kirchhofo taisyklę vienai grandžiai:

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+\frac{q}{C}=U_0\sin\omega t,$$

arba, abi jos puses išdiferencijavus pagal laiką *t*,

$$L\frac{\mathrm{d}^2I}{\mathrm{d}t^2}+\frac{1}{C}I=\omega U_0\cos\omega t. \qquad (13)$$

Matome, kad (12) ir (13) lygčių pavidalas yra vienodas.

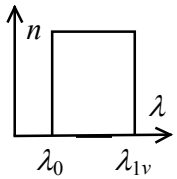
XIX tarptautinė fizikos olimpiada, 1988 m. (Austrija)

83. 1) Nejudančiam jonui sužadinti reikalinga mažiausio bangos ilgio λ_0=600 nm šviesa. Judančiam greičiu *v* jonui sužadinti reikia didesnio bangos ilgio šviesos. Pagal klasikinį Doplerio efektą gauname

$$\lambda_v=\lambda_0(1+v/c),$$

ir didžiausias bangos λ_{1v} ilgis atitinka didžiausiu greičiu judančius jonus,

$$\lambda_{1v}=600{,}012 \text{ nm}.$$



83 pav.

Sugeriamų fotonų skaičiaus *n* priklausomybės diagrama nuo bangos ilgio pateikta paveiksle.

Kadangi $\lambda=c/\nu$, reliatyvistinė formulė bangos ilgiui yra tokia (greičio ženklas priešingas pateiktam sąlygoje, nes jonai juda link šaltinio):

$$\lambda'=\lambda\sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}},\quad \lambda'_{1v}=600{,}0120002 \text{ nm}.$$

Taigi naudojantis klasikiniu artutinumu daroma paklaida $\Delta\lambda=2\cdot10^{-7}$ nm.

2) Pagreitinant jono pradinė energija $E=mv^2/2$ pakinta į $E'=mv^2/2+eU=mv'^2/2$. Todėl greičių spektro plotis $\Delta v=v_2-v_1$ pakinta į

$$\Delta v'=v'_2-v'_1=\sqrt{v_2^2+2eU/m}-\sqrt{2eU/m}=$$

$$=\frac{v_2^2}{\sqrt{v_2^2+2eU/m}+\sqrt{2eU/m}}<v_2.$$

Taigi greičių spektro plotis sumažėja.

3) Užduotyje 1 nustatytas greičiu v_2 judančio jono sugeriamos šviesos bangos ilgis λ_{v1} yra didesnis už λ_2, t.y., dviejų bangų ilgių intervalai persikloja. Kad jonus pagreitinus tie intervalai nepersiklotų, turi būti patenkinta sąlyga

$$\lambda_1\left(1+\sqrt{v_2^2+2eU/m}/c\right)<\lambda_2\left(1+\sqrt{2eU/m}/c\right).$$

Minimali U vertė gaunama imant lygybę. Tuomet

$$\Delta\lambda+\lambda_2\sqrt{2eU/m}/c=\lambda_1\sqrt{v_2^2+2eU/m}/c,$$

$$\Delta\lambda^2+2\Delta\lambda\lambda_2\sqrt{2eU/m}/c+2eU\lambda_2^2/mc^2=$$

$$\lambda_1^2(v_2^2+2eU/m)/c^2.$$

Pažymėję $\sqrt{2eU/m}/c=x$, gauname kvadratinę lygtį x atžvilgiu, jos teigiamas sprendinys duoda ieškomąją U vertę

$$U=\frac{mc^2}{2e}\left(\frac{\Delta\lambda\lambda_2\pm\sqrt{\Delta\lambda^2\lambda_2^2+(\lambda_1+\lambda_2)\Delta\lambda(\Delta\lambda^2-\lambda_1^2v^2/c^2)}}{\Delta\lambda(\lambda_1+\lambda_2)}\right)^2,$$

$U=160$ V.

Pateikta mažesnioji U vertė gaunama imant ženklą "–".

84. Disko inercijos momentas simetrijos ašies atžvilgiu

$$I=\frac{1}{2}MR^2. \qquad (1)$$

Diskui leidžiantis iš energijos tvermės dėsnio gauname sąryšį

$$\frac{1}{2}Mv^2+\frac{1}{2}I\omega^2=Mgs, \qquad (2)$$

kur v-disko masės centro slenkamojo judėjimo greitis, ω-disko sukimosi ape ašį kampinis greitis. Linijinis ir kampinis greičiai susieti sąryšiu

$$v=r\omega. \qquad (3)$$

Iš (2) lygties eliminavę v ir I išsprendžiame ją kampinio greičio atžvilgiu

$$\omega=\sqrt{\frac{4gs}{R^2+2r^2}}. \qquad (4)$$

Diskui nusileidus s = 0,5 m gauname, kad ω=73,64 rad/s. Kai diskas nusileidžia iš aukščio s pradžioje nejudėjęs, jo slenkamojo judėjimo kinetinė energija

$$T_{sl}=\frac{1}{2}Mv^2=\frac{1}{2}Mr^2\omega^2=\frac{2Mgsr^2}{R^2+2r^2}. \qquad (5)$$

Sukamojo judėjimo kinetinė energija tada bus

$$T_{suk}=\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{MgsR^2}{R^2+2r^2}. \qquad (6)$$

Kai s = 0,5 m $T_{sl}=9{,}76\cdot10^{-3}$ J, $T_{suk}=1{,}95$ J.

Sukamojo ir slenkamojo judėjimų kinetinių energijų santykis

$$\frac{T_{suk}}{T_{sl}}=\frac{R^2}{2r^2}=200. \qquad (7)$$

Kaip matome, Maksvelo diskui leidžantis beveik visas potencinės energijos pokytis virsta disko sukimosi kinetine energija. Diskui kylant sukamojo judėjimo energija virsta potencine.

Apskaičiuojame siūlo įtempimo jėgą N, diskui leidžiantis. Diską laiko du siūlai. Tegul ašis x nukreipta vertikaliai žemyn, o taškas $x=0$ yra disko judėjimo pradinis taškas. Disko masės

centro judėjimo lygtis x ašies atžvilgiu

$$Ma = Mg - 2N, \qquad (8)$$

kur a-disko masės centro pagreitis. Diskui kampinį pagreitį ε suteikia siūlų itempimo jėgos kuriamas jėgos momentas. Tada

$$I\varepsilon = 2Nr. \qquad (9)$$

Kadangi linijinis ir kampinis pagreitis susieti formule

$$a = \varepsilon r, \qquad (10)$$

tai iš (8) lygties, panaudojus (9) ir (10) išraiškas, randame siūlo įtempimo jėgą:

$$N = \frac{MgR^2}{2(R^2 + 2r^2)}. \qquad (11)$$

Į (11) įstatę skaitines reikšmes gauname N=1,95 N. Diskui leidžiantis ir kylant, kai $0 \le x \le H$, siūlo įtempimo jėga pastovi ir nepriklauso nuo disko koordinatės.

Disko posūkio kampą φ skaičiuojame nuo pradinės padėties. Diskui leidžiantis

$$x = r\varphi. \qquad (12)$$

Apeinant tašką $x = H$ diskas keičia judėjimo kryptį ir tuo tarpu dar pasisuka kampu π. Toliau disko padėtis kinta pagal dėsnį

$$x = H - r(\varphi - \varphi_1 - \pi), \qquad (13)$$

kur $\varphi_1 = \frac{H}{r}$. Kai $0 \le x \le H$ kampinio greičio didumui galioja (4) formulė, nes x yra disko masės centro atstumas nuo pradinės padėties, tik kylant masės centro slenkamojo judėjimo greičio projekcija į ašį x yra neigiama. Statmena x ašiai greičio dedamoji atsirasti niekur negali, nes mūsų reiškinio modelyje nėra jėgų su šia dedamąja (siūlas visą laiką vertikalus). Kai diskas leisdamasis pasiekia tašką $x = H$, jo slenkamojo judėjimo greitis ima mažėti. Taške $x = H + r$ jo slenkamojo judėjimo greitis pasidaro lygus nuliui. Tada iš energijos tvermės dėsnio plaukia, kad

$$\frac{1}{2} I\omega_{\max}^2 = Mg(H + r), \qquad (14)$$

o masės centro padėtis

$$x = H + r\sin(\varphi - \varphi_1). \qquad (15)$$

Intervale $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_1 + \pi$ greitį galima užrašyti tik apytikriai, pavyzdžiui, tariant, kad diskas praeina tašką $x = H$ judėdamas pastoviu kampiniu greičiu, jo turėtu taške $x = H$. Tada disko masės centro greitis x ašies atžvilgiu

$$v = \begin{cases} 2r\sqrt{\dfrac{gr\varphi}{R^2 + 2r^2}}, 0 \le \varphi \le \varphi_1, \\ 2r\cos(\varphi - \varphi_1)\sqrt{\dfrac{gH}{R^2 + 2r^2}}, \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_1 + \pi, \\ -2r\sqrt{\dfrac{g(H - r(\varphi - \varphi_1 - \pi))}{R^2 + 2r^2}}, \varphi_1 + \pi \le \varphi \le 2\varphi_1 + \pi. \end{cases} \qquad (16)$$

Siūlų įtempimo jėga būna maksimali, kai diskas yra taške $x = H + r$. Tada įcentrinė jėga esti lygi siūlų įtempimo jėgos F ir sunkio jėgos Mg skirtumui:

$$F - Mg = Mr\omega_{\max}^2 \qquad (17)$$

Kadangi jėgą F kuria du siūlai, tai panaudoję (14) formulę, gauname

$$H_{\max} = \frac{2N_{\max} - Mg}{Mg}\frac{R^2}{4r} - r. \qquad (18)$$

Įrašę skaitines vertes gauname $H_{\max} = 1{,}23$ m.

85. 1) Laikome, kad koordinatėms ir impulso komponentėms galioja Heizenbergo nelygybė

$$\Delta x^2 \Delta p_x^2 \ge \hbar^2 / 4.$$

Taip pat laikome, kad $\Delta x^2 = \Delta y^2 = \Delta z^2$ ir $\Delta p_x^2 = \Delta p_y^2 = \Delta p_z^2$ (erdvės izotropiškumo išdava). Tada

$$p_0^2 \cdot r_0^2 \ge 9\hbar^2 / 4.$$

2) Dažnis išreiškiamas formule

$$\nu = \left(E_e + E_1 - E_2\right)/h,$$

čia E_e – pradinė laisvojo elektrono energija, E_1 – jono $A^{(Z-1)+}$ energija, E_2 – jono $A^{(Z-2)+}$ energija. Be to, proceso metu patenkinamas impulso tvermės dėsnis. Todėl

$$\vec{p}_e + \vec{p}_1 = \vec{p}_f + \vec{p}_2,$$

čia p_e –laisvojo elektrono impulsas, p_1 – jono $A^{(Z-1)+}$ impulsas, p_2 – jono $A^{(Z-2)+}$ impulsas, p_f –fotono impulsas.

3) Išreiškę $p^2 = \hbar^2 / r^2$, gauname

$$E_1 = \hbar^2 / 2mr^2 - kNe^2 / r.$$

Mažiausią energijos vertę gauname prilyginę jos išvestinę kintamojo r atžvilgiu nuliui:

$$-\frac{\hbar^2}{mr^3} + \frac{kNe^2}{r^2} = 0.$$

Mažiausią vertę atitinka šaknis

$$r = \frac{\hbar^2}{kNme^2}, E_{1\min} = -\frac{k^2N^2me^4}{2\hbar^2}.$$

4) Iš Heizenbergo nelygybės išreiškę impulsus per atstumus ir imdami $r_1 = r_2 = r$, gauname

$$E_2 = \hbar^2 / mr^2 - 2kNe^2 / r + ke^2 / 2r = \hbar^2 / mr^2 - k(4N-1)e^2 / 2r.$$

Minimalią E vertę gauname kaip 3) užduotyje, tik pakeitę $N \to (4N-1)/4$. Tada

$$E_{2\min} = -\frac{k^2(4N-1)^2me^4}{16\hbar^2}.$$

5) Į 2) užduotyje gautą dažnio išraišką įrašę E_e=0 bei 3) ir 4) užduotyse gautas energijos išraiškas, o taip pat laikydami, kad fotono impulsas yra mažas, ir proceso metu jono impulsas nepakinta, gauname

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{h}\left(-\frac{k^2N^2me^4}{2\hbar^2} + \frac{k^2(4N-1)^2me^4}{16\hbar^2}\right) = \frac{k^2(8N^2-8N+1)^2me^4}{16\hbar^2},$$

$$N^2 - N + 1 - \frac{16\omega_0\hbar^3}{k^2me^4} = 0.$$

Įrašę dydžių vertes, gauname

$$N^2 - N - 95{,}7 = 0.$$

Teigiamoji lygties šaknis N=10,3. Kadangi N turi būti sveikas skaičius, imame N=10. Tai yra neonas.

XX tarptautinė fizikos olimpiada, 1989 m. (Lenkija)

88. a) Skysčiai užverda, kai jų sočiųjų garų slėgis tampa lygus atmosferos slėgiui: $p_i=p_0$, tada $\ln(p_i/p_0)=0$. Iš duotos formulės $\ln(p_i/p_0)=a_i/T+b_i$ randame virimo temperatūros išraišką:

$$T_V = -a_i/b_i .$$

Pagal lentelės duomenis gauname šias skaitmenines vertes:

$$a_A = -3748 \text{ K},\ a_B = -5122 \text{ K},\ b_A = 10{,}72,\quad b_B = 13{,}73.$$

Tada virimo temperatūros

$$T_{VA} \approx 350 \text{ K ir } T_{VB} \approx 373 \text{ K}.$$

b) Iš pradžių (pirmoji palinkusi grafiko dalis) skysčiai šyla, nevykstant garavimui iš paviršiaus. Panagrinėsime dėl fluktuacijų atsiradusį burbuliuką skystyje A arba skystyje B, arba jų riboje. Jei burbuliukas atsirado skystyje A, tai slėgis jame $p=p_A(T)$, jei skystyje B, tai $p=p_B(T)$, o jei jų riboje, tai $p=p_A(T)+p_B(T)$. Kai $T=T_x$, tai $p=p_0$, virimas skysčių riboje prasideda anksčiau, nei kiekvieno skysčio garų slėgis pasiekia atmosferos slėgį. Gauname lygtį

$$e^{a_A/T_x+b_A} + e^{a_B/T_x+b_B} = 1.$$

Tiksliai išspręsti šią lygtį yra pakankamai sunku, tačiau bent jau 1 K tikslumu tai galima padaryti kalkuliatoriumi "pusinio dalijimo" metodu. Taip gauname T_x=340 K. Kadangi tokio

virimo metu temperatūra nekinta, galime teigti, kad šį procesą atitinka pirma horizontalioji duotojo grafiko $t(\tau)$ dalis ir $T_1=T_x=340$ K.

Tūrio V burbuliukas nusineša medžiagos A masę m_A ir medžiagos B masę m_B. Pagal idealiųjų dujų lygtį:

$$\frac{p_A V}{T_x}=\frac{m_A}{M_A}R,\quad \frac{p_B V}{T_x}=\frac{m_B}{M_B}R,$$
$$\frac{m_A}{m_B}=\frac{p_A}{p_B}\frac{M_A}{M_B}.$$

Įstačius T_x į $T_V=-a_i/b_i$, gauname p_A/p_B ir randame $m_A/m_B=22{,}4$, t.y. skysčio A masė mažėja 22,4 karto greičiau nei B. Kai skystis A pasibaigs, dalis skysčio B bus išgaravusi, o kita dalis – likusi:

$$\Delta m_B=m\, m_B/m_A,\qquad m'_B=m(1-m_B/m_A),\ m'_B=95{,}5\text{ g}.$$

Kai baigiasi virimas riboje, skystis B toliau šyla iki savo virimo temperatūros nebegaruodamas. Todėl τ_1 momentu $m_A=0$, $m'_B=95{,}5$ g. Aišku, kad T_2 – skysčio B virimo temperatūra, t.y. $T_2\approx 373$ K.

89. Dekarto koordinačių sistemos pradžią imame sistemos masės centre, o ašį z nukreipiame statmenai plokštumai, kurioje juda materialieji taškai. Tada materialiųjų taškų padėtis nusakys vektoriai $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ ir $\vec{r}_3$. Visi šie vektoriai guli plokštumoje xOy. Materialiuosius taškus veikia tik vidinės jėgos, dėl to sistemos judesio kiekio momentas yra konstanta. Kadangi sistemos materialiųjų taškų tarpusavio atstumai nekinta, tai ir jų judėjimo masės centro atžvilgiu kampinis greitis yra pastovus.

Įvedame neinercinę koordinačių sistemą, besisukančią kartu su mūsų nagrinėjama sistema. Joje materialieji taškai nejuda ir judėjimo lygtys virsta algebrinėmis lygtimis:

$$G\frac{m_1m_2}{\left|\vec{r}_2-\vec{r}_1\right|^3}(\vec{r}_2-\vec{r}_1)+G\frac{m_1m_3}{\left|\vec{r}_3-\vec{r}_1\right|^3}(\vec{r}_3-\vec{r}_1)+m_1\omega^2\vec{r}_1=0,$$
$$-G\frac{m_1m_2}{\left|\vec{r}_2-\vec{r}_1\right|^3}(\vec{r}_2-\vec{r}_1)+G\frac{m_2m_3}{\left|\vec{r}_3-\vec{r}_2\right|^3}(\vec{r}_3-\vec{r}_2)+m_2\omega^2\vec{r}_2=0, \quad (1)$$
$$-G\frac{m_1m_3}{\left|\vec{r}_3-\vec{r}_1\right|^3}(\vec{r}_3-\vec{r}_1)-G\frac{m_2m_3}{\left|\vec{r}_3-\vec{r}_2\right|^3}(\vec{r}_3-\vec{r}_2)+m_3\omega^2\vec{r}_3=0.$$

Matome, kad kiekvienoje lygčių paskutinio nario sandara skiriasi nuo pirmųjų. Išreikšime $\vec{r}_j$ per skirtumus. Tuo tikslu imame masės centro apibrėžimą

$$\vec{r}_m=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{3}m_j\vec{r}_j, \quad (2)$$

kur $m=m_1+m_2+m_3$. Dauginame lygtį (2) iš m ir iš gautos lygybės abiejų pusių atimame po $(m_1+m_2+m_3)\vec{r}_1$. Gauname lygtį

$$m\vec{r}_m-(m_1+m_2+m_3)\vec{r}_1=\sum_{j=1}^{3}m_j\vec{r}_j-(m_1+m_2+m_3)\vec{r}_1. \quad (3)$$

Ją užrašome pavidalu

$$m(\vec{r}_m-\vec{r}_1)=m_2(\vec{r}_2-\vec{r}_1)+m_3(\vec{r}_3-\vec{r}_1). \quad (4)$$

(3) lygtyje vietoje $\vec{r}_1$ įrašę $\vec{r}_2$ ir $\vec{r}_3$, gauname lygtis

$$m(\vec{r}_m-\vec{r}_2)=-m_1(\vec{r}_2-\vec{r}_1)+m_3(\vec{r}_3-\vec{r}_2), \quad (5)$$
$$m(\vec{r}_m-\vec{r}_3)=-m_1(\vec{r}_3-\vec{r}_1)-m_2(\vec{r}_3-\vec{r}_2). \quad (6)$$

Mūsų koordinačių sistemoje $\vec{r}_m=0$. Turėdami tai omenyje (1) formulės lygčių paskutinį narį pertvarkome. Gauname sąryšius:

$$G\frac{m_1m_2}{\left|\vec{r}_2-\vec{r}_1\right|^3}(\vec{r}_2-\vec{r}_1)+G\frac{m_1m_3}{\left|\vec{r}_3-\vec{r}_1\right|^3}(\vec{r}_3-\vec{r}_1)-$$
$$\frac{m_1\omega^2}{m}\left\{m_2(\vec{r}_2-\vec{r}_1)+m_3(\vec{r}_3-\vec{r}_1)\right\}=0, \qquad (7)$$

$$-G\frac{m_1m_2}{\left|\vec{r}_2-\vec{r}_1\right|^3}(\vec{r}_2-\vec{r}_1)+G\frac{m_2m_3}{\left|\vec{r}_3-\vec{r}_2\right|^3}(\vec{r}_3-\vec{r}_2)-$$
$$\frac{m_2\omega^2}{m}\left\{-m_1(\vec{r}_2-\vec{r}_1)+m_3(\vec{r}_3-\vec{r}_2)\right\}=0, \qquad (8)$$

$$-G\frac{m_1m_3}{\left|\vec{r}_3-\vec{r}_1\right|^3}(\vec{r}_3-\vec{r}_1)-G\frac{m_2m_3}{\left|\vec{r}_3-\vec{r}_2\right|^3}(\vec{r}_3-\vec{r}_2)-$$
$$\frac{m_3\omega^2}{m}\left\{-m_1(\vec{r}_3-\vec{r}_1)-m_2(\vec{r}_3-r_2)\right\}=0. \qquad (9)$$

Pagal uždavinio sąlygą tarp vektorių $\vec{r}_2-\vec{r}_1$, $\vec{r}_3-\vec{r}_1$ ir $\vec{r}_3-\vec{r}_2$ nėra poromis lygiagrečių. Todėl lygtyse (7) – (8) tuos vektorius galime imti už bazinius ir gauname skaliarinius sąryšius

$$\left|\vec{r}_2-\vec{r}_1\right|=\left\{\frac{Gm}{\omega^2}\right\}^{\frac{1}{3}},$$
$$\left|\vec{r}_3-\vec{r}_1\right|=\left\{\frac{Gm}{\omega^2}\right\}^{\frac{1}{3}}, \qquad (10)$$
$$\left|\vec{r}_3-\vec{r}_2\right|=\left\{\frac{Gm}{\omega^2}\right\}^{\frac{1}{3}}.$$

Šių sąryšių kairėje pusėje yra atstumai tarp taškų. Taigi turime rezultatą, kad

$$a_{12}=a_{23}=a_{13}=\left\{\frac{Gm}{\omega^2}\right\}. \qquad (11)$$

Gautas rezultatas rodo, kad materialieji taškai turi būti lygiakraščio trikampio viršūnėse. Ši simetrija iš karto reikalauja, kad ir materialiųjų taškų masės būtų vienodos, nes tik taip materialieji taškai gali būti pusiausvyroje neinercinėje atskaitos sistemoje.

90. Atkreipsime dėmesį, kad elektrono kinetinė energija q_eU=511 keV lygi jo rimties energijai $E_e=m_ec^2$, todėl reikės naudotis reliatyvistinėmis formulėmis. Protonui gi 511 keV<<$E_p=m_pc^2$=938 MeV, todėl reliatyvistinės formulės nebūtinos.

a) Magnetiniame lauke dalelę veikianti Lorenco jėga

$$\vec{F}_L=q\left[\vec{v},\vec{B}(x)\right],$$

taigi

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\vec{F}_L.$$

Čia

$$\vec{p}=\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

yra dalelės impulsas, $\vec{B}(x)$ - tik nuo erdvinių koordinačių priklausantis magnetinio srauto tankis. Lorenco jėga statmena greičiui, todėl dalelių greičio ir impulso moduliai, taip pat energija nekinta.

Dalelės nulekiamą kelią pažymėkime s. Tada

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}s}=v\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}s}=\vec{F}_L,$$

t. y.

$$v\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}s}=q\left[\vec{v},\vec{B}(x)\right].$$

Abi šios lygybės puses padalykime iš pv:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\vec{p}}{\vec{p}}\right)=\frac{q}{p}\left[\frac{\vec{v}}{v},\vec{B}(x)\right],$$

arba

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}=\frac{q}{p}\left[\vec{r},\vec{B}(x)\right]$$

Čia $\vec{r}$ - greičio krypties vienetinis vektorius. Iš pastarosios lygybės matyti, kad elektronai ir protonai judės tokiomis pat trajektorijomis, jei

$$\frac{q_e\vec{B}(x)}{p_e}=\frac{q_p\vec{B}©(x)}{p_p}.$$

Iš čia nustatome, kad protoniniame mikroskope

$$\vec{B}©(x)=-\frac{p_p}{p_e}\cdot\vec{B}(x),$$

nes $q_p=-q_e$. $\vec{B}(x)$ yra atskirų ričių magnetinių laukų, kurie tiesiai proporcingi srovių stipriams, vektorinė suma. Todėl norint padaryti protoninį mikroskopą visų srovių stiprius reikia padidinti p_p/p_e kartų ir pakeisti srovių kryptis:

$$i_j^{©}=-\frac{p_p}{p_e}\cdot i_j.$$

Pagal energijos tvermės dėsnį

$$\frac{m_ec^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-m_ec^2=q_eU.$$

Iš čia

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{q_eU+m_ec^2}{m_ec^2}$$

ir

$$v=\frac{c\sqrt{2m_eq_ec^2U+q_e^2U^2}}{q_eU+m_ec^2}.$$

Elektrono impulso modulis

$$p_e=\frac{m_ev}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\sqrt{2m_eq_eU+\frac{q_e^2U^2}{c^2}}=4{,}72\cdot10^{-22}\ \text{kg·m/s},$$

o protono –

$$p_p=\sqrt{2m_pq_pU}=1{,}65\cdot10^{-20}\ \text{kg·m/s}.$$

Taigi

$$\frac{p_p}{p_e}=35,\quad i_j^{'}=-35i_j.$$

2) Dalelės de Broilio bangos ilgis

$$\lambda=\frac{h}{p}.$$

Skiriamoji geba apibūdinama santykiu

$$\frac{d}{\lambda}\sim p.$$

Čia d - mikroskopo įėjimo vyzdžio skersmuo. Todėl skiriamoji geba padidėtų 35 kartus.

XXI tarptautinė fizikos olimpiada, 1990 m. (Olandija)

92. a) Panagrinėkime difrakcinį vaizdą x kryptimi. Eigos skirtumas tarp bangų, sklindančių iš gretimų plyšių (atstumas tarp kurių d_1), yra lygus:

$\Delta_1 = n_1\lambda.$

Čia n_1 yra sveikasis skaičius, nusakantis pagrindinį maksimumą. Jo padėtis ekrane (x linkme) yra:

$$x_{n_1} = \frac{n_1 \lambda L}{d_1}.$$

Eigos skirtumas tarp bangų, sklindančių iš viduriniojo plyšio ir vieno iš kraštinių, yra:

$$\Delta_{\frac{N_1}{2}} = \frac{N_1}{2} n_1 \lambda.$$

Jei eigos skirtumas yra

$$\Delta_{\frac{N_1}{2}} = \frac{N_1}{2} n_1 \lambda + \frac{\lambda}{2},$$

tai tarp maksimumų bus minimumas ir jo padėtis ekrane nusakoma taip:

$$x_{n_1} + \Delta x = \frac{\left(\frac{N_1}{2} n_1 \lambda + \frac{\lambda}{2}\right) L}{\frac{N_1}{2} d_1} = \frac{n_1 \lambda L}{d_1} + \frac{\lambda L}{N_1 d_1}.$$

Iš čia

$$\Delta x = \frac{\lambda L}{N_1 d_1}.$$

Pagrindinio maksimumo plotis

$$2\Delta x = 2\frac{\lambda L}{N_1 d_1}.$$

Panašiai galima aprašyti ir y linkme, kurioje yra N_2 plyšių, tarp kurių atstumas d_2.

Pagrindinio maksimumo padėtis ir plotis bus nusakomi išraiškomis:

$$\left(x_{n_1}, y_{n_2}\right) = \left(\frac{n_1 \lambda L}{d_1}, \frac{n_2 \lambda L}{d_2}\right)$$

$$2\Delta x = 2\frac{\lambda L}{N_1 d_1}; \quad 2\Delta y = \frac{\lambda L}{N_2 d_2}.$$

b) x kryptimi spindulys "mato" gardelę, kurios konstanta a. Šiuo atveju gaunama:

$$x_{n_1} = \frac{n_1 \lambda L}{a}; \qquad \Delta x = 2\frac{\lambda L}{N_0 a}.$$

y kryptimi spindulys "mato" gardelę, kurios efektinė konstanta $a\cos\Theta$. Analogiškai gaunama:

$$y_{n_2} = \frac{n_2 \lambda L}{a\cos\Theta}; \qquad \Delta y = 2\frac{\lambda L}{N_0 a\cos\Theta}.$$

z kryptimi spindulys „mato" gardelę, kurios efektinė konstanta $a\sin\Theta$. Pagrindinių maksimumų padėtis ir plotis išreiškiami taip:

$$y'_{n_3} = \frac{n_3 \lambda L}{a\sin\Theta}; \qquad \Delta y' = 2\frac{\lambda L}{N_1 a\sin\Theta}.$$

Jei $\sin\Theta$ yra labai mažas, tai pastebimas tik nulinės eilės maksimumas ir jis bus labai platus, kadangi $N_1 \sin\Theta << N_0$.

Kai plokščioji banga krenta į ploną kubinio kristalo plokštelę ir kai kritimo kampas mažas, tai difrakcijos vaizdas bus identiškas vaizdui, kuris gaunamas dvimatės gardelės atveju.

c) Brego atspindžio atveju eigos skirtumas tarp gretimų gardelės plokštumų

$$\Delta = 2\,a\sin\phi \approx 2\,a\,\phi = n\,\lambda.$$

Kadangi $x/L \approx 2\,\phi$, tai $x = \frac{n\lambda L}{a}$.

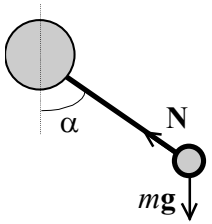
Čia ϕ – difrakcijos kampas. Šiuo atveju maksimumo sąlygos tokios pat, kaip ir dalyje b).

d) Atstumas tarp gretimų K jonų suskaičiuojamas taip:

$$\mathrm{tg}2\phi = \frac{x}{L} = \frac{0{,}053}{0{,}1} = 0{,}53. \quad \Rightarrow a = \frac{\lambda}{2\sin\phi} \approx \frac{0{,}15\cdot 10^{-9}}{2\cdot 0{,}24} \approx 0{,}31\ \mathrm{nm},$$

$$\mathrm{K\text{-}K} \approx \sqrt{2}\cdot a = 0{,}44\ \mathrm{nm}.$$

93. a$_1$) Satelitą veikia strypo įtempimo (ar suspaudimo) jėga **N** ir sunkio jėga m**g**. Tų jėgų atstojamoji jėga satelitui judant stacionariai suteikia jam įcentrinį pagreitį. Kadangi įcentrinis pagreitis (taip pat ir atstojamoji jėga) turi būti nukreipti **g** kryptimi, yra galimi tokie atvejai: 1) N=0, tada $a_{ic}=g$. Tai galima, tik kai $\alpha=90^0$ arba $\alpha=270^0$; 2) **N**$\|$**g**, tada α=0 arba $\alpha=180^0$. Antruoju atveju, esant α=0, gauname



93 pav.

$$\omega^2(r-L)=\gamma M/(r-L)^2+N_1/m,$$

čia ω – „Atlančio” sukimosi apie Žemę kampinis greitis, r – jo orbitos spindulys, γ – gravitacinė konstanta, M – Žemės masė, N_1 – strypo įtempimo jėga, m – satelito masė. Kadangi

$$\omega^2 r=\gamma M/r^2,\quad \omega^2=\gamma M/r^3,$$

tai N_1 yra neigiama, t.y., nukreipta nuo satelito į „Atlantį”.

Kai $\alpha=180^0$ gauname

$$\omega^2(r+L)=\gamma M/(r+L)^2+N_2/m,$$

dabar N_2 yra neigiama, nukreipta priešinga kryptimi, negu N_1, t.y., vėl nuo satelito į „Atlantį”.

a$_2$) Akivaizdu, kad antruoju užduoties a$_1$ atveju pusiausvyra stabili.

Pirmuoju atveju satelitui nukrypus nuo pusiausvyros padėties artyn prie Žemės traukos jėga padidėja, o esant tam pačiam kampiniam greičiui įcentrinis pagreitis sumažėja. Taigi, atsiranda perteklinė jėga, didinanti nukrypimą nuo pusiausvyros padėties. Panašiai gauname satelitui nukrypus nuo pusiausvyros padėties tolyn nuo Žemės: taip pat atsiranda perteklinė jėga, didinanti nukrypimą nuo pusiausvyros padėties. Taigi, pusiausvyra nestabili.

b) Panaudodami sąlygą $r>>L$, gauname

$$N=\frac{3\gamma mM}{r^3}\cdot L.$$

Ši jėga N atitinka sunkio jėgą, todėl satelitą galima laikyti ilgio L matematine svyruokle lauke, kuriame laisvojo kritimo pagreitis yra

$$g'=\frac{3\gamma ML}{r^3},$$

todėl svyravimo periodas

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g'}}=2\pi\sqrt{\frac{r^3}{3\gamma M}}=\frac{2\pi}{\omega\sqrt{3}}=\frac{\tau}{\sqrt{3}},$$

čia τ – „Atlančio” apsisukimo apie Žemę trukmė.

b$_1$) Pagal Lenco taisyklę elektros srovė tekės iš satelito į „Atlantį”: esant tokiai elektros srovės krypčiai pagal kairiosios rankos taisyklę strypą veiks jėga, kurios kryptis bus priešinga strypo judėjimo krypčiai.

b$_2$) Visa „Atlančio” mechaninė energija

$$E=\frac{m_A\omega^2r^2}{2}-\frac{\gamma m_AM}{r}=-\frac{\gamma m_AM}{2r}.$$

Čia m_A – „Atlančio” masė. Orbitos spinduliui pakitus mažu dydžiu Δr energija pakinta dydžiu

$$\Delta E=\frac{\gamma m_AM}{2r^2}\Delta r=\frac{m_A\omega^2r\Delta r}{2}.$$

Tą energiją „Atlančiui” suteikia Žemės magnetinis laukas. Lauko atliktas darbas

$$A=\Delta E=FS=BIL\cdot\omega rt.$$

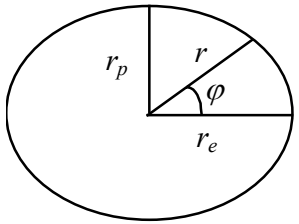
Įrašę ΔE išraišką, gauname

$$t=\frac{m\omega\Delta r}{2BIL},\quad t=5{,}8.10^3\ \text{s}.$$

94. a) Neinercinėje koordinačių sistemoje, besisukančioje kampiniu greičiu ω, masės m kūną veikia žvaigždės gravitacinės traukos jėga ir išcentrinė jėga. Tų jėgų atstojamoji gali būti išreikšta funkcijos

$$\Phi=\frac{\gamma mM}{r}+\frac{m\omega^2r^2\cos^2\varphi}{2}$$

neigiamu gradientu. Čia γ – gravitacijos konstanta, M – žvaigždės masė, r – atstumas nuo nagrinėjamojo paviršiaus taško iki žvaigždės centro, φ – nagrinėjamojo paviršiaus taško geografinė platuma. Taigi Φ atitinka potencinę energiją neinercinėje koordinačių sistemoje. Žvaigždės paviršiaus taškams $\Phi=const$. Imdami ašigalio ir pusiaujo taškus, gauname



94 pav.

$$\frac{\gamma mM}{r_p}=\frac{\gamma mM}{r_e}+\frac{m\omega^2 r_e^2}{2},$$

$$\varepsilon=\frac{r_e-r_p}{r_e}=\left(\frac{\omega^2 r_e^3}{2\gamma M}\right)\Big/\left(1+\frac{\omega^2 r_e^3}{2\gamma M}\right),\quad \varepsilon=3{,}7.10^{-4}.$$

b) Pakitus žvaigždės plutos formai plutos inercijos momentas I pakinta (sumažėja) dydžiu ΔI, bet plutos judesio kiekio momentas nepakinta. Todėl

$$I\omega_0=(I-\Delta I)\omega_1,\quad \Delta I=\frac{\omega_1-\omega_0}{\omega_1}\cdot I.$$

Laikui bėgant dėl trinties plutos ir branduolio kampiniai greičiai išsilygina, ir pagal judesio kiekio momento tvermės dėsnį gauname

$$(I+I_c)\omega_0=(I+I_c-\Delta I)\omega_2,\quad \Delta I=\frac{\omega_2-\omega_0}{\omega_2}\cdot(I+I_c),$$

čia I_c – branduolio inercijos momentas. Sulyginę ΔI išraiškas, gauname

$$\frac{\omega_1-\omega_0}{\omega_1}\cdot I=\frac{\omega_2-\omega_0}{\omega_2}\cdot(I+I_c).$$

Laikome, kad žvaigždės branduolio forma artima pačios žvaigždės formai (ji artima rutuliui). Tada

$$I_0=kmr^2=k'\rho r^5,\quad I_c=km_c r_c^2=k'\rho r_c^5,$$

čia I_0 – žvaigždės inercijos momentas, r – jos vidutinis spindulys, ρ – medžiagos tankis, k ir k' – konstantos (rutuliui k=2/5, k'=8π/15). Pasinaudoję tuo, kad $I_0= I+I_c$, gauname

$$\frac{I_c}{I}=1-\frac{(\omega_2-\omega_0)\cdot\omega_1}{(\omega_1-\omega_0)\cdot\omega_2}=\frac{r_c^5}{r^5},\quad \frac{r_c}{r}=\sqrt[5]{1-\frac{(\omega_2-\omega_0)\cdot\omega_1}{(\omega_1-\omega_0)\cdot\omega_2}},$$

$$r_c/r=0{,}97.$$

XXII tarptautinė fizikos olimpiada, 1991 m. (Kuba)

95. 1) a) Smūgio pradžioje rutulio masės centras juda vertikaliai žemyn greičiu

$$v_0=\sqrt{2gh}.$$

Pažymime vertikaliąją greičio dedamąją po smūgio v_x, horizontaliąją v_y. Pagal kampu mesto kūno judėjimo dėsnį gauname

$$v_y=\sqrt{2g\alpha h}=v_0\sqrt{\alpha}.$$

Smūgio metu rutulį veikia grindų reakcijos jėga N, todėl

$$\Delta p_y=\int_0^\tau N dt=m(v_0+v_y)=mv_0(1+\sqrt{\alpha})=m(1+\sqrt{\alpha})\sqrt{2gh},$$

$$\Delta p_x=mv_x=\int_0^\tau f_{tr}dt=\int_0^\tau \mu N dt=\mu m(1+\sqrt{\alpha})\sqrt{2gh},$$

$$v_x=\mu(1+\sqrt{\alpha})\sqrt{2gh}.$$

Čia f_{tr} – trinties tarp rutulio ir grindų jėga, τ – smūgio trukmė. Tada

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{v_x}{v_y}=\mu\cdot\frac{1+\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}}.$$

Matome, kad kampas θ nepriklauso nuo ω_0.

b) Po smūgio rutulys juda kaip kampu į horizontą mestas kūnas. Atstumas iki antro smūgio yra

$$S = \frac{2v_x v_y}{g} = 4\mu h\sqrt{\alpha}\left(1+\sqrt{\alpha}\right).$$

c) Rutulio judesio kiekio momento L pokytis smūgio metu

$$\Delta L = I\omega - I\omega_0 = \int_0^{\tau} f_{tr} R dt = R\mu m\left(1+\sqrt{\alpha}\right)\sqrt{2gh},$$

$$\omega = \omega_0 - \frac{R\mu m\left(1+\sqrt{\alpha}\right)\sqrt{2gh}}{I}.$$

Kad rutulys smūgio pabaigoje dar slystų, jo sukimosi greitis tuo metu turi būti nemažesnis už v_x/R, t.y.,

$$\frac{\mu\left(1+\sqrt{\alpha}\right)\sqrt{2gh}}{R} < \omega_0 - \frac{R\mu m\left(1+\sqrt{\alpha}\right)\sqrt{2gh}}{I},$$

$$\omega_0 > \omega_1 = \frac{\mu\left(1+\sqrt{\alpha}\right)\sqrt{2gh}}{R}\cdot\left(1+\frac{R^2 m}{I}\right) = \frac{7\mu\left(1+\sqrt{\alpha}\right)\sqrt{2gh}}{2R}.$$

2) Šiuo atveju tam tikru momentu $t'<\tau$ besisukantis rutulys nustoja slysti, f_{tr} tampa lygi nuliui, sukimosi greitis nebekinta, jis lygus

$$\omega = v_x/R.$$

Tada

$$\Delta p_x = \int_0^{t'} f_{tr} dt = m v_x,$$

$$\Delta L = I\left(\omega_0 - \frac{v_x}{R}\right) = \int_0^{t'} R f_{tr} dt = R m v_x,$$

$$v_x = \frac{I\omega_0 R}{mR^2 + I} = \frac{2\omega_0 R}{7}, \quad \omega = \frac{2}{7}\cdot\omega_0.$$

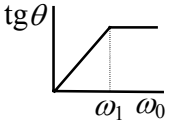
Vertikaliosios greičio dedamosios išraiška gaunama tokia pati, kaip ir pirmuoju atveju, todėl

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{v_x}{v_y} = \frac{2\omega_0 R}{7\sqrt{2g\alpha h}}.$$

Matome, kad $tg\theta$ tiesiškai priklauso nuo ω_0.

b) Kaip ir pirmuoju atveju atstumą S $\operatorname{tg}\theta$ išreiškiame per v_x ir v_y:

$$S = \frac{2v_x v_y}{g} = \frac{4\omega_0 R}{7}\cdot\sqrt{\frac{2\alpha h}{g}}.$$



95 pav.

3) Nubraižome $\operatorname{tg}\theta$ priklausomybės nuo ω_0 grafiką.

96. 1) Su nejudančiu stebėtoju susietą atskaitos sistemą pažymėkime S. Jos atžvilgiu vija juda greičiu v. Su vija susietą atskaitos sistemą pažymėkime S', jos x' ašį nukreipdami greičio $\vec{v}$ kryptimi, y' – lygiagrečiai kraštinei DA ir z' – statmenai vijos plokštumai. S sistemos ašių kryptis pasirinkime lygiagrečiai S' sistemos atitinkamoms ašims, o abiejų sistemų koordinačių pradžias sutampančias, kai t=0.

a) <u>Kraštinė AB</u>. Pasirinkime atskaitos sistemą S''_{AB}, kurios atžvilgiu AB kraštinės rutuliukai nejuda, o šios sistemos koordinačių ašis nukreipkime lygiagrečiai su atitinkamomis S ir S' sistemų ašimis. S''_{AB} sistemos greitis S' sistemos atžvilgiu yra u.

Pagal Lorenco judančio kūno sutrumpėjimo formulę atstumas a_1 tarp gretimų AB kraštinės rutuliukų S''_{AB} sistemoje yra

$$a_1 = \frac{a}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}. \qquad (1)$$

Pagal greičių sudėties reliatyvumo teorijoje formules S sistemos atžvilgiu rutuliukai juda greičiu

$$u_{AB} = \frac{v+u}{1+\frac{uv}{c^2}} \quad . \qquad (2)$$

Taigi šioje sistemoje esančiam stebėtojui atstumas tarp rutuliukų bus toks:

$$a_{AB} = a_1\sqrt{1-\frac{u_{AB}^2}{c^2}}. \qquad (3)$$

Į (3) įrašę (1) ir (2) ir atlikę algebrinius veiksmus, gauname:

$$a_{AB} = \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{uv}{c^2}} \cdot a. \qquad (4)$$

b) Kraštinė CD. *S* sistemos stebėtojui CD kraštinės rutuliukų greičiai yra

$$u_{CD} = \frac{v-u}{1-\frac{uv}{c^2}}, \qquad (5)$$

o atstumai tarp rutuliukų

$$a_{CD} = a_1\sqrt{1-\frac{u_{CD}^2}{c^2}}. \qquad (6)$$

Į (6) įrašę (1) ir (5), gauname:

$$a_{CD} = \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{uv}{c^2}} \cdot a. \qquad (7)$$

c) Kraštinė DA. Tarkime, kad S' sistemoje laiko momentu t_0' vienas rutuliukas yra taške $x_1' = y_1' = z_1' = 0$. Tuo metu kitas jam gretimas rutuliukas bus taške $x_2' = 0,\ y_2' = a,\ z_2' = 0$. Pagal Lorenco transformacijas *S* sistemoje šių rutuliukų koordinates ir laiką reikia skaičiuoti pagal šias formules:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot (x' - vt'), \\ y &= y', \\ z &= z', \\ t &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \left(t' + \frac{x'v'}{c^2}\right). \end{aligned} \qquad (8)$$

Pritaikę jas pirmajam rutuliukui, gauname:

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot vt_0';\ y_1 = 0;\ z_1 = 0;\ t_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot t_0', \qquad (9)$$

o antrajam -

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot vt_0';\ y_2 = a;\ z_2 = 0;\ t_2 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot t_0'. \qquad (10)$$

Kadangi t_1=t_2, atstumas tarp dviejų rutuliukų *S* sistemoje yra

$$a_{DA} = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = a. \qquad (11)$$

d) Kraštinė BC. Skaičiavimai ir atsakymas tokie patys, kaip ir kraštinės DA atveju. Taigi

$$a_{BC} = a. \qquad (12)$$

2) Su vija susietoje koordinačių sistemoje bet kurio kraštinę sudarančio strypo krūvis

$$Q_{strypo} = -\frac{L}{a}q, \qquad (13)$$

nes *L*/*a* yra kraštinėje esančių rutuliukų skaičius. Toks pat kiekvieno strypo krūvis bus ir su stebėtoju susietoje koordinačių sistemoje *S*, nes krūvis yra invariantas.

Dabar apskaičiuosime suminį (strypas+rutuliukas) kiekvienos kraštinės krūvį.

a) Kraštinė AB. Su nejudančiu stebėtoju susietoje sistemoje S visų AB kraštinėje esančių rutuliukų krūvis

$$Q_{AB\,rut.} = \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{a_{AB}} \cdot Lq. \qquad (14)$$

Ši išraiška gauta rutuliukų skaičių kraštinėje padauginant iš vieno rutuliuko krūvio. (14) formulės dešinės pusės pirmojo dauginamojo skaitiklis išreiškia stebėtojo išmatuojamo atstumo sutrumpėjimą, o vardiklyje yra atstumas tarp rutuliukų. Į (14) įrašę (4), gauname:

$$Q_{AB\,rut.} = \left(\frac{1+uv}{c^2}\right) \cdot \frac{Lq}{a}. \qquad (15)$$

Sudėję (13) ir (15), nustatome suminį šios kraštinės krūvį:

$$Q_{AB} = \frac{uvLq}{ac^2}. \qquad (16)$$

b) Kraštinė CD. Atlikę analogiškus skaičiavimus, gauname:

$$Q_{CD\,rut.} = \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{a_{CD}} \cdot Lq = \left(1-\frac{uv}{c^2}\right) \cdot \frac{Lq}{a}, \qquad (17)$$

o sudėję (13) ir (17) -

$$Q_{CD} = -\frac{uvLq}{ac^2}. \qquad (18)$$

c) Kraštinės BC ir DA. Šių kraštinių ilgiai sistemos S atžvilgiu yra L, o atstumai tarp rutuliukų a. Taigi

$$Q_{BC\,rut.} = Q_{DA\,rut.} = \frac{Lq}{a}. \qquad (19)$$

Sudėję (13) ir (19), gauname:

$$Q_{BC} = 0, \qquad (20)$$

$$Q_{DA} = 0. \qquad (21)$$

3) AB kraštinę veikianti jėga yra

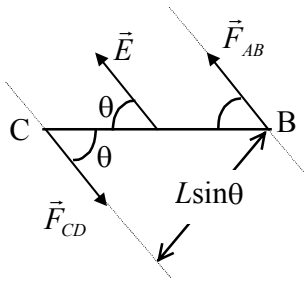
$$\vec{F}_{AB} = Q_{AB}\vec{E} = \frac{uvLq}{ac^2} \cdot \vec{E}, \qquad (22)$$

o kraštinę CD -

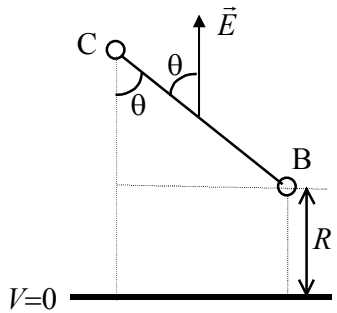
$$\vec{F}_{CD} = Q_{CD}\vec{E} = -\frac{uvLq}{ac^2} \cdot \vec{E}. \qquad (23)$$

Matome, kad jėgos $\vec{F}_{AB}$ ir $\vec{F}_{CD}$ sudaro jėgų porą. Jų momento modulis (žr. 96.1 pav.) yra

$$M = F_{AB} L \sin\theta = \frac{uvL^2 Eq \sin\theta}{ac^2}. \qquad (24)$$



96.1 pav.



96.2 pav.

4) Tarkime, kad kraštinių AB ir CD potencialai yra V_{AB} ir V_{CD} atitinkamai. Tada energija

$$W = V_{AB}Q_{AB} + V_{CD}Q_{CD}. \qquad (25)$$

Manykime, kad plokštumos, statmenos elektriniam laukui $\vec{E}$ ir nutolusios nuo kraštinės AB bet kokiu laisvai pasirinktu atstumu R, potencialas lygus nuliui (V=0) (96.2 pav.). Tada

$$W = -ERQ_{AB} - E(R + L\cos\theta)Q_{CD}. \qquad (26)$$

Atsižvelgę į tai, kad $Q_{CD}=-Q_{AB}$, gauname:

$$W = ELQ_{AB}\cos\theta. \qquad (27)$$

Į (27) įrašę (16), galutinai apskaičiuojame:

$$W = \frac{uvL^2qE}{ac^2} \cdot \cos\theta. \qquad (28)$$

97. 1) Atomo vidutinis greitis esant temperatūrai T yra

$$v_0 = \sqrt{\frac{3kT}{m}}, v_0 = 1042 \text{ m / s}.$$

Nejudantis atomas sugeria ir spinduliuoja šviesą, kurios dažnis

$$f=E/h,\ f=5{,}07.10^{14} \text{ Hz}$$

Dėl Doplerio efekto dažnis gali skirtis nuo f dydžiu

$$\Delta f_1 = fv / c, \Delta f_1 = 1{,}76.10^9 \text{ Hz}.$$

Dėl sužadinto lygmens pločio sugeriamos ir spinduliuojamos šviesos dažnis gali skirtis nuo f dydžiu

$$\Delta f_2 = \Gamma / 2h, \Delta f_2 = 5{,}28.10^6 \text{ Hz}.$$

Kaip matome, Δf_1 ir Δf_2 žymiai mažesni už f, todėl atomai sugers dažnio f=5,07.10^{14} Hz šviesą. Atomo greičio pokytį sugėrus pirmą fotoną nustatome panaudoję judesio kiekio tvermės dėsnį

$$mv_0 - p_f = mv_1,\ \ \Delta v_1 = p_f / m = hf / mc,\ \ \Delta v_1 = 0{,}029 \text{ m / s}.$$

2) Palyginę Δf_1 ir Δf_2 išraiškas ir pareikalavę, kad pakitus atomo greičiui dydžiu Δv_0 dažnio pokytis dėl Doplerio efekto prilygtų dažnio pokyčiu dėl lygmens pločio, gauname

$$\frac{E}{h}\frac{\Delta v_0}{c} = \frac{\Gamma}{2h},\ \ \Delta v_0 = \frac{\Gamma c}{2E},\ \ \Delta v_0 = 3{,}1 \text{ m / s}.$$

3) Didžiausias sklaidos kampas gaunamas fotoną išspinduliavus statmenai atomo judėjimo krypčiai. Tada iš judesio kiekio tvermės dėsnio gauname

$$tg\varphi = p_f / p = E / c\sqrt{3kTm},\ \ \varphi = 5{,}8''.$$

4) Sutinkamai su 2) užduotimi ieškomasis greičio pokytis

$$\Delta v = 2\Delta v_0,\ \ \Delta v = 6{,}2 \text{ m / s}.$$

5) Jei fotonai kiekvieno akto metu būtų spinduliuojami atomo judėjimo kryptimi, gautume

$$N = v_0 / 2\Delta v_1,\ \ N = 18000.$$

Kadangi fotonai spinduliuojami įvairiomis kryptimis, spinduliuojant kiekvieno akto metu atomo greitis pakis dydžiu

$$\Delta v' = \Delta v_1 \cos\varphi,$$

čia φ – atsitiktinis dydis, įgaunantis vertes nuo 0 iki 2π. Sumuojant tokius pokyčius gaunamas 0. Todėl

$$N' = 2N,\ \ N' = 36000.$$

6) Lygmens plotį ir jo gyvavimo trukmę τ sieja neapibrėžtumų sąryšis

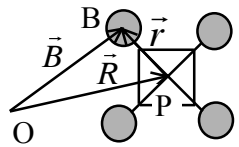
$$\Gamma\tau \ge h,\ \ \tau \ge h / \Gamma,\ \ \tau \ge 9{,}4.10^{-8} \text{ s}.$$

Per tokį laiką atomas nulėks atstumą

$$s = v_0\tau,\ \ s = 9{,}9.10^{-5} \text{ m}.$$

XXIII tarptautinė fizikos olimpiada, 1992 m. (Suomija)

98. 1) Kūno B padėtį nurodo $\vec{B} = \vec{R} + \vec{r}$, jo greitį $\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times \vec{r}$, pagreitį $\vec{a} = -\Omega^2\vec{R} - \omega^2\vec{r}$, čia Ω – sukimosi apie Žemę kampinis greitis. Kūną veikia siūlų įtempimo jėga $\vec{F}$ ir sunkio jėga



98 pav.

$$\vec{F}_g = -\frac{\gamma Mm\left(\vec{R} + \vec{r}\right)}{\left|\vec{R} + \vec{r}\right|^3},$$

čia M – Žemės masė, γ – gravitacinė konstanta. Tų jėgų atstojamoji suteikia kūnui pagreitį $\vec{a}$. Todėl

$$\frac{\vec{F}}{m} = -\Omega^2\vec{R} - \omega^2\vec{r} + \frac{\gamma M\left(\vec{R} + \vec{r}\right)}{\left|\vec{R} + \vec{r}\right|^3}.$$

Pažymime $\left|\vec{R} + \vec{r}\right| = R + \rho$, čia $-r \le \rho \le r$. Pasinaudojame tuo, kad $\rho << R$. Tada

$$\frac{1}{\left(R + \rho\right)^3} \approx \frac{1 - 3\rho / R}{R^3}.$$

Dar panaudoję sąryšį

$$\Omega^2 R = \frac{\gamma M}{R^2},$$

gauname (mažą dydį r/R atmetame)

$$\frac{\vec{F}}{m} = -\omega^2 \vec{r} + \Omega^2 \vec{r} - 3\Omega^2 \rho \frac{\vec{R}}{R}.$$

Matome, kad $\vec{F} \| \vec{r}$ kai $\vec{R} \| \vec{r}$, (tada $\rho = \pm r$), ir kai $\rho = 0$ (tada $\vec{R} \perp \vec{r}$). Gauname didžiausios ir mažiausios jėgų vertes:

$$\vec{F}_{\max} = -m\left(\omega^2 + 2\Omega^2\right)\vec{r}, \text{ kai } \rho = \pm r,$$

$$\vec{F}_{\min} = -m\left(\omega^2 - \Omega^2\right)\vec{r}, \text{ kai } \rho = 0.$$

Kitais atvejais $\vec{F}$ ir $\vec{r}$ kryptys nesutampa, ir $F_{min} < F < F_{max}$.

2) Kai $F = F_{max}$, darbą atlieka mechanizmas, tas darbas teigiamas, o kai $F = F_{min}$, darbą atlieka įtempimo jėga, darbas neigiamas. Kadangi vieno apsisukimo metu F_{min} ir F_{max} susidaro du kartus, gauname

$$A = 2\Delta r\left(F_{max} - F_{\min}\right) = 6m\Omega^2 r \Delta r = 0{,}06 m\Omega^2 r^2.$$

Satelitas kampiniu greičiu ω sukasi apie tašką P ir kampiniu greičiu Ω apie Žemę. Priklausomai nuo to, ar ω ir Ω yra tos pačios krypties, ar priešingų krypčių, sukimosi apie besikeičiančios krypties liniją OP greitis $\omega' = \omega \pm \Omega$, o apsisukimo periodas $T = 2\pi/\omega'$. Tada ieškomoji galia

$$P = A / T = 0{,}03 m\Omega^2 r^2 (\omega \pm \Omega) / \pi.$$

3) Laikome, kad satelito orbita išlieka apskritiminė. Kadangi pilnasis judesio kiekio momentas nekinta, gauname lygtį

$$L = 4m\left(\omega r^2 \pm \Omega R^2\right) = const.$$

Judesio kiekio momento išraiškoje viršutinis ženklas atitinka sukimosi apie Žemę ir apie tašką P vienodas kryptis, apatinis – priešingas. Panaudodami orbitinio judėjimo įcentrinio pagreičio ir sunkio jėgos sąryšį $\Omega^2 R = \gamma M / R^2$, gauname

$$L = 4m\left(\omega r^2 \pm \sqrt{\gamma M R}\right) = const.$$

Taigi, turime ω ir R sąryšį. Imant ženklą "+" kai ω mažėja, R didėja, ir priešingai. Imant ženklą "–" kai ω didėja, R taip pat didėja. Visa satelito energija

$$E = 4m\left(-\frac{\gamma M}{R} + \frac{\Omega^2 R^2}{2} + \frac{\omega^2 r^2}{2}\right) = 2m\left(-\frac{\gamma M}{R} + \omega^2 r^2\right).$$

Mechanizmas atlieka darbą A, kuriam lygus pilnutinės energijos pokytis. Taigi imant ženklą "–", didėjant energijai, didėja ω ir R. Imant ženklą "+" energijos pokyčiui įvertinti apskaičiuojame

$$\mathrm{d}L = 4m\left(r^2\,\mathrm{d}\omega + \frac{\sqrt{\gamma M}}{2\sqrt{R}}\mathrm{d}R\right) = 0,$$

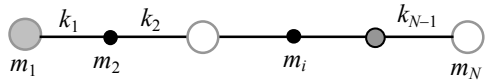
$$\mathrm{d}\omega = \frac{\sqrt{\gamma M}}{2r^2\sqrt{R}}\mathrm{d}R.$$

Tada

$$\mathrm{d}E = 2m\left(2\omega r^2\,\mathrm{d}\omega + \frac{\sqrt{\gamma M}}{R^2}\mathrm{d}R\right) = \frac{\sqrt{\gamma M}}{R^2}\mathrm{d}R\left(1 - \frac{\omega}{\Omega}\right).$$

Kai $\omega > \Omega$, E didėja, mažėjant R, o tuo pačiu metu didėjant ω. Taigi ω didėja abiem atvejais. Matome, kad esant priešingoms sukimosi apie Žemę ir apie tašką P kryptims, mechanizmo darbas didina orbitos spindulį, kartu didindamas ir sukimosi apie tašką P kampinį greitį. Tą kampinį greitį, o tuo pačiu metu ir R, riboja siūlų atsparumas.

99. Tiesę, ant kurios išsidėstę atomai, pavadinsime ašimi z. Tada atomų padėtys ant ašies z bus $z_1, z_2, \ldots, z_N$.



99 pav.

Nedeformuotų spyruoklių ilgius žymėsime $l_j, j = 1, \ldots, N-1$, tai yra, kaip ir tamprumo koeficientus k_j 99 pav. Remdamiesi antruoju Niutono ir Huko dėsniais užrašome lygčių sistemą

$$\begin{aligned}
&m_1\ddot{z}_1 = k_1(z_2 - z_1 - l_1),\\
&m_2\ddot{z}_2 = -k_1(z_2 - z_1 - l_1) + k_2(z_3 - z_2 - l_2),\\
&m_3\ddot{z}_3 = -k_2(z_3 - z_2 - l_2) + k_3(z_4 - z_3 - l_3),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&m_j\ddot{z}_j = -k_{j-1}(z_j - z_{j-1} - l_{j-1}) + k_j(z_{j+1} - z_j - l_j),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&m_N\ddot{z}_N = -k_{N-1}(z_N - z_{N-1} - l_{N-1}).
\end{aligned} \qquad (1)$$

Iš čia matyti, kad atomą, kurio numeris j, veikiančių jėgų atstojamoji

$$F_j = -k_{j-1}(z_j - z_{j-1} - l_{j-1}) + k_j(z_{j+1} - z_j - l_j). \qquad (2)$$

Šią formulę galima naudoti bet kuriam atomui, priėmę, kad $k_0 = k_N = 0$. Padarome pakeitimą (1) sistemoje

$$\begin{aligned}
&x_1 = z_1,\\
&x_2 = z_2 - l_1,\\
&x_3 = z_3 - l_2 - l_1, \quad . \qquad (3)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&x_N = z_N - \sum_{j=1}^{N-1} l_j.
\end{aligned}$$

Dydžiai $x_j, (j = 1, \ldots, N)$ yra atomų poslinkiai iš pusiausvyros padėties. Dabar (1) ir (2) formules galime užrašyti taip:

$$\begin{aligned}
&m_1\ddot{x}_1 = k_1(x_2 - x_1),\\
&m_2\ddot{x}_2 = -k_1(x_2 - x_1) + k_2(x_3 - x_2),\\
&m_3\ddot{x}_3 = -k_2(x_3 - x_2) + k_3(x_4 - x_3),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&m_j\ddot{x}_j = -k_{j-1}(x_j - x_{j-1}) + k_j(x_{j+1} - x_j),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&m_N\ddot{x}_N = -k_{N-1}(x_N - x_{N-1}),
\end{aligned} \qquad (4)$$

$$F_j = -k_{j-1}(x_j - x_{j-1}) + k_j(x_{j+1} - x_j). \qquad (5)$$

Iš (5) arba (2) formulių matyti, kad

$$\sum_{j=1}^{N} F_j = 0. \qquad (6)$$

arba, imant dešines lygčių puses, turime

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{N}\left\{-k_{j-1}(x_j - x_{j-1}) + k_j(x_{j+1} - x_j)\right\} = 0,\\
&k_0 = k_N = 0.
\end{aligned} \quad . (7)$$

(6) (arba (7)) lygtis rodo, kad atomų sąveikos jėgos molekulėje yra vidinės ir negali pakeisti molekulės judesio kiekio.

Lygčių sistema (4) yra paprastųjų diferencialinių lygčių sistema su pastoviais koeficientais ir jos sprendimo metodai žinomi. Bet kai molekulėje daug atomų, tai algebrinės išraiškos yra griozdiškos. Vienok esminiams matematinio sprendimo momentams ir fizikinei interpretacijai išsiaiškinti pakanka 2 ar 3 atomų molekulės.

2) Dviatomė AB tipo molekulė (atomų masės skirtingos). Šiuo atveju (4) lygčių sistema turi pavidalą

$$m_1\ddot{x}_1 = k_1(x_2 - x_1),$$
$$m_2\ddot{x}_2 = -k_1(x_2 - x_1). \qquad (8)$$

Diferencialinių lygčių sistemos (8) sprendinio ieškome pavidalo

$$x_j = C_j e^{\lambda t}, \quad j = 1, 2. \qquad (9)$$

Įrašę (9) į (8) ir po to padauginę kiekvieną sistemos lygtį iš $e^{-\lambda t}$ ir padaliję koeficiento prie pagreičio, gauname tiesinių lygčių sistemą koeficientų C_j atžvilgiu

$$\left\{\lambda^2 + \frac{k_1}{m_1}\right\}C_1 - \frac{k_1}{m_1}C_2 = 0,$$
$$-\frac{k_1}{m_2}C_1 + \left\{\lambda^2 + \frac{k_1}{m_2}\right\}C_2 = 0. \qquad (10)$$

Lygčių sistema (10) turės netrivialų sprendinį tik tada, jeigu jos pagrindinis determinantas lygus nuliui, t. y.

$$\Delta = \left\{\lambda^2 + \frac{k_1}{m_1}\right\}\left\{\lambda^2 + \frac{k_1}{m_2}\right\} - \frac{k_1}{m_1}\frac{k_1}{m_2} = 0. \qquad (11)$$

Tai yra 4 laipsnio lygtis λ atžvilgiu. Šios lygties sprendiniai $\lambda_j, (j = 1,2,3,4)$ yra tos λ vertės, kurioms (9) formulėje ateinantys koeficientai C_j gali nusakyti netrivialų sprendinį. Atlikę veiksmus (11) formulę galim užrašyti taip:

$$\lambda^2\left\{\lambda^2 + k_1\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\right\} = 0. \qquad (11)$$

Pažymime $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{1}{\mu}$, $\frac{k_1}{\mu} = \omega_1^2$. (11) lygties sprendiniai dabar atrodytų taip:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = i\omega_1, \quad \lambda_4 = -i\omega_1. \qquad (12)$$

Kiekvienai λ vertei iš (12) išraiškos egzistuoja bendru atveju nelygios nuliui konstantos C_j. Lygčių sistemos (8) bendrasis sprendinys

$$x_1 = \mathbf{Re}\left\{C_1^{(1)} + C_1^{(2)}t + C_1^{(3)}e^{\lambda_3 t} + C_1^{(4)}e^{\lambda_4 t}\right\},$$
$$x_2 = \mathbf{Re}\left\{C_2^{(1)} + C_2^{(2)}t + C_2^{(3)}e^{\lambda_3 t} + C_2^{(4)}e^{\lambda_4 t}\right\}. \qquad (13)$$

Koeficientai $C_j^{(\alpha)}$, $j = 1, 2$ kiekvienai λ_α, $\alpha = 1, 2, 3, 4$ vertei susieti sąryšiais (10). Iš pastarųjų gauname, kad

$$C_1^{(1)} = C_2^{(1)}, \quad C_1^{(2)} = C_2^{(2)},$$
$$C_1^{(3)} = -\frac{m_2}{m_1}C_2^{(3)}, \quad C_1^{(4)} = -\frac{m_2}{m_1}C_2^{(4)}. \qquad (14)$$

Įrašę (12) ir (14) į formules (13), gauname

$$x_1 = C_1^{(1)} + C_1^{(2)}t - \frac{m_2}{m_1}\{C_2^{(3)}\cos\omega_1 t + C_2^{(4)}\cos\omega_1 t\},$$
$$x_2 = C_1^{(1)} + C_1^{(2)}t + \{C_2^{(3)}\cos\omega_1 t + C_2^{(4)}\cos\omega_1 t\}. \qquad (15)$$

Sprendinį (15) galima užrašyti ir taip:

$$x_1 = C_1^{(1)} + C_1^{(2)}t - \frac{m_2}{m_1}a_1\cos(\omega_1 t + \phi_1),$$
$$x_2 = C_1^{(1)} + C_1^{(2)}t + a_1\cos(\omega_1 t + \phi_1). \qquad (16)$$

Reiškinys $a_1\cos(\omega_1 t + \phi_1)$ vadinamas normaline moda, o ω_1 - normaliniu dažniu. Kaip matome, uždavinyje pasirodo ir normalinis dažnis ω=0. Toks dažnis aprašo molekulės slenkamąjį judėjimą. Moda su dažniu ω_1 aprašo molekulės atomų svyravimus masės centro atžvilgiu.

3) Triatomei ABA tipo molekulei turime lygčių sistemą

$$m_1\ddot{x}_1 = k_1(x_2 - x_1),$$
$$m_2\ddot{x}_2 = -k_1(x_2 - x_1) + k_1(x_3 - x_2), \qquad (17)$$
$$m_1\ddot{x}_3 = -k_1(x_3 - x_2).$$

Ieškodami (9) pavidalo sprendinio koeficientams C_j gauname lygčių sistemą

$$\left\{\lambda^2 + \frac{k_1}{m_1}\right\}C_1 - \frac{k_1}{m_1}C_2 = 0,$$
$$-\frac{k_1}{m_2}C_1 + \left\{\lambda^2 + \frac{2k_1}{m_2}\right\}C_2 - \frac{k_1}{m_2}C_3 = 0, \qquad (18)$$
$$-\frac{k_1}{m_1}C_2 + \left\{\lambda^2 + \frac{k_1}{m_1}\right\}C_3 = 0.$$

Jos pagrindinis determinantas

$$\Delta = \lambda^2\left\{\lambda^2 + \frac{k_1}{m_1}\right\}\left\{\lambda^2 + \frac{2k_1}{m_2} + \frac{k_1}{m_1}\right\} = 0, \qquad (19)$$

kai $\lambda^2 = 0$, $\lambda^2 = -\frac{k_1}{m_1}$, $\lambda^2 = -\left\{\frac{2k_1}{m_2} + \frac{k_1}{m_1}\right\} = 0$. Matome, kad sprendiniai

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_3 = i\omega_1, \quad \lambda_4 = -i\omega_1,$$
$$\lambda_5 = i\omega_2, \quad \lambda_5 = i\omega_2, \qquad (20)$$
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{2k_1}{m_2} + \frac{k_1}{m_1}}.$$

Iš (18) sistemos gauname, kad tikrinėms vertėms koeficientai $C_j^{(\alpha)}$, $j = 1, 2, 3$ kiekvienai λ_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, 6$ vertei susieti sąryšiais

$$C_1^{(1)} = C_3^{(1)}, \quad C_2^{(1)} = C_3^{(1)}, \quad C_1^{(2)} = C_3^{(2)}, \quad C_2^{(2)} = C_3^{(2)},$$
$$C_2^{(3)} = 0, \quad C_2^{(4)} = 0, \quad C_1^{(3)} = -C_3^{(3)}, \quad C_1^{(4)} = -C_3^{(4)}, \qquad (21)$$
$$C_1^{(5)} = C_3^{(5)}, \quad C_1^{(6)} = C_3^{(6)},$$
$$C_2^{(5)} = -\frac{2m_1}{m_2}C_3^{(5)}, \quad C_2^{(6)} = -\frac{2m_1}{m_2}C_3^{(6)}.$$

Sistemos (17) sprendinys, užrašytas (13) pavidalu, dabar atrodytų taip:

$$x_1 = \mathbf{Re}\left\{C_3^{(1)} + C_3^{(2)}t - \left(C_3^{(3)}e^{\mathbf{i}\omega_1 t} + C_3^{(4)}e^{-\mathbf{i}\omega_1 t}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(C_3^{(5)}e^{\mathbf{i}\omega_2 t} + C_3^{(6)}e^{-\mathbf{i}\omega_2 t}\right)\right\},$$
$$x_2 = \mathbf{Re}\left\{C_3^{(1)} + C_3^{(2)}t - \frac{2m_1}{m_2}\left(C_3^{(5)}e^{\mathbf{i}\omega_2 t} + C_3^{(6)}e^{-\mathbf{i}\omega_2 t}\right)\right\}, \qquad (22)$$
$$x_3 = \mathbf{Re}\left\{C_3^{(1)} + C_3^{(2)}t + \left(C_3^{(3)}e^{\mathbf{i}\omega_1 t} + C_3^{(4)}e^{-\mathbf{i}\omega_1 t}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(C_3^{(5)}e^{\mathbf{i}\omega_2 t} + C_3^{(6)}e^{-\mathbf{i}\omega_2 t}\right)\right\}.$$

Įvedus normalines modas sprendinys atrodytų taip:

$$x_1 = b_1 + b_2 t + b_3\cos(\omega_1 t + \phi_1) + b_4\cos(\omega_2 t + \phi_2),$$
$$x_2 = b_1 + b_2 t - \frac{2m_1}{m_2}b_4\cos(\omega_2 t + \phi_2),$$
$$x_3 = b_1 + b_2 t - b_3\cos(\omega_1 t + \phi_1) + b_4\cos(\omega_2 t + \phi_2).$$

Normalinė moda, kurios kampinis dažnis $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$, aprašo kraštinių atomų svyravimus, kai centrinis atomas nejuda. Normalinė moda, kurios kampinis dažnis $\omega_2 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1} + \frac{2k_2}{m_2}}$, aprašo centrinio atomo svyravimus kraštinių atomų atžvilgiu.

CO_2 molekulės atveju apskaičiuojame stangrumo koeficiento k_1 vertę abiem dažniams. Kai dažnis $\nu_1 = 3{,}998 \cdot 10^{13}$ Hz, stangrumo koeficientas

$$k_1 = 4\pi^2 \nu_1^2 m_1 \approx 1676 \text{ N/m.}$$

Kai dažnis $\nu_2 = 7{,}042 \cdot 10^{13}$ Hz, stangrumo koeficientas

$$k_1 = \frac{4\pi^2 \nu_2^2 m_1 m_2}{2m_1 + m_2} \approx 1418 \text{ N/m.}$$

Iš mūsų išnagrinėto molekulės mechaninio modelio plaukia, kad abiem atvejais stangrumo koeficiento vertė turi būti ta pati. Vidutinė stangrumo koeficiento vertė

$$\bar{k}_1 \approx 1547 \text{ N/m.}$$

Interpretuojant apskaičiuotų stangrumo koeficiento verčių nesutapimą kaip nukrypimus nuo vidutinės vertės, apskaičiuojame santykinę paklaidą. Santykinė paklaida

$$\frac{\Delta k_1}{\bar{k}_1} = \frac{|k_1 - k_2|}{k_1 + k_2} \approx 0{,}083$$

neviršija 10%. Kvantmechaniniai tyrimai rodo, kad ir tokioje paprastoje molekulėje atomai svyruoja ne vienoje tiesėje. To nepaisymas ir laikytinas pagrindine tokios žymios paklaidos atsiradimo priežastimi.

100. 1. Viso Saulės paviršiaus išspinduliuojama energija yra $4\pi R_S^2 \cdot \sigma T_S^4$. Ši energija pereina per sferos, kurios spindulys lygus Žemės nuotoliui nuo Saulės *R*, paviršių. Jos intensyvumas (energijos tankis) $4\pi R_S^2 \cdot \sigma T_S^4 / 4\pi R^2$.

Palydovas yra sfera, kuri sugeria

$$\pi r_{pal}^2 \cdot \frac{4\pi R_S^2 \sigma T_S^4}{4\pi R^2}$$

ir išspinduliuoja $4\pi r_{pal}^2 \sigma T_{pal}^4$. Sulyginę sugertą ir išspinduliuotąją energijas, gauname:

$$T_{pal} = T_S \sqrt{\frac{R_S}{2R}} = 289\,\text{K} = 16\,^0\text{C}.$$

2. Reikia suskaičiuoti, kokia sugertosios energijos dalis priklauso spektrui žemiau 1200 K.

$$\eta_{rib} = \frac{1200\,\text{K}}{6000\,\text{K}} = 0{,}2 << 1.$$

Galios dalis yra

$$\delta = \frac{\int_0^{\eta_{rib}} \frac{\eta^3\, d\eta}{e^\eta - 1}}{\int_0^{\eta_\infty} \frac{\eta^3\, d\eta}{e^\eta - 1}} \approx \frac{\int_0^{\eta_{rib}} \eta^2\, d\eta}{\pi^4/15} = \frac{\eta_{rib}^3/3}{\pi^4/15} = 4{,}1 \cdot 10^{-4}.$$

Taigi palydovas yra šaltas lyginant su 1200 K ir į palydovo kaip juodojo kūno išspinduliuojamą energiją neatsižvelgsime. Tada energijos balansas yra išreiškiamas taip:

$$4\pi r_{pal}^2 \sigma T_{pal}^4 = \delta \pi r_{pal}^2 \frac{4\pi R_S^2 \sigma T_S^4}{4\pi R^2}.$$

Tai pakoreguoja anksčiau gautąją palydovo temperatūrą daugikliu $\delta^{1/4}$.

$T_{pal} = (4{,}1 \cdot 10^{-4})^{1/4} \cdot 289$ K = 41 K.

3. Pilnutinė sugertoji energija

$$\delta \pi r_{\text{pal}}^2 \frac{4\pi R_{\text{S}}^2 \sigma T_{\text{S}}^4}{4\pi R^2} = 0{,}5 \text{ W},$$

yra maža (jos galima nepaisyti) lyginant su $P_{\text{vid}} = 1$ kW. Tada energijos balansas tampa:

$$P_{\text{vid}} = 4\pi r_{\text{pal}}^2 \sigma T_{\text{pal}}^4 \quad \text{ir gaunama:} \quad T_{\text{pal}} = 274 \text{ K} \quad (\eta = 4{,}38).$$

Griežtai kalbant, tai netikslu, nes 274 K temperatūros juodojo kūno spinduliavime 33 % energijos tenka spektro daliai virš ribinio 1200 K dažnio. Tai reiškia, kad palydovas turi būti karštesnis, kad išspinduliuotų visą 1 kW galią žemesnių už ribinį dažnių srityje. Galutinė integralinė lygtis yra

$$\left(\frac{\eta}{4{,}38}\right)^4 = \int_0^{\eta} \frac{\eta^3\, d\eta}{\mathrm{e}^{\eta} - 1} \Big/ \frac{\pi^4}{15},$$

kuri gali būti išspręsta skaitmeniškai, naudojant iteracijas. Tikrasis sprendinys yra $\eta = 3{,}80$ ir atitinka 316 K temperatūrą.

4. Tokie dažniai negalimi, nes tai prieštarauja termodinamikos principui. Paaiškinti galima naudojant detaliosios pusiausvyros principą, iš kurio seka: kad būtų pusiausvyra, sugertis ir išspinda duotojoje dažnių srityje turi tiksliai sutapti. Nereikia painioti su tuo, kad atspindys ir sugertis gali labai skirtis. Jei tokie dažai egzistuotų, tai uždaroje sistemoje galima būtų gauti dviejų kūnų temperatūrų skirtumą, t. y. amžinąjį variklį.

5. Danga turi būti pralaidi aukštesnių dažnių spinduliuotei (Saulės spektro maksimumo ir uodegos sritis), bet atspindėti, ir tuo būdu izoliuoti (atskirti), žemų dažnių spinduliuotę.

XXIV tarptautinė fizikos olimpiada, 1993 m. (JAV)

101. 1) Panaudojame elektringos laidžios sferos sukurto elektrinio lauko išraišką. Sferos išorėje laukas toks pat, kaip ir taškinio krūvio, t. y.

$$E_0 = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Čia Q_0 - sferos elektrinis krūvis, r - atstumas iki sferos centro. Imdami r lygiu Žemės spinduliui (r=R=6,4·10^6 m), nustatome, kad

$$Q_0 = 4\pi\varepsilon_0 R^2 E_0 = 6{,}84 \cdot 10^5 \text{ C}.$$

Kadangi E_0 nukreiptas žemyn, Q_0 yra neigiamas.

Paviršinio krūvio tankio modulis

$$\sigma_0 = \frac{Q_0}{4\pi R^2} = \varepsilon_0 E_0 = 1{,}33 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^2.$$

2) Taikydami kuloninio lauko formulę laukui h=100 m aukštyje, nustatome, kad

$$Q = 4\pi\varepsilon_0 r_1^2 E.$$

Imdami $r_1 \approx R$, apskaičiuojame Q. Tada h=100 m storio atmosferos sluoksnio krūvis

$$Q' = |Q_0 - Q|,$$

o vidutinis tūrinis krūvio tankis tame sluoksnyje

$$\tau = \frac{Q'}{V}.$$

Atmosferos sluoksnio tūris V gali būti išreikštas taip:

$$V \approx 4\pi R^2 h.$$

Tada

$$\tau = \frac{|Q_0 - Q|}{4\pi R^2 h} = \frac{\varepsilon_0 |E_0 - E|}{h} = 4{,}43 \cdot 10^{-12} \text{ C/m}^3.$$

τ yra teigiamas, nes lauko stiprio absoliutinė vertė kylant aukštyn mažėja.

3) Panagrinėkime ploną dh storio atmosferos sluoksnį prie Žemės paviršiaus. Per laiką dt=dh/v teigiamieji krūvininkai iš to sluoksnio patenka ant Žemės paviršiaus, todėl Žemės krūvis pakinta dydžiu

$$\mathrm{d}Q = -4\pi R^2 e n_+ \,\mathrm{d}h = -4\pi R^2 e n_+ v \,\mathrm{d}t.$$

Kadangi

$$v = kE = \frac{kQ}{4\pi\varepsilon_0 R^2},$$

gauname tokią diferencialinę lygtį:

$$\mathrm{d}Q = -\frac{e n_+ k Q}{\varepsilon_0}\mathrm{d}t,$$

arba padaliję abi puses iš Q:

$$\frac{\mathrm{d}Q}{Q} = -\frac{e n_+ k}{\varepsilon_0}\mathrm{d}t.$$

Gautąją lygtį integruojame parinkdami integravimo konstantą taip, kad būtų tenkinama pradinė sąlyga, t. y. Q=Q_0, kai t=0, ir gauname:

$$Q = Q_0 \mathrm{e}^{-\frac{e n_+ k}{\varepsilon_0} t}.$$

Ieškomąjį laiką t_1, reikalingą neutralizuoti pusę Žemės paviršiaus krūvio, apskaičiuojame pagal lygtį

$$\frac{Q_0}{2} = Q_0 \mathrm{e}^{-\frac{e n_+ k}{\varepsilon_0} t_1}.$$

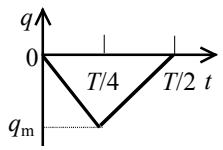
Apskaičiavę gauname:

$$t_1 = \frac{\varepsilon_0 \ln 2}{e n_+ k} = 426 \text{ s}=7{,}1 \text{ min}.$$

4) Sukantis diskui kvadrantai palaipsniui patenka į Žemės elektrinį lauką, ir jų viršutiniame paviršiuje indukuojamas neigiamas krūvis. Kadangi plotas didėja proporcingai posūkio kampui, krūvio dydis taip pat proporcingai didėja, t. y. nuo laiko priklauso tiesiškai. Kai išpjovos diske savo padėtimi sutampa su kvadrantais, indukuotasis krūvis q_m esti didžiausias. Toliau

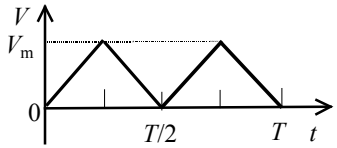
sukantis diskui kvadrantai ekranuojami, todėl krūvis tiesiškai mažėja iki nulio.

Ieškomoji priklausomybė pateikta 101.1 pav. grafike.

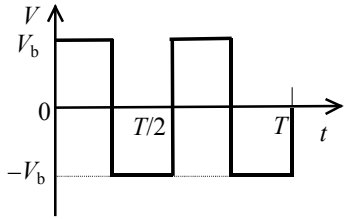


101.1 pav.

5) Kai T_a<<CR, t. y. kai tarp kvadrantų ir Žemės įjungiama didelė varža ir didelės talpos kondensatorius, kvadrantuose indukuojantis krūviui q priešingo ženklo krūvis kaupiasi kondensatoriuje, o per varžą srovė beveik neteka. Todėl kondensatoriaus krūvis, taip pat ir jo įtampa V per laiką T/4 tiesiškai didėja nuo 0 iki V_m=q_m/C. Toliau sukantis diskui V tiesiškai mažėja iki 0. Kito pusperiodžio metu procesas kartojasi. V(t) priklausomybės grafikas pateiktas 101.2 pav.



101.2 pav.



101.3 pav.

Kai T_b>>CR, t. y. kai įjungiama maža varža ir mažos talpos kondensatorius, kvadrantuose kaupiantis krūviui q priešingo ženklo krūvis nuteka į Žemę. Taigi šiuo atveju varža R teka srovė I=dq/dt, ir varžos gnybtuose atsiranda įtampa V_b=IR=Rdq/dt. Kadangi

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{q_m}{T/4} = \frac{4q_m}{T},$$

ketvirtį periodo įtampa esti pastovi ir lygi

$$V_b = \frac{4q_m R}{T_b}.$$

Kitą periodo ketvirtį krūvis kvadrantuose mažėja, srovė teka priešinga kryptimi, todėl įtampa $V=-V_b$. Antrą periodo pusę procesas kartojasi. $V(t)$ priklausomybės grafikas šiuo atveju pateiktas 101.3 pav.

Įtampų santykis

$$\frac{V_m}{V_b}=\frac{\frac{q_m}{C}}{\frac{4q_mR}{T_b}}=\frac{T_b}{4CR}.$$

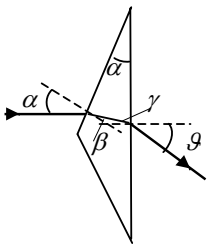
6) Tarkime, $CR>>T$, t. y. patenkinama 5 punkto a) sąlyga. Tada $V_m=q_m/C$. Krūvį q_m apskaičiuojame pasinaudoję tuo, kad paviršinis krūvio tankis kvadrante yra toks pat, kaip Žemės paviršiuje. Todėl $q_m=\sigma_0 S$. Čia

$$S=\pi(r_2^2-r_1^2)$$

yra kvadrantų paviršiaus plotas. Taigi

$$U_m=\frac{q_m}{C}=\frac{\pi\sigma_0(r_2^2-r_1^2)}{2C}=\frac{\pi\varepsilon_0E_0(r_2^2-r_1^2)}{2C}=1\ \text{mV}.$$

102. 1. Pasinaudojame lūžio rodiklio apibrėžtimi. Iš 102.1 pav. gaunama:



102.1 pav.

$$\sin\alpha/\sin\beta=n;\ \sin\vartheta/\sin\gamma=n;$$
$$\gamma=\alpha-\beta.$$

Tada

$$\vartheta=\arcsin(n\sin\gamma)=$$
$$=\arcsin\{n\sin[\alpha-\arcsin(\sin\alpha/n)]\}.$$

2. Jėgos impulsas, kuriuo šviesos pluoštas veikia prizmę, yra lygus pluošto judesio kiekio pokyčiui. Vieno fotono judesio kiekis $p=h\nu/c$ prieš sąveiką su prizme ir po sąveikos absoliučia verte nepakinta. Pakinta tik jo kryptis, fotonas nukrypsta kampu ϑ. Todėl vieno fotono judesio kiekio pokyčio komponentės yra:

$$\Delta p_x=p(1-\cos\vartheta);\ \Delta p_y=p\sin\vartheta.$$

Kai į paviršių per laiką Δt krinta N fotonų, paviršių veikiančiosios jėgos komponentės užrašomos taip:

$$F_x=N\Delta p_x/\Delta t=Np(1-\cos\vartheta)/\Delta t;\quad F_y=Np\sin\vartheta/\Delta t.$$

Kadangi per sekundę į vienetinį plotą krintančios šviesos energija (intensyvumas) I, vienetiniam plotui tenkantis fotonų skaičius $n=I/h\nu$. Tada

$$\frac{np}{\Delta t}=\frac{I}{h\nu}\frac{h\nu}{c}=\frac{I}{c}.$$

Šviesos intensyvumas nepastovus, todėl jėgai F gauti turime imti vidutinį intensyvumą ir dauginti iš krintančiosios šviesos pluoštelio skerspjūvio ploto:

$$F_x=\frac{S\bar{I}}{c}(1-\cos\vartheta);\quad F_y=\frac{S\bar{I}}{c}\sin\vartheta.$$

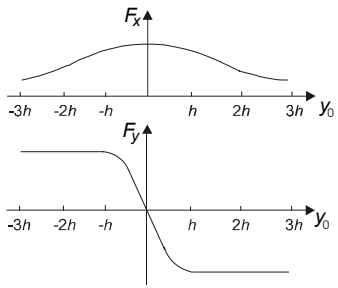
Šviesa, krintanti į viršutinę ir apatinę prizmės dalis, atlinksta skirtingai: $\vartheta_v\neq\vartheta_a$. Prizmę veikiančiosios jėgos komponentę x nustatome imdami apatinę ir viršutinę dalis veikiančiųjų jėgų komponenčių x sumą, o komponentę y – imdami skirtumą. Kadangi šviesos intensyvumas viršutinėje ir apatinėje pluoštelio dalyse priklauso nuo atstumo iki ašies x, tai atitinkamai prizmės paviršiaus daliai tenkančio intensyvumo vidutinė vertė yra lygi intensyvumui šviesos, krintančios į tos paviršiaus dalies vidurį.

Kai $h\le y_0\le 3h$, gaunama:

$$F_x=\frac{I_0 2hw}{c}\left(1-\frac{y_0}{4h}\right)(1-\cos\vartheta)=\frac{I_0 w}{2c}(4h-y_0)(1-\cos\vartheta);$$

$$F_y=\frac{I_0 hw}{2c}\sin\vartheta.$$

Kai $0\le y_0\le h$, gaunama:



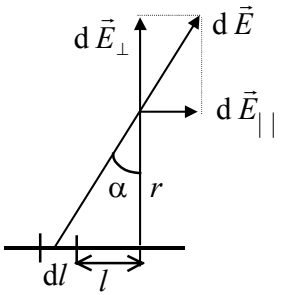
102.2 pav.

$$F_x = \frac{I_0 w}{4ch}(7h^2 - y_0^2)(1-\cos\vartheta);$$

$$F_y = \frac{I_0 w y_0 (2h - y_2)}{4ch}\sin\vartheta.$$

Kai y_0 imamas priešinga kryptimi, jėga F nustatoma analogiškai. F_x visada nukreipta šviesos sklidimo kryptimi, o F_y – ašies x linkme, t. y. priešinga y_0 krypčiai. F_x ir F_y pavaizduojame grafiškai (102.2 pav.), pateikdami jėgą santykiniais vienetais. Maksimali F_x vertė yra $7I_0 h w(1 - \cos\vartheta)/4c$, o maksimalią (pastoviąją) F_y vertę išreiškiame kaip $I_0 h w \sin\vartheta/4c$.

103. 1) Imame tašką atstumu r nuo vielos ašies (žr. 103.1 pav.). Elemente dl esantis krūvis τdl nagrinėjamame taške sukuria lauką $\mathrm{d}\vec{E}$, kurio stiprio modulis



103.1 pav.

$$\mathrm{d}E = \frac{\tau\,\mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon_0(r^2 + l^2)}.$$

Vektoriškai sudėjus visų elementų dl sukuriamus laukus $\mathrm{d}\vec{E}$, vielai lygiagrečiųjų dedamųjų suma lygi nuliui. Todėl laukas $\vec{E}$ yra statmenas vielai. Be to kairėje ir dešinėje nuo taško esančios vielos dalys sukuria vienodus laukus. Todėl

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}E_\perp = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{d}E_\perp = 2\int_0^{+\infty} \cos\alpha\,\mathrm{d}E = 2\int_0^{+\infty} \frac{\tau\cos\alpha\,\mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon_0(r^2 + l^2)}.$$

Integralą skaičiuosime pakeisdami integravimo kintamąjį. Pagal 103.1 pav. $l = r\mathrm{tg}\alpha$. Diferencijuojame šią išraišką:

$$\mathrm{d}l = \frac{r\,\mathrm{d}\alpha}{\cos^2\alpha}.$$

Taip pat iš 103.1 pav. nustatome, kad

$$r^2 + l^2 = \frac{r^2}{\cos^2\alpha}.$$

Be to kai $l \to 0$, $\alpha \to 0$, o kai $l \to \infty$, $\alpha \to \pi/2$. Įrašę šias išraiškas gauname:

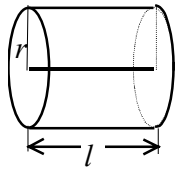
$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}\int_0^{\pi/2} \cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}\sin\alpha\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

Tą pačią formulę galime gauti ir pasinaudodami Gauso dėsniu. Imame bet kokio l ilgio vielos atkarpą supantį r spindulio cilindrą (103.2 pav.). Kadangi $\vec{E}$ statmenas vielai, lauko srautas pro cilindro galus yra lygus nuliui. Taigi

$$2\pi r l E = \frac{\tau l}{\varepsilon_0}$$

arba

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$



103.2 pav.

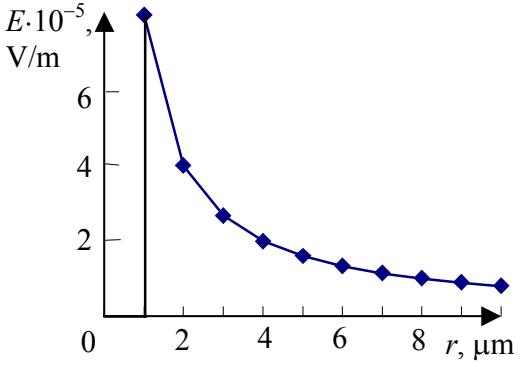
Kai $r < r_0$, vielos viduje E=0. Sudarome E priklausomybės nuo atstumo r lentelę ir nubrėžiame grafiką (103.3 pav.).

r, μm	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$E\cdot10^{-5}$, V/m	0	7,9	4,0	2,6	2,0	1,6	1,3	1,1	1,0	0,9

2) Pagreitintas elektronas įgyja kinetinę energiją $W_0 = eV_0 = 2\cdot10^4$ eV$=3{,}2\cdot10^{-15}$ J, jo pradinis greitis

$$v_0 = \sqrt{\frac{2W_0}{m}} = 8{,}38\cdot10^7 \text{ m/s}.$$

Vielos elektriniame lauke keičiantis elektrono atstumui iki vielos, kinta ir jo energija. Energijos pokytis ΔW_p išreiškiamas formule



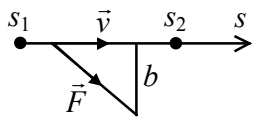
103.3 pav.

$$\Delta W_p = \int_{r_1}^{r_2} eE\,\mathrm{d}r = \frac{e\tau}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{e\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

Čia r_1 ir r_2 - pradinis ir galinis elektrono atstumai iki vielos. Tardami, kad iš pradžių elektronas yra toli nuo vielos, jo atstumas yra $r_1=L=0{,}3$ m, o $r_2=10^{-6}$ m (vielos spindulys, t. y. mažiausias galimas atstumas), apskaičiuojame $\Delta W_p=1{,}6\cdot10^{-18}$ J. Kaip matome, $\Delta W_p \ll W_0$, todėl elektrono greičio absoliutinė vertė gali būti laikoma pastovia.

Elektrono judėjimo kryptį keičia greičiui statmena jėgos dedamoji. Kadangi nuokrypio kampas θ yra mažas, galima manyti, kad $\vec{v}$ yra beveik lygiagretus su $\vec{v}_0$. Tada (žr. 103.4 pav.)

$$F_\perp = eE_\perp = \frac{e\tau}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{b^2+s^2}}\cdot\frac{b}{\sqrt{b^2+s^2}} = \frac{e\tau b}{2\pi\varepsilon_0(b^2+s^2)}.$$



103.4 pav.

Mažas nuokrypio kampas θ apskaičiuojamas pagal formulę

$$\theta = \frac{\Delta p}{p_0}.$$

Čia Δp - jėgos $F_\perp$ sukeltas judesio kiekio

pokytis, t. y.

$$\Delta p = \int_{s_1}^{s_2} F_\perp\,\mathrm{d}t.$$

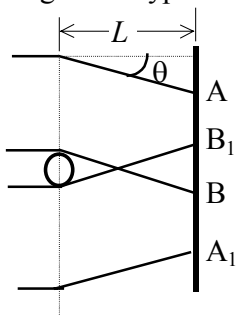
Įrašę $F_\perp$ ir $\mathrm{d}t=\mathrm{d}s/v_0$ išraiškas, integralą galime apskaičiuoti. Kadangi F greitai mažėja didėjant s, integravimo rėžius galima imti begalinius: $s_1=-\infty$, $s_2=\infty$. Be to integruojamoji funkcija simetriška taško $s=0$ atžvilgiu, todėl galima integruoti nuo 0 iki ∞ ir gautą vertę padauginti iš 2. Taigi

$$\Delta p = 2\int_0^\infty \frac{e\tau b\,\mathrm{d}s}{2\pi\varepsilon_0(b^2+s^2)v_0} = \frac{e\tau b}{\pi\varepsilon_0 v_0}\cdot\frac{1}{b}\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}(s/b)}{1+(s/b)^2} =$$

$$= \frac{e\tau}{\pi\varepsilon_0 v_0}\operatorname{arctg}\left(\frac{s}{b}\right)\Bigg|_0^\infty = \frac{e\tau}{\pi\varepsilon_0 v_0}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{e\tau}{2\varepsilon_0 v_0},$$

$$\theta = \frac{e\tau}{2\varepsilon_0 v_0 p_0} = \frac{e\tau m}{2\varepsilon_0 p_0^2} = \frac{e\tau m}{2\varepsilon_0 2mE_0} = \frac{e\tau}{4\varepsilon_0 eV_0} = \frac{\tau}{4\varepsilon_0 V_0} = 6{,}21\cdot10^{-5}\ \text{rad}.$$

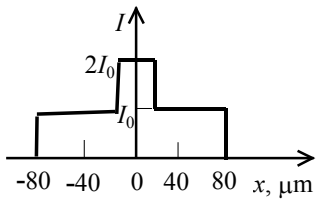
3) Atkreipsime dėmesį, kad θ nepriklauso nuo b. Todėl viela pradinį elektronų pluoštelį padalija į du – viršutinį ir apatinį, kuriuos viela nukreipia kampu θ priešingomis kryptimis: viršutinį į apačią, o apatinį į viršų. Kadangi F labai greitai mažėja didėjant s, tarkime, kad pluoštelis pakeičia kryptį plokštumoje, lygiagrečioje su ekranu ir einančioje per vielos ašį. Susidaro 103.5 pav. parodytas vaizdas: į sritį AB_1 patenka tik viršutinis pluoštelis, todėl ten intensyvumas lygus I_0, į sritį BB_1 patenka abu pluošteliai, ten intensyvumas $2I_0$, BA_1 srityje intensyvumas I_0.



103.5 pav.

Sričių matmenys tokie:

$$AB_1 = BA_1 = (b_{max} - L\theta) - (L\theta - r_0) = b_{max} + r_0 - 2L\theta = 6{,}37\cdot10^{-5}\ \text{m},$$



103.6 pav.

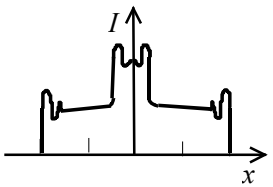
$$BB_1 = 2(L\theta - r_0) = 3{,}53 \cdot 10^{-5}\ \text{m}.$$

Apskaičiuotasis intensyvumo ekrane pasiskirstymas pavaizduotas 103.6 pav.

4) Kvantinėje mechanikoje judančiam elektronui priskiriama de Broilio banga, kurios ilgis

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2emV_0}} = 8{,}67 \cdot 10^{-12}\ \text{m}.$$

Matome, kad λ kur kas mažesnis už vielos storį ir pluoštelio matmenis. Todėl galime manyti, kad šalia vielos pralekiantieji elektronai difraguos kaip nuo didelės kliūties krašto. Be to, apribojant pradinio pluoštelio matmenis, turi būti panaudojama diafragma, nuo kurios kraštų elektronai taip pat difraguos. Taigi vietoj klasikinės mechanikos numatyto vaizdo su griežtomis ribomis susidarys vaizdas su neryškiais kraštais. 103.7 pav. parodyti maksimumai ir minimumai ne tikru masteliu, nes tikrasis jų plotis turėtų būti $\Delta x \approx \sqrt{\lambda L} = 1{,}6 \cdot 10^{-10}$ m, taigi jie yra kur kas siauresni. Kraštinių maksimumų matmenų nurodyti negalime, nes nežinomas atstumas iki elektronų pluoštelio matmenis ribojančios diafragmos. Tikslus difrakcinis vaizdas galėtų būti sudarytas panaudojant Korniu spiralę. Išsamiai aprašyti kvantmechaninį elektronų judėjimą būtų galima išsprendus Šrėdingerio lygtį.



103.7 pav.

XXV tarptautinė fizikos olimpiada, 1994 m. (Kinija)

106. Kadangi dalelė juda šviesos greičiu, veikiant jėgai jos greitis nemažėja, mažėja tik kinetinė energija ir judesio kiekis. Jos koordinatės kitimą išreiškia formulė

$$x = ct.$$

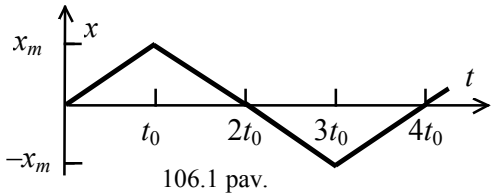
Maksimalus poslinkis nuo koordinačių pradžios – posūkio taško koordinatė x_m – nustatoma iš sąlygos

$$p_0c = fx_m, \quad x_m = p_0c/f.$$

Posūkio tašką dalelė pasiekia per laiką

$$t_0 = x_m/c = p_0/f.$$

Vėliau dalelės judėjimo kryptis pakinta į priešingą, dalelė šviesos greičiu juda link koordinačių pradžios, jos judesio kiekis didėja ir koordinačių pradžioje tampa p_0, tik nukreiptas priešinga linkme. Toliau dalelė juda neigiama x ašies kryptimi ir pasiekia tašką $-x_m$. Tada dalelės judėjimo kryptis pakinta į priešingą, ir dalelė per laiką t_0 pasiekia pradinę padėtį, ir procesas kartojasi. Koordinatės kitimo grafikas pateiktas 106.1 pav.



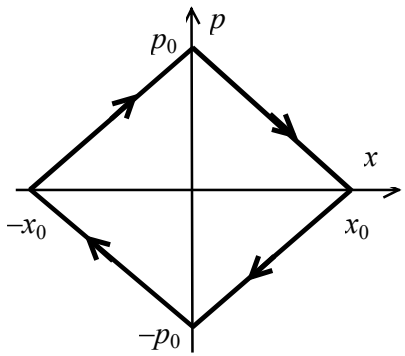
106.1 pav.

Judesio kiekio kitimą nustatome iš energijos tvermės dėsnio

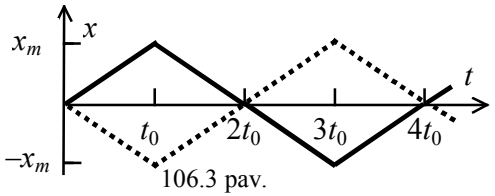
$$E = pc + fx,$$

$$p_0c = pc + fx, \quad p = p_0 - fx/c.$$

Pasiekus posūkio tašką greičio kryptis pradeda didėti priešinga kryptimi, o perėjus koordinačių pradžią – mažėti. Judesio kiekio kitimas pavaizduotas 106.2 pav.

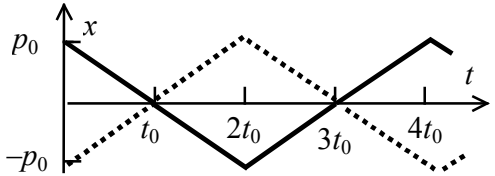


106.2 pav.



106.3 pav.

2) Kvarkų judėjimo grafikai analogiški 106.1 pav., jie pateikti 106.3 pav. Vieno kvarko koordinatės pavaizduotos ištisine linija, kito – punktyrine. Analogiškai 106.4 pav.



106.4 pav.

pavaizduoti kvarkų judesio kiekiai. Parametrų išraiškos tokios:

$$x_m=Mc/2f, \quad p_0=Mc/2.$$

Didžiausias atstumas tarp kvarkų

$$d=2x_m=Mc/f.$$

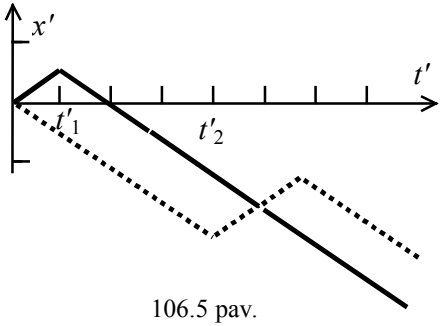
3) Sistemoje S' kaip ir sistemoje S kvarkai juda šviesos greičiu c, todėl tiesių krypties koeficientai yra tokie patys, kaip ir 106.3 pav. Reikia tik nustatyti posūkio taškų koordinates. Gauname:

$$t'_1=\frac{t_0-vx_m/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\frac{M}{2f}\cdot\frac{1-v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad t'_1=\frac{M}{4f},$$

$$x'_{1m}=ct'_1, \quad x'_{1m}=\frac{Mc}{4f},$$

$$t'_2=\frac{t_0+vx_m/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\frac{M}{2f}\cdot\frac{1+v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad t'_2=\frac{M}{f},$$

$$x'_{2m}=ct'_2, \quad x'_{2m}=\frac{Mc}{f}.$$



106.5 pav.

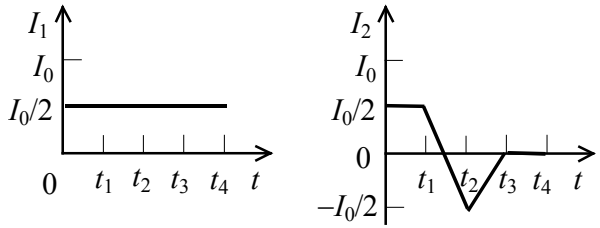
Analogiškai nustatome kitų posūkio taškų koordinates. Koordinačių grafikai pateikti 106.5 pav.

4) Ieškomoji energija apskaičiuojama pagal formulę

$$E=M'c^2=\frac{Mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

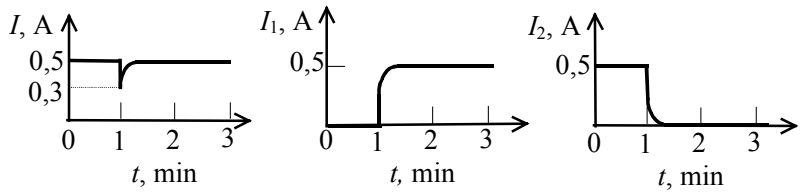
$$E=175 \text{ MeV}.$$

107. 1) Kai $t_1 \le t \le t_3$, jungiklio varža r=0, magneto ritės įtampa lygi 0, o srovė pastovi: $I_1=I_0/2$, $I_2=I-I_1=I-I_0/2$. Kai $t_3 \le t \le t_4$, I_2=0, įtampa jungiklyje $V=I_2r$=0, I_1 ir I_2 nekinta, o $I=I_0/2$. Taigi $I_1=I_0/2$, I_2=0. Grafikai pateikti 107.1 pav.



107.1 pav.

2) Kai $0 \le t \le 1$ min, r =0, I_1=0, $I_2=I-I_1$=0,5 A. Kai r staiga padidėja iki r_n, I sumažėja nuo $\mathcal{E}/R$ iki $\mathcal{E}/(R+r_n)$ (nes I_1 negali staiga pakisti dėl magneto saviindukcijos) ir pamažu vėl įgyja ankstesnę vertę. Esant pateiktoms vertėms $\mathcal{E}/R=I$=0,5 A, r_n=5 Ω, R=7,5 Ω, I sumažėja iki $\mathcal{E}/(R+r_n)$ =0,3 A. Iki t=2 min I, I_1 ir I_2 vėl esti jau įgiję ankstesnes vertes, nes relaksacijos trukmė $\tau=L(R+r_n)/(Rr_n)\approx 3$ s <<2 min. Kai 2 min<t<3 min, r=0, todėl I_1



107.2 pav.

ir I_2 nekinta: I_1=0,5 A, I_2=0. Rezultatai pateikti 107.2 pav. grafikuose.

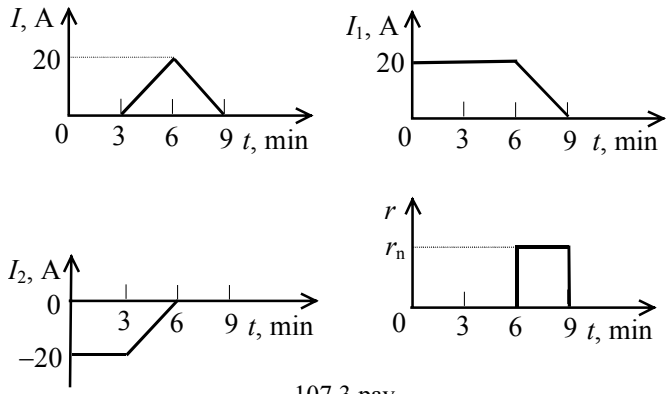
3) Procesas vykdomas keliais etapais.

Pirmasis etapas. Įjungiamas jungiklis J ir keičiant varžą R srovės stipris I padidinamas iki I_1, t. y. iki 20 A. Kadangi jungiklio varža r=0, I_1 nepakinta, o I_2 pakinta nuo –20 A iki 0.

Antrasis etapas. Jungiklio varža pakeičiama iš 0 į r_n. Srovė I laipsniškai mažinama iki 0, žiūrint, kad būtų I_2<0,5 A. Magneto saviindukcijos elektrovara $V_m=L\cdot dI_1/dt$. Kai L=10 H, r_n=5 Ω, sąlyga I_2<0,5 A patenkinama, jei dI_1/dt<0,25 A/s, t. y. jeigu I_2 mažinamas ne sparčiau kaip 15 A per minutę.

Baigiamasis etapas. Kai V_m=0, jungiklio varža padaroma lygi nuliui ir išjungiamas jungiklis J.

Etapais nurodyti kitimai, tariant, kad dI_1/dt<0,1 A/s, parodyti 107.3 pav.



107.3 pav.

108. 1) Laikome, kad diskas B prieš susidūrimą nejuda ir smūgis stangrus. Panaudojame judesio kiekio ir energijos tvermės dėsnius.

$$m_A\vec{v} = m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B,$$

$$m_A v^2/2 = m_A v_A^2/2 + m_B v_B^2/2,$$

čia v_A ir v_B – diskų greičiai po susidūrimo. Išskaidome greičius į dedamąsias – statmeną vektoriui AB (žymėsime ženkleliu ⊥) ir lygiagrečią tam vektoriui (žymėsime ||).

$$m_A v_\perp = m_A v_{A\perp} + m_B v_{B\perp},$$

$$m_A v_\parallel = m_A v_{A\parallel} + m_B v_{B\parallel},$$

$$m_A v^2 = m_A\left(v_{A\perp}^2 + v_{A\parallel}^2\right) + m_B\left(v_{B\perp}^2 + v_{B\parallel}^2\right).$$

Kadangi sąlygoje duota $v_{A\perp}=v_{B\perp}$, gauname

$$v_{A\perp} = v_{B\perp} = \frac{m_B}{m_A + m_B} v_\perp.$$

Iš antros lygties išreiškiame $v_{B\parallel}=m_A(v_\parallel - v_{A\parallel})/m_B$ ir įrašome ją ir $v_{A\perp}$ į trečią lygtį. Gauname

$$m_A v^2 = m_A\left(\frac{m_A v_\perp}{m_A + m_B}\right)^2 + m_A v_{A\parallel}^2 + m_B\left(\frac{m_A v_\perp}{m_A + m_B}\right)^2 +$$

$$+ m_B \frac{m_A^2\left(v_\parallel^2 - 2v_\parallel v_{A\parallel} + v_{A\parallel}^2\right)}{m_B^2}.$$

Panaudoję sąlygą $v^2 = v_\perp^2 + v_\parallel^2$ pertvarkome gautą lygtį:

$$(m_A + m_B)v_{A\parallel}^2 - 2m_A v_\parallel v_{A\parallel} + \frac{v_\parallel^2 m_A^2 - v^2 m_B^2}{m_A + m_B} = 0.$$

Jos sprendinys

$$v_{A\parallel} = \frac{m_A v_\parallel \pm m_B v}{m_A + m_B} = \frac{(m_A \cos\alpha \pm m_B)v}{m_A + m_B},$$

čia α – kampas tarp vektoriaus AB ir x ašies:

$$\sin\alpha = b/(R_A + R_B).$$

Toliau išreiškiame

$$v_{B\|} = \frac{m_A(\cos\alpha \mp 1)v}{m_A + m_B}.$$

Viršutinis ženklas pateiktoje formulėje negalimas: tada $v_{B\|}$ būtų neigiamas, t.y., diskas B po susidūrimo judėtų prieš vektoriaus AB kryptį. Taigi ir $v_{A\|}$ išraiškoje tinkamas tik apatinis ženklas. Išreiškiame x ir y dedamąsias:

$$v_{Ax} = v_{A\perp}\sin\alpha + v_{A\|}\cos\alpha = \frac{m_A(R_A+R_B) - m_B\sqrt{(R_A+R_B)^2 - b^2}}{(m_A+m_B)(R_A+R_B)}v,$$

$$v_{Ay} = v_{A\perp}\cos\alpha - v_{A\|}\sin\alpha = \frac{m_B b}{(m_A+m_B)(R_A+R_B)}v,$$

$$v_{Bx} = v_{A\perp}\sin\alpha + v_{B\|}\cos\alpha = \frac{m_A\left(R_A+R_B+\sqrt{(R_A+R_B)^2-b^2}\right)}{(m_A+m_B)(R_A+R_B)}v, \qquad 2)$$

$$v_{By} = v_{A\perp}\cos\alpha - v_{B\|}\sin\alpha = -\frac{m_A b}{(m_A+m_B)(R_A+R_B)}v.$$

Diskų kinetines energijas išreiškiame per apskaičiuotas greičių dedamąsias:

$$E_A = \frac{m_A}{2}\left(v_{A\perp}^2 + v_{A\|}^2\right) =$$

$$= \frac{m_A\left((m_A^2+m_B^2)(R_A+R_B) - 2m_A m_B\sqrt{(R_A+R_B)^2-b^2}\right)}{2(m_A+m_B)^2(R_A+R_B)}v^2,$$

$$E_B = \frac{m_B}{2}\left(v_{A\perp}^2 + v_{B\|}^2\right) = \frac{m_A^2 m_B\left(R_A+R_B+\sqrt{(R_A+R_B)^2-b^2}\right)}{(m_A+m_B)(R_A+R_B)}v^2.$$

Galima įsitikinti, kad $E_A + E_B = mv^2/2$.

XXVI tarptautinė fizikos olimpiada, 1995 m. (Australija)

111. a) Fotono energija $E=hf$, o masė $m=hf/c^2$. Jo gravitacinė energija atstumu d nuo žvaigždės paviršiaus

$$E_g = \frac{GMhf}{c^2(R+d)},$$

o jo energijos pokytis nutolstant nuo žvaigždės atstumu d

$$\Delta E_g = \frac{GMhf}{c^2}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+d}\right).$$

Kadangi $\Delta E = h\Delta f$, imdami $d\to\infty$, gauname

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{GM}{Rc^2}.$$

b) Dėl Doplerio efekto fotono dažnis pakinta dydžiu

$$\Delta f = fv/c = f\beta,$$

o dėl gravitacinės energijos pokyčio

$$\Delta f = \frac{\Delta E_g}{h} = \frac{GMf}{c^2}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+d}\right).$$

Todėl

$$\beta = \frac{GM}{c^2}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+d}\right).$$

Pažymėkime $\beta = 1/x$, $d = 1/y$. Tada gauname

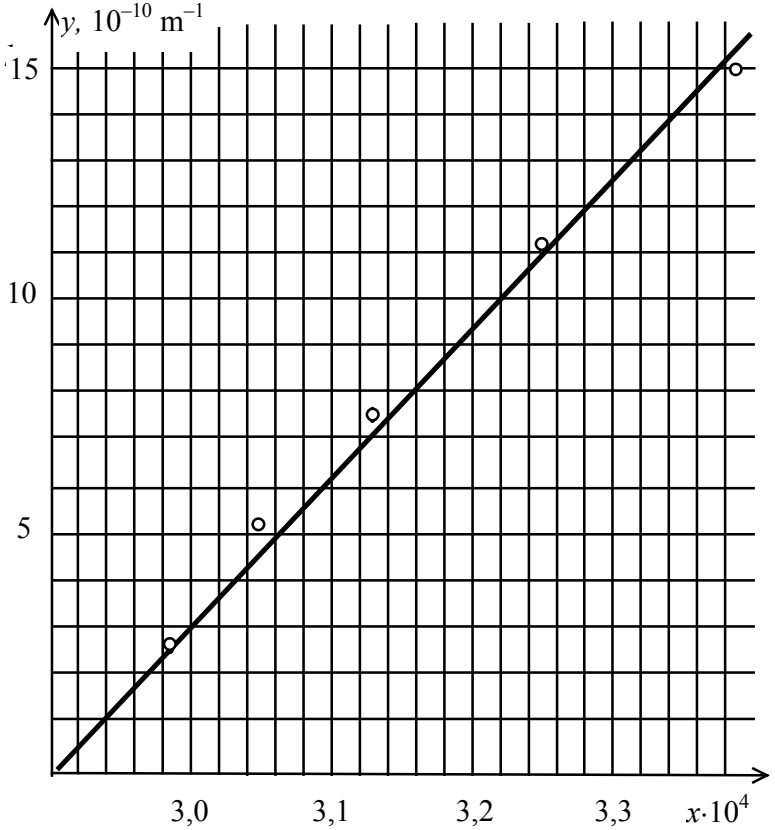
$$y = \frac{GM}{R^2c^2}x - \frac{1}{R}.$$

Tai – tiesės lygtis, jos taškus apskaičiuojame pagal pateiktas β ir d vertes.

$\beta\cdot10^{-5}$	3,352	3,279	3,195	3,077	2,955
$d\cdot10^{8}$ m	38,90	19,98	13,32	8,99	6,67
$x\cdot10^{4}$	2,983	3,050	3,130	3,250	3,384
$y\cdot10^{-10}$ m^{-1}	2,571	5,005	7,508	11,12	14,99

Gautus taškus pažymime grafike ir per juos nubrėžiame tiesę.

Tos tiesės susikirtimo su x ašimi taškas x_0=2,91·10^4, jos krypties koeficientas $k = 3{,}19 \cdot 10^{-13}$.



111 pav.

Tada ieškomiesiems parametrams apskaičiuoti gauname lygtis

$$\frac{GM}{R^2c^2}x_0 - \frac{1}{R} = 0,$$

$$\frac{GM}{R^2c^2} = k.$$

Tų lygčių sprendiniai R=1,08·10^8 m, M=4,99·10^{30} kg. Grafinis būdas nėra tikslus, norint pasiekti didesnį tikslumą brėžinys turėtų būti žymiai padidintas. Nustatant k ir x_0 mažiausių kvadratų metodu gauname R=1,17·10^8 m, M=5,48·10^{30} kg.

c) i) Panaudojame reliatyvistinius energijos ir judesio kiekio tvermės dėsnius:

$$m_0c^2 + \Delta E = hf + c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2}, \quad p = hf / c.$$

Iš pateiktų lygybių išreiškiame fotono energiją:

$$hf = \frac{\Delta E\left(2m_0c^2 + \Delta E\right)}{2\left(m_0c^2 + \Delta E\right)}.$$

ii) Kadangi hf_0=ΔE, gauname

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{hf_0 - hf}{hf} = \frac{\Delta E}{2\left(m_0c^2 + \Delta E\right)}.$$

Imdami ΔE=–E_n(1–1/4), gauname

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{13{,}6 \cdot 2^2 \cdot 3/4}{4 \cdot 938 \cdot 10^6 + 13{,}6 \cdot 2^2 \cdot 3/4} = 1{,}09 \cdot 10^{-8}.$$

Dėl gravitacinės energijos gaunamas dažnio pokytis

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{GM}{Rc^2} = \frac{6{,}7 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}48 \cdot 10^{30}}{1{,}17 \cdot 10^8 \cdot \left(3 \cdot 10^8\right)^2} = 3{,}5 \cdot 10^{-5}.$$

112. Spindulio sklidimo kryptis terpėse, kuriose sklidimo greičiai skirtingi, sieja lūžio rodiklis

$$n = \frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta_0} = \frac{c}{c_0}.$$

Iš čia

$$\sin\vartheta = \frac{c_0 + bz}{c_0}\sin\vartheta_0. \qquad (1)$$

Liniją, kuria sklinda spindulys, aprašo lygtis

$$z = z(x), \qquad (2)$$

o sklidimo kryptį – liestinės krypties koeficientas

$$k = \frac{\mathrm{d}z(x)}{\mathrm{d}x} = \mathrm{tg}(90^0 - \vartheta) = \mathrm{ctg}\,\vartheta. \qquad (3)$$

Kreivės (3) kreivumo spindulys

$$R = \frac{\left\{1 + \left(\frac{\mathrm{d}z(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{\mathrm{d}^2 z(x)}{\mathrm{d}x^2}\right|}. \qquad (4)$$

Iš (1) ir (3) plaukia, kad

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\{c_0^2 - (c_0 + bz)^2 \sin^2 \vartheta_0\}^{\frac{1}{2}}}{(c_0 + bz)\sin\vartheta_0}, \qquad (5)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{bc_0^2}{(c_0 + bz)^3 \sin^2 \vartheta_0}, \qquad (6)$$

$$R = \frac{c_0}{b\sin\vartheta_0}. \qquad (7)$$

Iš (7) matyti, kad kreivumo spindulys nepriklauso nuo koordinačių, tad $z(x)$ aprašo spindulio R apskritimo lanką.

b) Garso bangos nuo paviršiaus neatsispindės, jeigu apskritimo lanko aukštis bus ne didesnis už z_s. Apskritimo lanko aukštis

$$h = R - R\sin\vartheta_0 = c_0 \frac{1 - \sin\vartheta_0}{b\sin\vartheta_0}. \qquad (8)$$

Imant $h = z_s$, gauname

$$\vartheta_0 = \arcsin\left\{\frac{c_0}{c_0 + bz_s}\right\}. \qquad (9)$$

c) Garso bangų spindulio, sklindančio iš taško S kampu ϑ_0, sankirtos su x ašimi pirmojo taško H atstumą nuo taško S išreiškia formulė

$$SH = X = 2R\cos\vartheta_0 = \frac{2c_0}{b\,\mathrm{tg}\,\vartheta_0},$$
$$\mathrm{tg}\,\vartheta_0 = \frac{2c_0}{bX}. \qquad (10)$$

Akivaizdu, kad taške H spindulys pereina į apatinę sritį ir joje nubrėžia tokį pat lanką, kaip ir viršutinėje srityje, todėl gauname spindulio sankirtos su x ašimi taškų seką su pastoviu žingsniu H. Į tašką H patenka spinduliai, kertantys tame taške x ašį pirmą kartą, antrą kartą ir t. t. Todėl kampams ϑ_0, atitinkantiems tokius spindulius, gauname sąlygą

$$\vartheta_0 = \mathrm{arctg}\left\{\frac{2nc_0}{bX}\right\},\ n = 1,2,\ldots \qquad (11)$$

d) Paėmę formulėje (11) parametro n vertes $n = 1, 2, 3, 4$ gauname tokias ϑ_0 vertes:

$$\vartheta_0 = 86{,}19^{\mathrm{o}};\ 88{,}09^{\mathrm{o}};\ 88{,}73^{\mathrm{o}};\ 89{,}05^{\mathrm{o}}.$$

e) Garso sklidimo kreivės lanku trukmę galima užrašyti taip:

$$t = \int_S^H \frac{\mathrm{d}l}{c}, \qquad (12)$$

čia $\mathrm{d}l$ – kreivės lanko elementas. Lanko elementą išreiškę kampo elementu gauname

$$\mathrm{d}l = Rd\vartheta = \frac{c_0}{b\sin\vartheta_0} d\vartheta. \qquad (13)$$

Iš lūžio rodiklio apibrėžimo turime

$$c = c_0 \frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta_0}. \qquad (14)$$

Panaudoję (13) ir (14) formules apskaičiuojame integralą (12)

$$t = -\frac{2}{b}\ln\mathrm{tg}\frac{\vartheta_0}{2}. \qquad (15)$$

Imdami punkte d) pateiktus duomenis, kai $n = 1$, gauname

$$t = 6{,}655 \text{ s}.$$

Tiesiai sklindančiam spinduliui gauname

$$t = \frac{X}{c_0} = 6{,}667 \text{ s}.$$

Matome, kad tiesiai sklindantis spindulys į tašką H patenka vėliau.

113. a) Iš Archimedo dėsnio

$$2\pi a^2 ld = \left(\alpha a^2 - a^2 \sin\alpha\cos\alpha\right) l\rho .$$

Iš čia

$$2\alpha - \sin 2\alpha = 4\pi \frac{d}{\rho}. \qquad (1)$$

b) Plūdei nukrypus mažu atstumu z nuo pusiausvyros padėties, ją veikianti Archimedo jėga pakinta, atsiranda jėga, besistengianti grąžinti plūdę į pusiausvyros padėtį. Tos jėgos didumas

$$F = 2gzla\rho \sin\alpha = kz. \qquad (2)$$

Visos plūdės masė

$$m = 2\pi a^2 ld . \qquad (3)$$

Kadangi jėga F proporcinga z, tai plūdė svyruos apie pusiausvyros padėtį cikliniu dažniu

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g\rho \sin\alpha}{\pi a d}}. \qquad (3)$$

Bet plūdei judant, juda ir aplink ją esantis vanduo. Tai įskaitoma, imant didesnę svyruojančio kūno masę, kaip nurodyta sąlygoje. Atsižvelgę į tai ir panaudoję dar formulę (1), svyravimų dažniui gauname formulę

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3g\sin\alpha}{a(2\alpha - \sin 2\alpha)}}. \qquad (4)$$

c) Kad plūdė svyruoja sukinėdamasi apie cilindro ašį gauname nepaisydami vandens judėjimo. Kai strypas nukrypęs nuo vertikalės mažu kampu ϑ, plūdę veikia jėgos momentas

$$M = 2\pi a^3 ldg\vartheta = b\vartheta. \qquad (5)$$

Jis verčia plūdę svyruoti cikliniu dažniu

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{b}{J}}, \qquad (6)$$

čia J – plūdės inercijos momentas sukimosi ašies atžvilgiu. Masės m ir spindulio R vienalyčio cilindro inercijos momentas simetrijos ašies atžvilgiu $J_c = \frac{mR^2}{2}$, plono masės m strypo inercijos momentas masės centro atžvilgiu $J_s = \frac{ml^2}{12}$, čia l – strypo ilgis. Bet sukimosi ašis yra atstumu $2a$ nuo strypo masės centro. Tad visos plūdės inercijos momentas

$$J = \frac{29}{6}\pi a^4 ld. \qquad (7)$$

Sukamųjų svyravimų kampiniam dažniui gauname formulę

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{12g}{29a}}. \qquad (8)$$

d) Svyravimų periodų santykiui gauname formulę

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{\frac{4(2\alpha - \sin 2\alpha)}{29\sin\alpha}}. \qquad (9)$$

Įstatę duotas periodų vertes kampo α atžvilgiu gauname transcendentinę lygtį

$$2\alpha - \sin 2\alpha - \frac{29}{9}\sin\alpha = 0. \qquad (10)$$

Šios lygties apytikslis sprendinys

$$\alpha \approx 91^{\circ}.$$

Iš (8) formulės surandame a vertę

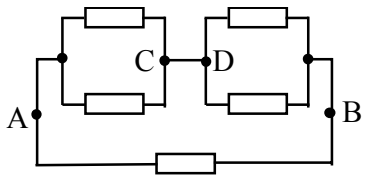
$$a \approx 0{,}23 \text{ m}.$$

Panaudoję šią a vertę ir (1) sąryšį apskaičiuojame plūdės masę

$$m = a^3 \rho(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha) \approx 20{,}5 \text{ kg}.$$

XXVII tarptautinė fizikos olimpiada, 1996 m. (Norvegija)

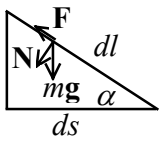
116. a) Rezistorių sujungimo lygiavertė schema parodyta 116.1 pav. Iš jos matyti, kad varža tarp taškų A ir C, taip pat tarp B ir D, yra 0,5 Ω. Taigi varžą tarp A ir B sudaro dvi nuosekliai sujungtos varžos po 0,5 Ω kiekviena ir lygiagrečiai prijungta 1 Ω varža, kitaip tariant, dvi lygiagrečiai sujungtos 1 Ω varžos. Galutinai apskaičiavę gauname R=0,5 Ω.



116.1 pav.

b) Slidininkui slystant jo potencinės energijos pokytis yra lygus trinties jėgos atliktam darbui. Gauname

$$mgh = \int_B^A F dl,$$



116.2 pav.

čia m – slidininko masė, g – laisvojo kritimo pagreitis, h – ieškomasis aukščių skirtumas, F trinties jėga, dl – elementarusis kelias. Iš brėžinio gauname:

$$F = \mu N = \mu mg\cos\alpha, \quad dl = ds/\cos\alpha, \quad Fdl = \mu mgds.$$

Taigi,

$$mgh = \int_B^A Fdl = \mu mg\int_B^A ds = \mu mgs, \quad h = \mu s.$$

c) Perrašome sąlygoje duotą temperatūros priklausomybę nuo laiko tokiu pavidalu:

$$\frac{T^4}{T_0^4} = 1 + a(t - t_0).$$

Jeigu per laiko intervalą Δt temperatūra padidėja nuo T iki $T+\Delta T$, tai

$$\frac{(T+\Delta T)^4}{T_0^4} = 1 + a(t + \Delta t - t_0) = \frac{T^4}{T_0^4} + a\Delta t\ .$$

ΔT galime paimti pakankamai mažą, kad skleisdami $(T+\Delta T)^4$ paliktume tik pirmojo laipsnio narius:

$$\frac{(T+\Delta T)^4}{T_0^4} \approx \frac{T^4}{T_0^4} + 4\frac{T^3}{T_0^4}\Delta T.$$

Iš paskutinių dviejų lygčių gauname:

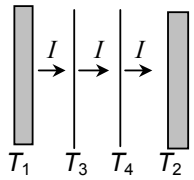
$$\Delta T = \frac{T_0^4}{4T^3} a\Delta t\ .$$

Pagal šiluminės talpos apibrėžimą:

$C_p\ \Delta T = P\ \Delta t$, tai $C_p = \dfrac{4PT^3}{aT_0^4}$, t.y. metalo šiluminės talpos priklausomybė nuo temperatūros yra kubinė.

d) Esant stacionariai būsenai, šilumos srautai yra vienodi:

$$I = \sigma\left(T_1^4 - T_3^4\right); \quad I = \sigma\left(T_3^4 - T_4^4\right); \quad I = \sigma\left(T_4^4 - T_2^4\right).$$



116.3 pav.

Susumavus šias išraiškas, gaunama:

$$3I = \sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right) = I_0\ .$$

Čia I_0 yra šilumos srautas, kai nėra šilumos ekrano. Tada santykis $\xi = I_0/I$ įgyja vertę $\xi = 3$.

e) Galima tarti, kad magnetinį lauką kuria du cilindro formos laidininkai, nes

jų srovės bendroje abiem laidininkams srityje kompensuoja viena kitą. Srovės kiekviename laidininke tankis

$$j = \frac{I}{\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right)D^2} = \frac{24I}{\left(2\pi + 3\sqrt{3}\right)D^2}.$$

Pagal suminės srovės dėsnį magnetinio srauto tankis cilindrinio laidininko taške, nutolusiame atstumu r nuo laidininko ašies, yra

$$B = \frac{\mu_0 j \pi r^2}{2\pi r} = \frac{\mu_0 j r}{2},$$

o jo dedamosios stačiakampėje koordinačių sistemoje

$$B_x = B\frac{y}{r} = \frac{\mu_0 j y}{2},$$

$$B_y = B\frac{x}{r} = \frac{\mu_0 j x}{2}.$$

Sudedant abiejų laidininkų, kuriais teka srovės $\pm I$, magnetinių srautų tankius, B_x dedamosios pasinaikina dėl simetrijos, o sumuodami B_y dedamąsias atsižvelgsime į tai, kad cilindrų ašys yra taškuose $x=\mp D/4$ atitinkamai. Taigi

$$B = B_y = \frac{\mu_0 j}{2}\left[(x + D/4) - (x - D/4)\right] = \frac{\mu_0 j D}{4} = \frac{6\mu_0 I}{\left(2\pi + 3\sqrt{3}\right)D},$$

t. y. laukas yra vienalytis ir nukreiptas y ašies kryptimi.

117. a) Elektrono įgyjama potencinė energija eU virsta kinetine energija. Taigi

$$\frac{1}{2}mv^2 = eU \text{ (nereliatyvistinis artutinumas)},$$

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - mc^2 = eU \text{ (reliatyvistinis artutinumas)}.$$

Iš šių lygčių nustatome elektrono greitį prie anodo:

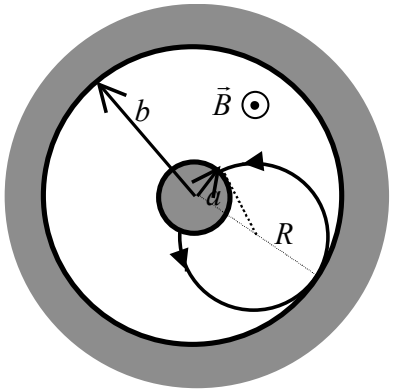
$$v = \begin{cases} \sqrt{\frac{2eU}{m}} \text{ (nereliatyvistinis artutinumas)}, \\ c\sqrt{1 - \left(\frac{mc^2}{mc^2 + eU}\right)^2} \text{ (reliatyvistinis artutinumas)}. \end{cases} \quad (1)$$

b) Kai U=0, elektronas juda vienalyčiame magnetiniame lauke. Jį veikianti Lorenco jėga yra statmena jo greičiui, todėl elektronas juda apskrita trajektorija. Greitis v_0 yra nukreiptas apskritimo liestinės kryptimi, o apskritimo spindulys R toks, kad Lorenco jėgą atstotų įcentrinė jėga:

$$eBv_0 = \frac{mv_0^2}{R},$$

t. y.

$$B = \frac{mv_0}{eR}. \quad (2)$$



117 pav.

Iš 117 pav. matome, kad ribiniu atveju

$$\sqrt{a^2 + R^2} = b - R.$$

Pakėlę kvadratu gauname:

$$a^2 + R^2 = b^2 - 2aR + R^2,$$

o iš čia

$$R = \frac{b^2 - a^2}{2b}.$$

Šią R išraišką įrašę į (2), apskaičiuojame ribinį magnetinio srauto tankį B_0:

$$B_0 = \frac{mv_0}{eR} = \frac{2bmv_0}{e(b^2 - a^2)}.$$

c) Esant ne tik magnetiniam, bet ir elektriniam laukui atsiranda Lorenco jėgos azimutinė dedamoji F_φ ir jos sąlygojamas sukamasis momentas $F_\varphi r$. Lorenco jėgos azimutinę

dedamąją sukelia radialioji greičio dedamoji $v_r = \mathrm{d}r/\mathrm{d}t$. Taigi judesio kiekio momento kitimo sparta

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = eBr\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}.$$

Pastarąją lygybę galima užrašyti taip:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L - \frac{eBr^2}{2}\right) = 0.$$

Iš čia darome išvadą, kad dydis

$$C = L - \frac{eBr^2}{2} \qquad (3)$$

nekinta judant elektronui, o sąlygoje minimas bematis koeficientas $k=1/2$.

d) Užrašykime konstantos C išraišką pagal (3) formulę prie pat vidinio cilindro paviršiaus ir esant didžiausiam atstumui r_m:

$$0 - \frac{1}{2}eBa^2 = mvr_m - \frac{1}{2}eBr_m^2.$$

Iš čia nustatome, kad

$$v = \frac{eB(r_m^2 - a^2)}{2mr_m}.$$

e) Esant ribiniam magnetiniam laukui, imame $r_m = b$, o elektrono greitį prie išorinio cilindro

$$v = \frac{eB(b^2 - a^2)}{2mb}.$$

Pasinaudodami (1) formule išreiškiamu sąryšiu tarp v ir U, užrašome:

$$\frac{eB(b^2 - a^2)}{2mb} = \sqrt{\frac{2eU}{m}}.$$

Iš čia nustatome, kad

$$B_0 = \frac{2b}{b^2 - a^2}\sqrt{\frac{2mU}{e}}.$$

f) Lorenco jėga neturi magnetiniam laukui lygiagrečiosios dedamosios, todėl elektrono greičio v_B dedamoji išlieka pastovi. Jos sąlygojamas elektrono poslinkis cilindrų ašies kryptimi neturi jokios įtakos nagrinėjant sąlygoje iškeltą klausimą.

Tegul v - elektrono, kuris vos pasiekia anodą, azimutinė dedamoji. Pagal energijos tvermės dėsnį

$$\frac{1}{2}m(v_B^2 + v_\varphi^2 + v_r^2) + eU = \frac{1}{2}m(v_B^2 + v^2).$$

Iš čia nustatome, kad

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2 + \frac{2eU}{m}}. \qquad (4)$$

Užrašę konstantos C išraišką (3) šiomis sąlygomis ties abiem cilindrais, gauname:

$$mv_\varphi a - \frac{1}{2}eB_0a^2 = mvb - \frac{1}{2}eB_0b^2,$$

o įrašę čia v pagal (4), galime apskaičiuoti B_0:

$$B_0 = \frac{2m(vb - v_\varphi a)}{e(b^2 - a^2)} = \frac{2mb}{e(b^2 - a^2)}\left[\sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2 + \frac{2eU}{m}} - \frac{v_\varphi a}{b}\right]. \qquad (5)$$

118. a) Masės centro atstumą $l = OC$ randame iš sąlygos

$$l \cdot M = (L - l)\cdot M_M,\ l = LM_M/(M + M_M),\ l = 4{,}63\cdot 10^6\ \mathrm{m}.$$

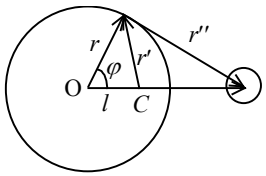
Matome, kad taškas C yra Žemės viduje. Sukantis apie tašką C Žemei ir Mėnuliui įcentrinį pagreitį suteikia jų gravitacija. Imdami Žemę gauname

$$M\omega^2 l = \frac{\gamma M M_M}{L^2},\ \omega = \sqrt{\frac{\gamma(M + M_M)}{L^3}},\ \omega = 2{,}67\cdot 10^{-6}\ \mathrm{s}^{-1}.$$

b) Besisukančioje koordinačių sistemoje su įcentrine jėga susijusi potencinė energija

$$U_\omega = -m\omega^2 r'^2/2.$$

Visa potencinė energija



118 pav.

$$U = U_Ž + U_M + U_\omega,$$

$$U_Ž = -\frac{\gamma M m}{r},\ U_M = -\frac{\gamma M_M m}{r''}.$$

Kadangi

$$r'^2 = r^2 + l^2 - 2rl\cos\varphi,\quad r'' = \sqrt{L^2 + r^2 - 2Lr\cos\varphi},$$

$$U = -\frac{\gamma m M}{r} - \frac{\gamma m M_M}{\sqrt{L^2 + r^2 - 2Lr\cos\varphi}} - \frac{m\omega^2\left(r^2 + l^2 - 2rl\cos\varphi\right)}{2}.$$

c) Vandens paviršių atitinka sąlyga U=const. Pažymėję $r=R+h$ ir panaudodami sąlygas $L>>R>>h$ supaprastiname U išraišką. Pakeičiame

$$\frac{1}{\sqrt{L^2 + r^2 - 2Lr\cos\varphi}} \approx \frac{1}{L}\left(1 + \frac{r}{L}\cos\varphi - \frac{r^2}{2L^2}\left(3\cos^2\varphi - 1\right)\right),$$

$$\frac{1}{r} \approx \frac{1}{R} - \frac{2h}{R^2},\quad r^2 \approx R^2 + 2Rh,\quad \omega^2 = \frac{\gamma\left(M + M_M\right)}{L^3},\quad l = \frac{M_M L}{M + M_M}.$$

Tada gauname:

$$\frac{U}{\gamma m} = -\frac{M}{R} - \frac{Mh}{R^2} - \frac{M_M}{L} - \frac{M_M r}{L^2}\cos\varphi + \frac{M_M r^2}{2L^3}\left(3\cos^2\varphi - 1\right) -$$

$$\frac{\left(M + M_M\right)R^2}{2L^3} - \frac{\left(M + M_M\right)Rh}{L^3} - \frac{M_M^2}{2\left(M + M_M\right)L} + \frac{M_M r}{L^2}\cos\varphi.$$

Gautoje išraiškoje ketvirtas ir paskutinis nariai sutraukiami, pirmas, trečias , šeštas ir aštuntas nariai pastovūs, o antras narys

daug didesnis už septintą, todėl pastarąjį atmetame. Taigi konstanta turi būti reiškinys

$$-\frac{M_M h}{R^2} + \frac{M_M r^2}{2L^3}\left(3\cos\varphi - 1\right).$$

Pakeitę $r \approx R$ gauname

$$h(\varphi) = \frac{M_M R^4}{2ML^3}\left(3\cos\varphi - 1\right).$$

h_{max} gaunamas, kai φ=0 arba $\varphi=\pi$, h_{min} – kai $\varphi=\pi/2$. Tada

$$\Delta h = h_{\max} - h_{\min} = \frac{3M_M R^4}{2ML^3},\quad \Delta h = 0{,}53\ \text{m}.$$

XXVIII tarptautinė fizikos olimpiada, 1997 m. (Kanada)

119. a) Svyruoklės svyravimo dažnis išreiškiamas formule

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}},$$

čia k – svyruoklės stangrumo koeficientas, m – kūno masė. Spyruoklės pusės stangrumo koeficientas k_1=2 k, todėl

$$f_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1}{m}} = f\sqrt{2}.$$

b) Atomo Boro radiusas išreiškiamas formule

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}.$$

Imant vietoje m elektrono masę m_e arba miuono masę m_μ gauname:

$$a_1 = a_0\frac{m_e}{m_\mu} = \frac{a_0}{207},\quad a_1 = 2{,}56.10^{-13}\ \text{m}.$$

c) Jei Saulės spinduliuotės galia P, o Žemės orbitos spindulys R, tada T gali būti randama iš skleidžiamos ir sugertos spinduliuočių lygybės:

$$(1-r)\frac{P}{4\pi R^2}\pi R_ž^2 = 4\pi R_ž^2 \varepsilon \sigma T^4 .$$

Čia r – Žemės atspindžio faktorius, $R_ž$ – Žemės spindulys, ε – jos emisijos geba, σ – Stefano konstanta. Spinduliuotės galia yra temperatūros funkcija (iš anksto nežinoma), bet galima laikyti, kad jos priklausomybė nuo temperatūros yra neženkli.

Gaunama, kad $T \sim \sqrt{1/R}$, todėl 1 % sumažėjus R, temperatūra padidėja 0,5 %, t. y. 1,4 K. Taigi T_1 = 288,4 K.

d) Idealiųjų dujų lygtis N molekulių: $pV = NkT$. Dviejuose vienoduose tūriuose yra vienodas molekulių skaičius, jei slėgis ir temperatūra yra vienodi, todėl dujų tankis yra tiesiai proporcingas vidutinei molekulių masei tame tūryje.

Sausam orui, kurio molekulių vidutinė masė m_d:

$$\rho = \rho_d = m_d \frac{N_d}{V} = \frac{m_d p}{k T} .$$

Drėgnam orui, kurio molekulių vidutinė masė m_m:

$$\rho_m = m_d \frac{N_m}{V} = \frac{m_m p}{k T} .$$

M masės sauso oro molekulių skaičius yra tiesiai proporcingas tai masei:

$N_d \propto \dfrac{\mathrm{M}}{28{,}8}$, o tos pačios masės masės drėgno oro:

$$N_m \propto 0{,}02\,\frac{M}{18} + 0{,}98\,\frac{\mathrm{M}}{28{,}8} .$$

$N_m = N_d$, tai

$$\frac{\rho_m}{\rho_d} = \frac{\mathrm{M}'}{\mathrm{M}} = \frac{1}{28{,}8\left(\dfrac{0{,}02}{18} + \dfrac{0{,}98}{28{,}8}\right)} = 0{,}9881$$

ir $\rho' = \rho_m = 0{,}9925\rho_d = 1{,}2352$ kg/m^3.

e) Sraigtasparniui kybant ore jo sraigtas sudaro oro srautą, nukreiptą žemyn. Srautui sudaryti reikalinga galia

$$P = Fv,$$

čia F – sraigto traukos jėga, lygi sraigtasparnio sunkiui, v – vidutinis oro srauto greitis. Pažymėję oro srauto skerspjūvio plotą S, oro tankį ρ, iš antrojo Niutono dėsnio gauname

$$Fdt = vdm,\ dm = \rho Svdt,\ F = \rho Sv^2,\ v = \sqrt{F/\rho S}.$$

Tada

$$P = F\sqrt{F/\rho S}.$$

Pažymime sraigtasparnio tiesinius matmenis L ir pasinaudojame tuo, kad $F \sim L^3$, $S \sim L^2$, todėl $P \sim L^{3,5}$. Imant $L' = L/2$, gauname $P' = P/2^{3,5} = 0{,}0884P$.

120. a) Iš brėžinio gauname

$$B/A = -0{,}008A + 9{,}65,\ \ B = 9{,}65A - 0{,}008.$$

Ieškomąją A_α vertę gauname iš sąlygos

$$B_{A_\alpha} \le B_{A_\alpha} + B_4.$$

Įstatę B_A išraišką ir B_4 vertę, gauname

$$9{,}65A_\alpha - 0{,}008A_\alpha^{\ 2} \le 9{,}65(A_\alpha - 4) - 0{,}008(A_\alpha - 4)^2 + 25{,}0,$$

$$A_\alpha \ge 192{,}5$$

Kadangi A – sveikas skaičius, gauname A=193.

b) i) Išreiškę $N=A-Z$, gauname

$$B = a_\mathrm{v}A - a_\mathrm{n}A^{2/3} - a_\mathrm{c}Z^2A^{-1/3} - a_\mathrm{a}(A-2Z)^2/A.$$

Norėdami nustatyti Z_{max}, imame

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}Z} = 0,\ -2a_\mathrm{c}ZA^{-1/3} + 4a_\mathrm{a}(A-2Z)/A = 0,$$

$$Z_\mathrm{max} = \frac{2a_\mathrm{a}}{a_\mathrm{c}A^{-1/3} + 4a_\mathrm{a}/A}.$$

ii) Pagal užduotyje i) gautą formulę gauname Z_{max}=79,2. Kadangi Z yra sveikas skaičius, imame Z_{max}=79. Tada N=121, taigi Z ir N nelyginiai, ir B išraiškoje $\delta = a_\mathrm{p}A^{-3/4}$. Gauname

$B|_{Z=79}$=1609,2 MeV. Dar patikriname vertes Z_{max}=78 ir Z_{max}=80, nes tada δ ženklas priešingas. Gauname $B|_{Z=78}$=1609,55 MeV, $B|_{Z=80}$=1610,12 MeV. Kaip matome, didžiausią B gauname imdami Z=80.

iii) Apskaičiuojame pateiktų branduolių ryšio energijas:

B_J=1104,66 MeV, B_{Xe}=1104,79 MeV, B_{Cs}=1103,17 MeV.

Energijos pokyčius reakcijose apskaičiuojame pagal formulę

$$\Delta E = Z_1 E_p + (A - Z_1)E_n - B_1 - Z_2 E_p - (A - Z_2)E_n +$$

$$+B_2 - (Z_2 - Z_1)E_\beta = (Z_2 - Z_1)(E_n - E_p - E_\beta) + B_2 - B_1.$$

Gauname:

1) $^{128}_{53}\mathrm{J} \to ^{128}_{54}\mathrm{Xe} + \beta^-,\ \Delta E = 2{,}49\ \mathrm{MeV},$

$^{128}_{54}\mathrm{Xe} \to ^{128}_{55}\mathrm{Cs} + \beta^-,\ \Delta E = -0{,}02\ \mathrm{MeV}.$

2) $^{128}_{54}\mathrm{Xe} \to ^{128}_{53}\mathrm{J} + \beta^+,\ \Delta \mathrm{E} = -2{,}49\ \mathrm{MeV},$

$^{128}_{55}\mathrm{Cs} \to ^{128}_{54}Xe + \beta^+,\ \Delta E = 0{,}02\ \mathrm{MeV}.$

3) $^{128}_{53}\mathrm{J} \to ^{128}_{55}\mathrm{Cs} + 2\beta^-,\ \Delta E = 2{,}47\ \mathrm{MeV}.$

4) $^{128}_{54}\mathrm{Xe} + \beta^- \to ^{128}_{53}\mathrm{J},\ \Delta E = -2{,}47\ \mathrm{MeV},$

$^{128}_{55}\mathrm{Cs} + \beta^- \to ^{128}_{54}\mathrm{Xe},\ \Delta E = -0{,}02\ \mathrm{MeV}.$

Teigiamas rezultatas reiškia, kad vykstant atitinkamai reakcijai energija yra išskiriama. Taigi, vyks reakcijos J→Xe, J→Cs, ir Cs→Xe.

121. Jėga $\vec{F}$, pakeičianti oro greitį dydžiu Δv, jei per laiką dt prateka jo masė dm:

$$\vec{F} = \Delta\vec{v}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}.$$

Mūsų atveju santykis:

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = xl\rho l = \frac{\pi}{4}l^2\rho v.$$

Greičio pokyčio vertikalioji komponentė

$$\Delta v_V = v\sin\varepsilon,$$

o horizontalioji:

$$\Delta v_H = v(1-\cos\varepsilon).$$

Tada jėgos vertikaliosios komponentės (L) ir horizontaliosios komponentės (D_1) išraiškos yra tokios:

$$L = \frac{\pi}{4}\rho v^2 l^2 \sin\varepsilon,$$

$$D_1 = \frac{\pi}{4}\rho v^2 l^2 (1-\cos\varepsilon).$$

Galia, reikalinga lėktuvui skristi tiesiai, gali būti išreikšta taip:

$$P = Dv = (D_1 + D_2)v,$$

kur jėga D_2 atsiranda dėl pratekančio oro judesio kiekio pokyčio:

$$D_2 = v_1\frac{\mathrm{d}m_1}{\mathrm{d}t} - v_2\frac{\mathrm{d}m_2}{\mathrm{d}t}.$$

Kadangi sparnas nei sugeria, nei išskiria oro, tai

$$\frac{\mathrm{d}m_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m_2}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = xl\rho l.$$

Pakeičiame $v_1 = v$, o $v_2 = v - \Delta v$, tai:

$$D_2 = vxl\rho x - (v - \Delta v)xlqv = xl\rho l^2 - xl\rho l^2 + v\Delta vxl\rho =$$

$$= \frac{\pi l}{4}l\rho\rho v\Delta = \frac{\pi f}{4A}\rho v^2 l^2.$$

Dėl sparno pakrypimo mažu kampu ε reikia atsižvelgti į narį su cos ε:

$$\frac{\pi f}{4A}\rho v^2 l^2 \cos\varepsilon \approx \frac{\pi f}{4A}\rho v^2 l^2\left(1-\frac{\varepsilon^2}{2}\right) = \frac{\pi f}{4A}\rho v^2 l^2 + O(\varepsilon^2 f).$$

Kaip matome, ankstesnis sprendinys yra pakankamai tikslus.

Visa jėga D priklauso nuo ε ir koeficiento f:

$$D = \frac{\pi}{4}\rho v^2 l^2\left((1-\cos\varepsilon)+\frac{f}{A}\right) \approx \frac{\pi}{4}\rho v^2 l^2\left(\frac{1}{2}\sin^2\varepsilon + \frac{f}{A}\right).$$

Aproksimuojant D gali būti išreikšta lėktuvo mase, greičiu ir sparnų matmenimis. Kad lėktuvas galėtų skristi, keliančioji jėga turi būti lygi jo sunkiui:

$$L = Mg = \frac{\pi}{4}\rho v^2 l^2 \sin\varepsilon; \qquad \sin\varepsilon = \frac{4Mg}{\pi\rho v^2 l^2}.$$

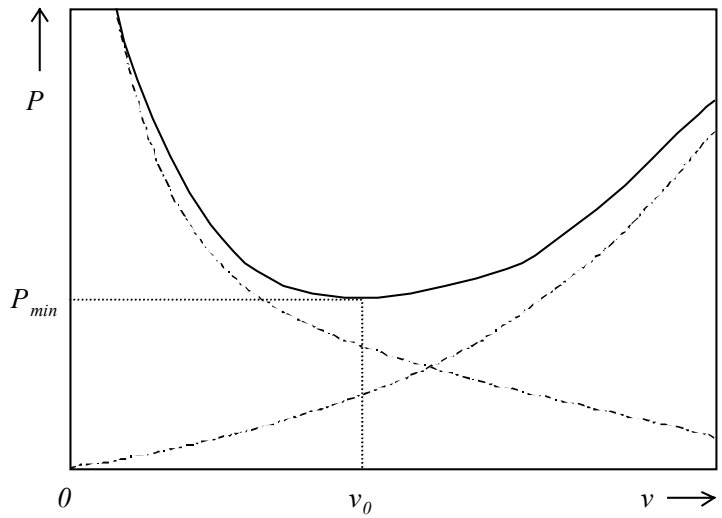
Dabar mes galime minimizuoti P parinkdami optimalų greitį v_0:

$$P = Dv = \frac{\pi}{4}\rho v^3 l^2\left(\frac{f}{A}+\frac{1}{2}\frac{(4Mg)^2}{(\pi\rho v^2 l^2)^2}\right) = \frac{\pi}{4}\rho v^3 l^2\,\frac{f}{A}+\frac{2(Mg)^2}{\pi\rho v l^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}v} = \frac{3\pi}{4}\rho v^2 l^2\,\frac{f}{A} - \frac{2(Mg)^2}{\pi\rho v^2 l^2} = 0, \text{ kai } v=v_0.$$

$$v_0^4 = \frac{8(Mg)^2 A}{3\pi^2\rho^2 l^4 f} = \frac{8}{3Af}\left(\frac{Mg}{\pi\rho S}\right)^2.$$

Galios priklausomybės nuo greičio grafikas pateiktas 121 pav.



121 pav.

$$P_{\min} = \frac{\pi}{4}\rho v_0^3 l^2\left(\frac{f}{A}+\frac{1}{2}\frac{(4Mg)^2}{(\pi\rho v_0^2 l^2)^2}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{4}\rho v_0^3 l^2\left(\frac{f}{A}+\frac{(4Mg)^2}{2(\pi\rho l^2)^2}\frac{3\pi^2\rho^2 l^4 f}{8(Mg)^2 A}\right)$$

$$= \pi\rho v_0^3 l^2\,\frac{f}{A} = \pi\rho v_0^3 S f, \text{ o įstačius } v_0:$$

$$P_{\min} = \pi\rho S f\,\frac{8^{\frac{3}{4}}(Mg)^{\frac{3}{2}}}{(3Af)^{\frac{3}{4}}(\pi\rho S)^{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{8}{3A}\right)^{\frac{3}{4}} f^{\frac{1}{4}}\,\frac{(Mg)^{\frac{3}{2}}}{(\pi\rho S)^{\frac{1}{2}}}.$$

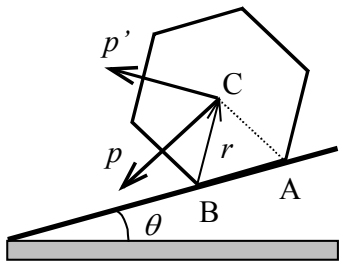
Prilyginame P_{min} turimai galiai $P_{min} = IS$ ir gauname

$$\frac{Mg}{S} = I^{\frac{2}{3}}\left(\frac{3A}{8}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{(\pi\rho)^{\frac{1}{3}}}{f^{\frac{1}{6}}}.$$

Skaitmeninės vertės: $\frac{Mg}{S} = 35{,}6\ \text{N/m}^2$, v_0=8,60 m/s.

XXIX tarptautinė fizikos olimpiada, 1998 m. (Islandija)

123. a) Prieš pat smūgį prizmės momentinė sukimosi ašis A, jos judesio kiekis p, tuoj po smūgio – ašis B, judesio kiekis p'. Kadangi smūgio metu ašies B atžvilgiu jėgos momentas lygus nuliui (jėgos petys lygus nuliui), judesio kiekio momentas tos ašies atžvilgiu smūgio metu nekinta. Prieš pat smūgį judesio kiekio momentas tos ašies atžvilgiu lygus



123 pav.

$$\vec{L}_B = \vec{L}_C + [\vec{r} \times \vec{p}],\quad L_B = \frac{5}{12}Ma^2\omega + aMv\sin 30^\circ = \frac{11}{12}Ma^2\omega.$$

Po smūgio judesio kiekio momentas lygus

$$L'_B = \frac{5}{12}Ma^2\omega' + aMv' = \frac{17}{12}Ma^2\omega.$$

Kadangi $L_B = L'_B$, gauname

$$\omega' = \frac{11}{17}\omega,\ \text{t. y.},\ s = \frac{11}{17}.$$

b) Visa kūno kinetinė energija gali būti išreikšta taip:

$$K = I\omega^2/2,$$

čia I – inercijos momentas momentinės sukimosi ašies atžvilgiu, ω – kampinis greitis. Iš užduoties a) gauname:

$$r = \frac{K_f}{K_i} = \frac{I\omega_f^2/2}{I\omega_i^2/2} = \frac{\omega_f^2}{\omega_i^2} = s^2,\ r = \frac{121}{289},\ K_f = \frac{121}{289}K_i.$$

c) Kad prizmė dar kartą atsitrenktų, K_f turi būti pakankama pakilti masės centrui aukščiu h, atitinkančiu vertikalią $\vec{r}$ padėtį. Gauname:

$$K_i = \frac{K_f}{r} = \frac{Mga\left(1-\cos\left(90^\circ - 60^\circ - \theta\right)\right)}{r} = \frac{Mga\left(1-\cos\left(30^\circ - \theta\right)\right)}{r}.$$ T

aigi, ieškomasis daugiklis

$$\delta = \frac{1-\cos\left(30^\circ - \theta\right)}{r}.$$

d) Riedančios prizmės energiją prieš n-tą smūgį pažymime $K_{i,n}$. Tada

$$K_{i,n+1} = rK_{i,n} + Mga\sin\theta.$$

Pasinaudodami pateikta rekurentine formule ir pažymėję $Mga\sin\theta = b$, gauname

$$K_{i,1} = rK_{i,0} + b,$$

$$K_{i,2} = r\left(rK_{i,0} + b\right) + b = r^2K_{i,0} + b(r+1),$$

$$K_{i,3} = r\left(r^2K_{i,0} + b(r+1)\right) + b = r^3K_{i,0} + b\left(r^2 + r + 1\right),$$

...

$$K_{i,n} = r^nK_{i,0} + b\sum_{j=0}^{n-1} r^j = r^nK_{i,0} + b\frac{1-r^n}{1-r}.$$

Kadangi r<1, gauname

$$K_{i,n}\Big|_{n\to\infty} = \frac{b}{1-r} = \frac{Mga\sin\theta}{1-r}.$$

Taigi, ieškomasis daugiklis

$$k = \frac{\sin\theta}{1-r} = \frac{289\sin\theta}{168}.$$

e) Kad paridenta prizmė riedėtų, užduotyje d) nustatyta kinetinės energijos vertė turi būti ne mažesnė už užduotyje c) nustatytą vertę. Gauname:

$$\frac{Mga\sin\theta}{1-r} \geq \frac{Mga\left(1-\cos\left(30^{\circ}-\theta\right)\right)}{r},$$

$$\frac{r\sin\theta}{1-r} \geq 1-\cos\left(30^{\circ}-\theta\right).$$

Įstatę r, išreiškę $\cos\left(30^{\circ}-\theta\right)=\cos 30^{\circ}\cos\theta+\sin 30^{\circ}\sin\theta$ ir įstatę 30° funkcijų vertes bei pakeitę $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}$, gauname lygtį ribiniam kampui

$$2{,}239\sin^2\theta_0 - 2{,}440\sin\theta_0 + 0{,}25 = 0.$$

Turi prasmę tik vienas tos lygties sprendinys (antras didesnis už vienetą). Gauname

$$\sin\theta_0 = 0{,}1145,\ \theta_0 = 6{,}57^{\circ}.$$

Kai $\theta > \theta_0$, paridenta prizmė nebesustoja.

124. a) Pagal energijos tvermės dėsnį

$J_Q\,\tau = L_i\rho_l d$, kur $\tau = 1$ metai.

Tada $d = \dfrac{J_Q\cdot\tau}{L_i\cdot\rho_i}$, $d = 6{,}1\cdot10^{-3}$ m.

b) Atmosferos slėgį p_a laikysime pastoviu. Gylyje z ledo sluoksnyje slėgis

$p = \rho_l g z + p_a$,

todėl ledo sluoksnio apačioje, kur $z = y_2 - y_1$, slėgis

$p = \rho_l g(y_2 - y_1) + p_a =$

$= \rho_l g x(\mathrm{tg}\,\beta - \mathrm{tg}\,\alpha) + \rho_l g h_0 + p_a$.

Kad vanduo po ledu nejudėtų, slėgis po ledo sluoksniu turi būti hidrostatinis, tai

$p = p' - \rho_w g y_1 = p' - \rho_w g x\,\mathrm{tg}\alpha$, kur p' – pastovioji.

Todėl

$\rho_l g x(\mathrm{tg}\,\beta - \mathrm{tg}\,\alpha) = -\rho_w g x\,\mathrm{tg}\alpha$,

$\mathrm{tg}\,\beta = -\dfrac{\rho_w-\rho_i}{\rho_i}\mathrm{tg}\,\alpha = -\dfrac{\Delta\rho}{\rho_i}\mathrm{tg}\,\alpha \approx -0{,}091\,\mathrm{tg}\,\alpha$,

$s = -\dfrac{\Delta\rho}{\rho_i} = -0{,}091$, kur "–" ženklas yra reikšmingas.

Kai $\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}8$, gauname $\mathrm{tg}\,\beta = -0{,}073$ ir

$y_2 = 2\text{ km} - 0{,}073x$.

c) Kadangi ledas juda vertikalia kryptimi tol, kol išsilygina slėgiai, tai kūgio formos įduba turės tą patį 1 km spindulį kaip ir intarpas. Pagal (b) dalį jos gylis

$h = |r\,\mathrm{tg}\beta| = \dfrac{\Delta\rho}{\rho_i} r\,\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\Delta\rho}{\rho_i} H = 91\text{m}.$

d) Kūgio tūris yra $V = 1/3\ \pi r^2 h$. Tarkime, kad intarpo aukštis yra h_1 ir pirmiausia išlydomas $V_1 = 1/3\ \pi r^2 h_1$ tūrio ledas. Slėgiai dar nėra išsilyginę, todėl vanduo išteka tol, kol ledo paviršius netampa vėl horizontalus. Kad slėgis išsilygintų, turi susiformuoti $h_2 = \Delta\rho/\rho_i h_i$ gylio įduba. Jei išsiveržusi lava neatšalo iki 0ºC temparatūros, ledas toliau tirps ir ištirpins aukščio h_3 kūginį ledo sluoksnį. Dėl šios priežasties susformuos h_3' aukščio vandens kūgis ($h'_3 = \rho_i/\rho_w\, h_3$). Visas ištirpusio ledo kūgio aukštis

$h_{\text{viso}} = h_1 + h_2 + h_3$.

Įdubos gylis

$h = \Delta\rho/\rho_i\,(h_1 + h_3')$, o ieškomas vandens kūgio aukštis

$H = h_1 + h_3' = \rho_i h/\Delta\rho\ \ H = 1{,}1\times10^3$ m.

Šilumos balanso lygtis

$$\frac{1}{3}\pi r^2\{\rho_r h_1(L_r + c_r\Delta T) - \rho_i L_i h_{viso}\} = 0,$$

kur ΔT = 1200 K. Iš tos lygties

$$h_{viso} = h_1 + \Delta\rho/\rho_i\, h_1 + \rho_w/\rho_i\, h_3' = \rho_w/\rho_i\,(h_1 + h_3').$$

$$h_{viso} = \rho_w/\rho_i\, H,\ h_{viso} = 1{,}20\cdot 10^3 \text{ m}.$$

Tai reiškia, kad vanduo nepasiekia paviršiaus. Be to iš šilumos balanso lygties gauname:

$$\rho_r h_1(L_r + c_r\Delta T) = \frac{\rho_i\rho_w L_i h}{\Delta\rho},$$

$$h_1 = \frac{\rho_i\rho_w L_i h}{\Delta\rho\rho_r(L_r + c_r\Delta T)},\ \ h_1 = 103 \text{ m}.$$

Visa vandens masė lygi ištirpusio ledo masei

$$m_{viso} = \rho_i(1/3)\pi r^2 h_{viso},\ m_{viso} = 2{,}9\cdot 10^{11} \text{ kg}.$$

Ištekėjusio vandens masė:

$$m' = \frac{h_1 + h_2}{h_{viso}} m_{viso} = \frac{\rho_w h_1}{\rho_i h_{viso}} m_{viso} = 2{,}7\cdot 10^{10} \text{ kg}.$$

125. a) Pateiktame paveiksle išmatuojame atstumus nuo kryžiuku pažymėto taško iki spindulių šaltinių ir skaičiuojame gautus rezultatus kampo sekundėmis pagal pateiktą mastelį. Duomenis surašome į lentelę.

Data	03 27	04 03	04 09	04 16	04 23	04 30
t, dienos	0	7	13	20	27	34

θ_1, "	0,14	0,24	0,36	0,45	0,61	0,71
θ_2, "	0,09	0,15	0,19	0,24	0,30	0,37

Panaudodami mažiausių kvadratų metodą gauname

$$\theta_1 = 0{,}017t + 0{,}13;\ \ \theta_1 = 0{,}008t + 0{,}088.$$

Kampinis greitis yra kampo θ išvestinė laiko atžvilgiu. Tai gautų tiesių krypties koeficientai, tik čia jie pateikti kampo sekundėmis per parą. Padauginę juos iš 1000, gauname reikalaujamus greičius:

$$\omega_1 = 17;\ \ \omega_2 = 8.$$

Linijiniai greičiai išreiškiami formule

$$v = \omega R.$$

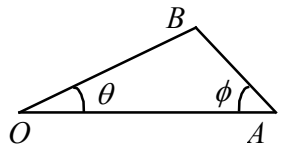
Išreikšdami greitį m/s pervedame kampo sekundes į radianus, paras – į sekundes, kiloparsekus – į metrus. Gauname:

$$v'_{1\perp} = \frac{17\cdot\pi\cdot 12{,}5\cdot 3{,}09\cdot 10^{19}}{1000\cdot 180\cdot 3600\cdot 24\cdot 3600} = 3{,}7\cdot 10^8 \text{ m/s},\ v'_{2\perp} = 1{,}7\cdot 10^8 \text{ m/s}.$$

Gauta kairiojo šaltinio greičio vertė didesnė už šviesos greitį.

b) Tegu laiko momentu t_1 šaltinis yra taške A, o po laiko t jis pereina į tašką B. Tada

$$AB = \beta ct.$$



125.1 pav.

Stebėtojas taške O pastebi, kad šaltinis taške A yra laiko momentu $t'_1 = t_1 + OA/c$, o taške B – laiko momentu $t'_2 = t_1 + t + OB/c$, ir nustato kampinį greitį

$$\omega = \frac{\theta}{t'} = \frac{\theta}{t'_2 - t'_1} = \frac{\theta}{t + OB/c - OA/c}.$$

Iš ΔOAB gauname:

$$\frac{R}{\sin(\pi - \phi - \theta)} = \frac{OB}{\sin\phi} = \frac{OA}{\sin\theta}.$$

Tada

$$t=\frac{AB}{\beta c}=\frac{R\sin\theta}{\beta c\sin(\phi+\theta)},\quad OB=\frac{R\sin\phi}{\sin(\phi+\theta)},$$

$$\omega=\frac{\theta}{\dfrac{R\sin\theta}{\beta c\sin(\phi+\theta)}+\dfrac{R\sin\phi}{c\sin(\phi+\theta)}-\dfrac{R}{c}}=$$

$$=\frac{\beta c}{R}\cdot\frac{\theta\sin(\phi+\theta)}{\sin\theta+\beta\left(\sin\phi-\sin(\phi+\theta)\right)}=$$

$$=\frac{\beta c}{R}\cdot\frac{\theta\sin(\phi+\theta)}{\sin\theta-2\beta\sin(\theta/2)\sin(\phi+\theta/2)}.$$

Kadangi θ – mažas kampas, $\sin\theta/\theta\approx1$, $\sin(\theta/2)/\theta\approx1/2$, $\sin(\phi+\theta)\approx\sin\phi$, $\cos(\phi+\theta/2)\approx\cos\phi$, ir gauname

$$\omega=\frac{\beta c\sin\phi}{R(1-\beta\cos\phi)},\quad v'_{\perp}=\omega R=\frac{\beta c\sin\phi}{1-\beta\cos\phi}.$$

c) Antrojo šaltinio kampinio greičio išraiška gaunama kaip ir pirmojo, tik pakeičiama $\phi\to\pi-\phi$. Tada

$$\omega_1=\frac{\beta c\sin\phi}{R(1-\beta\cos\phi)},\omega_2=\frac{\beta c\sin(\pi-\phi)}{R\left(1-\beta\cos(\pi-\phi)\right)}=\frac{\beta c\sin\phi}{R(1+\beta\cos\phi)},$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{1+\beta\cos\phi}{1-\beta\cos\phi},\quad \beta\cos\phi=\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_1+\omega_2},$$

$$\beta c\sin\phi=\omega_1R\left(1-\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_1+\omega_2}\right)=\frac{2\omega_1\omega_2R}{\omega_1+\omega_2},$$

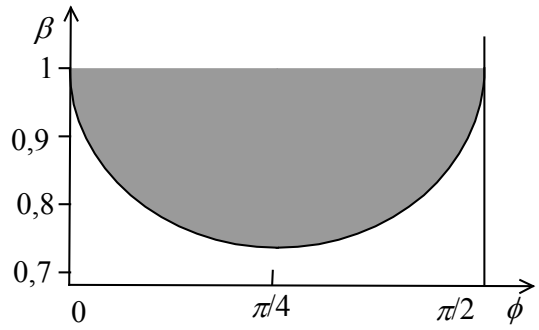
$$\mathrm{tg}\phi=\frac{2\omega_1\omega_2R}{c(\omega_1-\omega_2)},$$

$$\beta=\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_1+\omega_2}\cdot\frac{1}{\cos\phi}=\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_1+\omega_2}\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\phi}.$$

Įrašę R, c, ω_1 ir ω_2 vertes gauname

$$\mathrm{tg}\phi=65^{\circ},\ \beta=0{,}86.$$

d) Iš $v'_{\perp}\geq c$ gauname



125.2 pav.

$$\frac{\beta\sin\phi}{1-\beta\cos\phi}\geq1,\quad \beta=\frac{1}{\sin\phi+\cos\phi}.$$

Nubrėžiame pateiktos funkcijos grafiką imdami $0\leq\phi\leq\pi/2$ ir $\beta\leq1$.

e) Kad $v'_{\perp}$ būtų maksimalus, jo išvestinė kintamuoju ϕ turi būti lygi nuliui.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi}\left(\frac{\beta c\sin\phi}{1-\beta\cos\phi}\right)=0,\quad \cos\phi(1-\beta\cos\phi)-\sin\phi\cdot\beta\sin\phi=0,$$

$$\cos\phi=\beta,$$

$$v'_{\perp\,\max}=\frac{\beta c\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta^2}=\frac{\beta c}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

f) λ_1 ir λ_2 išreiškiame pateikta Doplerio efekto formule imdami kampus ϕ ir $\pi-\phi$. Gauname

$$\lambda_1=\lambda_0(1-\beta\cos\phi)(1-\beta^2)^{-1/2},$$

$$\lambda_2=\lambda_0(1+\beta\cos\phi)(1-\beta^2)^{-1/2}.$$

Iš pateiktų išraiškų eliminuojame ϕ ir išreiškiame β:

$$\beta=\sqrt{1-\frac{4\lambda_0^2}{(\lambda_1+\lambda_2)^2}},$$

t. y. a=4.

XXX tarptautinė fizikos olimpiada, 1999 m. (Italija)

127. 1) Esant pusiausvyrai slėgis indo viduje turi būti lygus aplinkos slėgio p_0 ir stūmoklio sunkio sąlygoto slėgio sumai:

$$p = p_0 + \frac{mg}{\pi r^2} = 102{,}32\ \text{kPa}.$$

Ši sąlyga turi būti išpildoma tiek prieš švitinant lazeriu, tiek ir po to. Iš idealiųjų dujų būsenos lygties nustatome, kad pradinis dujų tūris

$$V_1 = \frac{nRT_0}{p}.$$

Čia R – universalioji dujų konstanta. Taigi pradinis cilindro aukštis

$$h_1 = \frac{V_1}{\pi r^2} = \frac{nRT_0}{p_0\pi r^2 + mg}.$$

Apšvitinus lazeriu stūmoklio aukštis pasidaro $h_2=h_1+\Delta s$, o pasinaudoję Gei ir Liusako dėsniu apskaičiuojame, kad dujų temperatūra

$$T_2 = T_0\left(1+\frac{\Delta s}{h_1}\right) = T_0 + \frac{\Delta s(p_0\pi r^2 + mg)}{nR} = 322\ \text{K} = 49^{\circ}\ \text{C}.$$

2) Dujų atliktas mechaninis darbas pakeliant stūmoklį lygus $mg\Delta s$, o nugalint aplinkos slėgio sąlygotą jėgą lygus $p_0\pi r^2\Delta s$. Taigi visas darbas $A=(mg+p_0\pi r^2)\Delta s=24{,}1$ J.

3) Padidėjus temperatūrai nuo T_0 iki T_2 dujų vidinė energija padidėjo dydžiu $\Delta U=nc_V(T_2-T_0)$. Per spinduliuotės veikimo trukmę Δt sistemai buvo suteiktas šilumos kiekis

$$Q = \Delta U + A = nc_V\frac{T_0\Delta s}{h_1} + (mg + p_0\pi r^2)\Delta s = \Delta s(p_0\pi r^2 + mg)\left(\frac{c_V}{R}+1\right) = 84\text{J}.$$

Šis šilumos kiekis ir yra lygus sugertajai optinės spinduliuotės energijai.

<u>*Pastaba.*</u> Tą patį rezultatą galima gauti ir pasinaudojus sąryšiu tarp idealiųjų dujų savitųjų šilumų esant pastoviam slėgiui (c_p) ir pastoviam tūriui (c_V): $c_p=c_V+R$. Šiuo atveju

$$Q = nc_p(T_2 - T_0) = n(c_V + R)\left[\frac{\Delta s(p_0\pi r^2 + mg)}{nR}\right] = \Delta s(p_0\pi r^2 + mg)\left(\frac{c_V}{R}+1\right).$$

4) Kadangi lazerio spinduliuojama galia yra pastovi, dujų sugeriamos optinės spinduliuotės galia yra

$$W = \frac{Q}{\Delta t} = \left(\frac{c_V}{R}+1\right)\frac{\Delta s}{\Delta t}(p_0\pi r^2 + mg) = 8{,}4\ \text{W}.$$

Kiekvieno fotono energija lygi hc/λ. Vadinasi, per laiko vienetą sugertų fotonų skaičius yra $\frac{W\lambda}{hc} = 2{,}2\cdot 10^{19}\ \text{s}^{-1}$.

5) Pakelto stūmoklio potencinės energijos pokytis lygus $mg\Delta s$. Taigi spinduliuotės energijos virtimo pakelto stūmoklio potencine energija naudingumo koeficientas

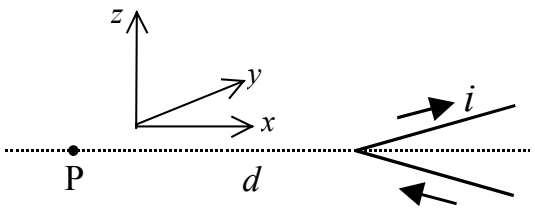
$$\eta = \frac{mg\Delta s}{Q} = \frac{1}{\left(1+\frac{p_0\pi r^2}{mg}\right)\left(1+\frac{c_V}{R}\right)} = 2{,}8\cdot 10^{-3} \approx 0{,}3\ \%.$$

6) Verčiant cilindrą vyksta adiabatinis procesas, kurio metu slėgis pakinta nuo p iki p_0, o temperatūra įgyja naują vertę T_3. Adiabatinį procesą aprašanti lygtis pV^{γ}=const šiuo atveju gali būti užrašyta taip:

$$T_3 = T_2\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

Čia $\gamma = \frac{c_p}{c_V} = \frac{c_V + R}{c_V} = 1 + \frac{R}{c_V} = 1{,}399$. Apskaičiavę temperatūrą, gauname T_3=321 K=48 $^{\circ}$C.

128. 1) Kiekvienos „V” formos laido šakos kuriamo magnetinio lauko kryptis yra tokia pat, kaip ir tokios pačios orientacijos begalinių laidų. Ją galime nustatyti pagal dešiniojo sraigto taisyklę. Jei laidai yra *xy* plokštumoje, o srovės kryptis tokia, kaip parodyta rodyklėmis (žr. 128.1 pav.), $\vec{B}$(P) vektorius nukreiptas teigiamosios *z* ašies kryptimi.



128.1 pav.

Iš simetrijos matome, kad kiekvienos šakos kuriamas magnetinis laukas yra vienodo dydžio ir tos pačios krypties.

2) Panagrinėsime du sprendimo būdus.

a) Kai $\alpha=\pi/2$, turime tiesią begalinę vielą. Šiuo atveju žinome, kad

$$B(\mathrm{P}) = \frac{i}{2\pi\varepsilon_0 c^2 d} = \frac{i\mu_0}{2\pi d}.$$

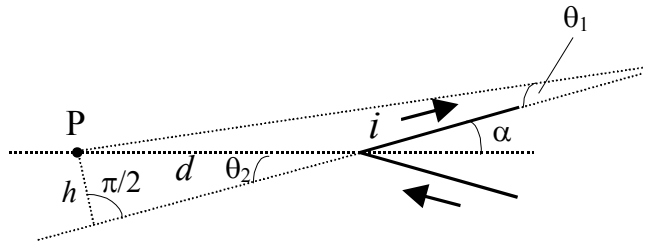
Kadangi tg(π/4)=1, proporcingumo koeficientas $k = \frac{i\mu_0}{2\pi d}$.

b) Žinome, kad baigtinio ilgio tiesia viela tekančios srovės sukurto magnetinio lauko indukcija atstumu *h* nuo tos vielos

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi h}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2). \qquad (1)$$

Šiuo atveju $\theta_1 \to 0$, $\theta_2=\alpha$, o $h=d\sin\alpha$ (žr. 128.2 pav.). Taigi abiejų „V” formos vielos šakų kuriama magnetinė indukcija

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi d}\cdot\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\mu_0 i}{2\pi d}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

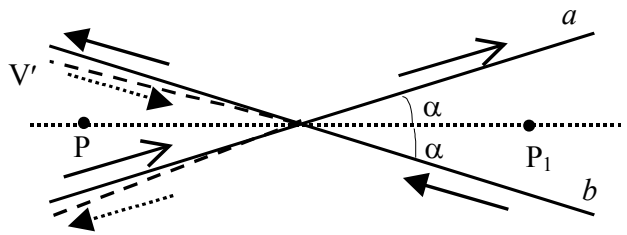


128.2 pav.

Šis sprendimo būdas yra išsamesnis, nes jame išaiškėja *B* priklausomybė nuo kampo α, tačiau jis nėra būtinas atliekant šią užduotį.

3) Panagrinėsime bent tris šios užduoties sprendimo būdus.

a) Norėdami apskaičiuoti $\vec{B}$(P$_1$) galime nagrinėti 128.3 pav. parodytą lygiavertę grandinę. Ji susideda iš dviejų begalinių 2α kampu susikertančių vielų *a* ir *b* su srovėmis *i* ir dar vienos „V” formos vielos (paveiksle pavaizduotos punktyrine linija „V′”) su tokia pat srove, tekančia priešinga kryptimi.



128.3 pav.

Tada $\vec{B}$(P$_1$)= $\vec{B}_a$(P$_1$)+ $\vec{B}_b$(P$_1$)+ $\vec{B}_{V'}$(P$_1$). Šias tris $\vec{B}$(P$_1$) dedamąsias nesunkiai galima apskaičiuoti:

$B_a(\mathrm{P}_1) = B_b(\mathrm{P}_1) = \dfrac{\mu_0 i}{2\pi d\sin\alpha}$ nukreiptos prieš *z* ašies kryptį,

$$B_{V'}(\mathrm{P}_1) = \frac{\mu_0 i}{2\pi d}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$ nukreipta z ašies kryptimi.

Galutinai apskaičiuojame, kad

$$B(\mathrm{P}_1) = \frac{\mu_0 i}{2\pi d}\left[\frac{2}{\sin\alpha} - \mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right] = k\,\mathrm{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$ ir yra nukreipta prieš z ašies kryptį.

b) Į tašką P_1, esantį „V" formos laidininko kampo viduje, galima žiūrėti kaip į esantį kampo išorėje, tik kampą α reikia pakeisti kampu $\pi-\alpha$ ir pakeisti srovės kryptį į priešingą. Tada

$$B(\mathrm{P}_1) = k\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right) = k\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right) = k\,\mathrm{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

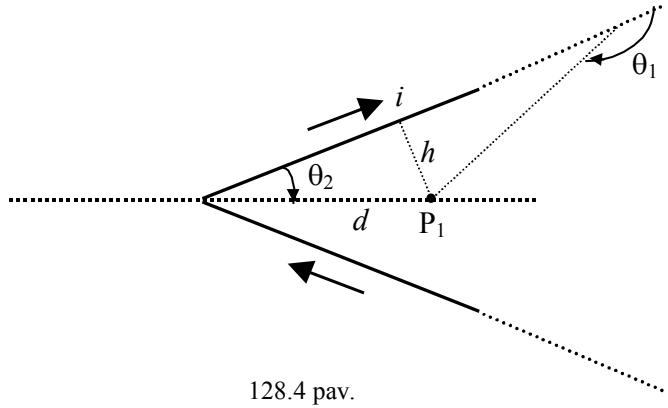
o $\vec{B}(\mathrm{P}_1)$ kryptis, kaip ir 1) punkto atveju, turėtų sutapti su z ašies kryptimi, tačiau šią kryptį pakeičia priešinga srovės kryptis. Taigi magnetinio lauko kryptis pasidaro tokia pat, kaip ir a) atveju.

c) $B(\mathrm{P}_1)$ galima sėkmingai apskaičiuoti taip pat, kaip tai darėme 2b) atveju panaudojant (1) formulę, tik šiuo atveju $\theta_2=\alpha$, $\theta_1\to\pi$ (žr. 128.4 pav.) (jei sutarsime kampus atskaityti pagal laikrodžio rodyklę nuo laido su srove, arba $\theta_2=\pi-\alpha$, $\theta_1\to 0$, jei sutarsime priešingai). Šiuo atveju pagal (1) abiejų šakų sukurtas laukas

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi d}\cdot\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\mu_0 i}{2\pi d}\,\mathrm{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

$\vec{B}$ kryptį galime nustatyti pagal dešininio sraigto taisyklę.

4) Taške P esančią magnetinę rodyklę veikia jėgos momentas $\vec{M} = \left[\vec{p}_m, \vec{B}\right]$, o jo modulis $M=p_\mathrm{m}B\sin\beta$. Jei magnetinė rodyklė atlenkiama nuo pusiausvyros padėties mažu kampu,



128.4 pav.

tada $\sin\beta\approx\beta$, o

$$M = -p_m B\beta = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = I\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\mathrm{d}t^2}.$$

Čia minuso ženklas rašomas todėl, kad jėgos momento kryptis priešinga nuokrypiui nuo pusiausvyros padėties. Rodyklės mažų svyravimų periodas

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{p_m B}}.$$

(Beje, ši formulė turėtų būti žinoma iš svyravimų teorijos kurso. Tuo atveju galima nerašyti diferencialinės lygties).

5) A indeksą rašysime dydžiams, atitinkantiems Ampero interpretaciją, o BS – Bio ir Savaro prielaidą. Tada

$$B_\mathrm{A} = \frac{\mu_0 i}{2\pi d}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad B_\mathrm{BS} = \frac{\mu_0 i}{\pi^2 d}\alpha,$$

$$T_\mathrm{A} = 2\pi\sqrt{\frac{2\pi I d}{\mu_0 p_m i\,\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}, \quad T_\mathrm{BS} = 2\pi\sqrt{\frac{\pi^2 I d}{\mu_0 p_m i\alpha}},$$

$$\frac{T_A}{T_{BS}} = \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}.$$

Jei $\alpha=\pi/2$ (didžiausia galima vertė), $T_A=T_{BS}$. Jei $\alpha\to 0$, $T_A \to \frac{2}{\sqrt{\pi}} T_{BS} \approx 1{,}128 T_{BS}$. Kadangi $\frac{\operatorname{tg}(\alpha/2)}{\alpha/2}$ yra monotoniškai didėjanti α funkcija, $\frac{T_A}{T_{BS}}$ yra monotoniškai mažėjanti α funkcija. Todėl eksperimentiškai negalima pastebėti skirtumo tarp tų dviejų interpretacijų, jei α vertės esti tiek didelės, kad $T_A<1{,}10T_{BS}$. Didžiausia α vertė, tenkinanti sąlygą $T_A=1{,}10T_{BS}$, gali būti nustatyta išsprendus lygtį

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{4}{1{,}21\pi} \cdot \frac{\alpha}{2} = 1{,}05\frac{\alpha}{2}.$$

Pasinaudodami trigonometrinių funkcijų lentelėmis arba skaičiuotuvu nustatome, kad ši sąlyga patenkinama, kai $\alpha/2=0{,}38$ rad. Taigi α vertė turi būti mažesnė negu 0,77 rad≈44°.

Aukščiau minėtą lygtį galima išspręsti ir grafiškai, tačiau šis būdas yra ilgesnis.

129. 1) Panagrinėsime du Jupiterio greičio nustatymo būdus:

a) Tardami, kad orbita yra apskritiminė (tas pabrėžta sąlygoje), galime rašyti lygybę tarp įcentrinio $\frac{V^2}{R}$ ir gravitacijos $\frac{GM_S}{R^2}$ pagreičių. (Čia M_S – Saulės masė.) Iš čia nustatome Jupiterio orbitinį greitį

$$V = \sqrt{\frac{GM_S}{R}} \approx 1{,}306 \cdot 10^4 \text{ m/s}.$$

b) Jupiteris juda apskritimine orbita pastoviu greičiu, taigi

$$V = \omega R = \frac{2\pi R}{T_J}.$$

Čia T_J yra Jupiterio apsisukimo aplink Saulę periodas (Jupiterio metai.

2) Kosminį zondą veikiančios Saulės ir Jupiterio gravitacijos jėgos lygios, kai

$$\frac{GMm}{\rho^2} = \frac{GM_S m}{(R-\rho)^2}. \qquad (1)$$

(Čia ρ – atstumas tarp zondo ir Jupiterio centro, M – Jupiterio masė). Padaliję (1) abi puses iš Gm ir ištraukę šaknį, gauname:

$$(R-r)\sqrt{M} = r\sqrt{M_S}. \qquad (2)$$

Iš (2) nustatome, kad

$$r = \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{M_S}+\sqrt{M}} \cdot R = 0{,}02997R = 2{,}333 \cdot 10^{10} \text{ m}, \qquad (3)$$

t. y. šios jėgos yra lygios 23 300 000 km atstumu nuo Jupiterio, kas sudaro apie 334 Jupiterio spindulius.

3) Pagal Galilėjaus transformacijas kosminio zondo greičio dedamosios su Jupiteriu susietoje atskaitos sistemoje yra

$$\begin{cases} v'_x = V, \\ v'_y = v_0. \end{cases}$$

Taigi su Jupiteriu susietoje atskaitos sistemoje kampas tarp kosminio zondo judėjimo krypties ir x ašies $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{v_0}{V} = 0{,}653 \text{ rad} \approx 37{,}4^o$, o greitis $v' = \sqrt{v_0^2 + V^2} =$ =16,5 km/s.

4) Kadangi tarėme, jog į zondo sąveiką su kitais dangaus kūnais, išskyrus Jupiterį, galima neatsižvelgti, pilnutinė zondo energija yra lygi jo kinetinei energijai su Jupiteriu susietoje atskaitos sistemoje:

$$E \approx \frac{mv'^2}{2} = 112 \text{ GJ}. \qquad (4)$$

5) Iš sąlygoje pateiktos (1) lygties aiškėja, kad $r\to\infty$, o $1/r\to 0$, kai

$$1+\sqrt{1+\frac{2Ev'^2b^2}{G^2M^2m}}\cos\theta=0, \qquad (5)$$

t. y., kai

$$\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2Ev'^2b^2}{G^2M^2m}}}. \qquad (6)$$

Radialinis atstumas r negali būti neigiamas. Taigi

$$1+\sqrt{1+\frac{2Ev'^2b^2}{G^2M^2m}}\cos\theta\geq 0, \qquad (7)$$

arba

$$\cos\theta\geq-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2Ev'^2b^2}{G^2M^2m}}}. \qquad (8)$$

(8) lygties ribiniai sprendiniai (t. y., imant lygybės ženklą) yra

$$\theta_{\pm}=\pm\arccos\left[-\left(1+\frac{2Ev'^2b^2}{G^2M^2m}\right)^{-1/2}\right]=\pm\left(\pi-\arccos\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2Ev'^2b^2}{G^2M^2m}}}\right). \qquad (9)$$

Kampas $\Delta\theta$ tarp dviejų hiperbolės asimptočių

$$\Delta\theta=(\theta_+-\theta_-)-\pi=\pi-2\arccos\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2Ev'^2b^2}{G^2M^2m}}}=\pi-2\arccos\frac{1}{\sqrt{1+\frac{v'^4b^2}{G^2M^2}}}. \qquad (10)$$

Užrašant (10) išraiškos galutinį variantą buvo pasinaudota (4) formule.

6) Nuokrypio kampas yra monotoniškai mažėjanti pataikymo parametro funkcija, taigi nuokrypio kampas yra didžiausias esant mažiausiam pataikymo parametrui. Iš 5) punkto rezultatų analizės matome, kad didžiausias priartėjimas esti, kai

$\theta=0$. Mažiausias atstumas tarp zondo ir planetos centro šiuo atveju lengvai apskaičiuojamas iš sąlygoje pateiktos (1) lygties:

$$r_{\min}=\frac{v'^2b^2}{GM}\left(1+\sqrt{1+\frac{v'^4b^2}{G^2M^2}}\right)^{-1}. \qquad (11)$$

Iš (11) surandame pataikymo parametrą:

$$b=\sqrt{r_{\min}^2+\frac{2GM}{v'^2}r_{\min}}. \qquad (12)$$

Pastebėsime, kad šį rezultatą galima gauti ir pasinaudojant impulso momento tvermės dėsniu

$$L=mv'b=mv'_{\min}r_{\min}. \qquad (13)$$

Čia $v'_{\min}$ yra greitis, atitinkantis didžiausią priartėjimą. Pagal energijos tvermės dėsnį

$$E=\frac{mv'^2}{2}=\frac{mv'^2_{\min}}{2}-\frac{GMm}{r_{\min}}. \qquad (14)$$

Iš (13) ir (14) lygybių irgi galima gauti (12).

Pataikymo parametras yra didėjanti didžiausio priartėjimo atstumo funkcija. Kadangi kosminis zondas negali priartėti prie Jupiterio arčiau kaip per $3R_J$, mažiausia leistina pataikymo parametro vertė yra

$$b_{\min}=\sqrt{9R_J^2+\frac{6GM}{v'^2}R_J}=4{,}90\cdot10^8\ \text{m}\approx 7{,}0R_J. \qquad (15)$$

Iš (10) ir (15) apskaičiuojame didžiausią leistiną nuokrypio kampą:

$$\Delta\theta_{\max}=\pi-2\arccos\frac{1}{\sqrt{1+\frac{v'^4b_{\min}^2}{G^2M^2}}}=$$
$$=\pi-2\arccos\frac{1}{\sqrt{1+\frac{v'^4}{G^2M^2}\left(9R_J^2+\frac{6GM}{v'^2}R_J\right)}}=1{,}526\,\text{rad}\approx 87{,}4^{\circ}. \qquad (16)$$

7) Galutinio greičio kryptis su Jupiteriu susietos atskaitos sistemos x ašimi susideda iš pradinio kampo θ_0 ir nuokrypio kampo $\Delta\theta$, t. y. lygi $\theta_0+\Delta\theta$, kai kosminis zondas esti jau toli nuo Jupiterio. Taigi galutinio greičio dedamosios su Jupiteriu susietos atskaitos sistemos atžvilgiu yra

$$\begin{cases} v'_x = v'\cos(\theta_0 + \Delta\theta), \\ v'_y = v'\sin(\theta_0 + \Delta\theta), \end{cases}$$

o su Saule susietos atskaitos sistemos atžvilgiu yra

$$\begin{cases} v''_x = v'\cos(\theta_0 + \Delta\theta) - V, \\ v''_y = v'\sin(\theta_0 + \Delta\theta). \end{cases}$$

Tokiu būdu galutinis kosminio zondo greitis su Saule susietos atskaitos sistemos atžvilgiu yra

$$\begin{aligned} v'' &= \sqrt{(v'\cos(\theta_0 + \Delta\theta) - V)^2 + (v'\sin(\theta_0 + \Delta\theta))^2} = \\ &= \sqrt{v_0^2 + 2V^2 - 2v'V\cos(\theta_0 + \Delta\theta)} = \\ &= \sqrt{v_0^2 + 2V^2 - 2v'V(\cos\theta_0\cos\Delta\theta - \sin\theta_0\sin\Delta\theta)} = \qquad (17) \\ &= \sqrt{v_0^2 + 2V^2 - 2V(V\cos\Delta\theta - v_0\sin\Delta\theta)} = \\ &= \sqrt{v_0(v_0 + 2V\sin\Delta\theta) + 2V^2(1 - \cos\Delta\theta)}. \end{aligned}$$

8) Kai didžiausias leistinas nuokrypio kampas $\Delta\theta=\Delta\theta_{max}=1{,}526$ rad, pagal (17) apskaičiuojame, kad $v''= 2{,}62\cdot 10^4$ m/s.

Pastaba:
ši informacija interneto svetainėje www.olimpas.lt skelbiama nuo 2007 10 17.