„Fizikos Olimpo“ 2009/2010 m.m. vasaros sesijos mechanikos kontrolinis darbas II kurso moksleiviams
2009-06-28 paruošė Donatas Majus

1. Žiedo, kurio spindulys R, vidiniu paviršiumi juda mažas rutuliukas. Žiedo plokštuma statmena žemės paviršiui. Judėdamas rutuliukas pasiekia aukštį R/2. Kokiu mažiausiu pastovaus didumo pagreičiu vertikalia kryptimi turi pradėti judėti žiedas, kad rutuliukas, judėdamas vidiniu žiedo paviršiumi, pasiektų jo viršutinį tašką?

Sprendimas

Jei rutuliukas pakyla į aukštį R/2, jo maksimalus greitis (žemiausiame trajektorijos taške) pagal energijos tvermės dėsnį:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg\frac{R}{2} \Rightarrow v = \sqrt{gR}$$

Tarkime žiedas pradėjo judėti žemyn pagreičiu a. Tada rutuliuko judėjimą žiede galima nagrinėti laikydami, kad paprasčiausiai pasikeitė laisvo kritimo pagreitis g‘=g-a. Kad rutuliukas sėkmingai pasiektų viršutinį žiedo tašką jis turi turėti pakankamai kinetinės energijos įveikti potencinei energijai, be to viršutiniame taške jo greitis neturi būti lygus nuliui – jis juda apskritimu t.y. su įcentriniu pagreičiu, kuri rutuliukui suteikia jėga mg‘ ir žiedo atramos reakcijos jėga N. Tuo atveju, kad rutuliuko greitis viršutiniame taške mažiausias galimas, N=0.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}mv^2 = mg'2R + \frac{1}{2}mv'^2, \\ m\frac{v'^2}{R} = mg' \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = mg'2R + \frac{1}{2}mg'R \Rightarrow \frac{1}{2}gR = (g-a)\frac{5}{2}R \Rightarrow a = \frac{4}{5}g$$

2. Masės M rutuliukas, judėdamas greičiu v, atsitrenkia į nejudantį m masės rutuliuką. Galima nuspėti, kad jei M<m, pirmasis rutuliukas gali atšokti atgal. Parodykite, kad: a) atveju M>>m, pirmasis rutuliukas praktiškai nepakeis greičio, o antrasis judės greičiu 2v (visas judėjimas šiuo atveju vyksta vienoje tiesėje), b*) suraskite maksimalų kampą, kurį sudaro M rutuliuko greitis po smūgio ir greitis prieš smūgį.

Sprendimas

a) Judėjimas vyksta vienoje tiesėje, tad judesio kiekio ir energijos tvermės dėsniai:

$$\begin{cases} Mv = Mv' + mu \\ \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}Mv'^2 + \frac{1}{2}mu^2 \end{cases}$$

$$v' = v\frac{1-m/M}{1+m/M} \Rightarrow v' = v, \text{ kai } m << M$$

$$u = v\frac{2}{1+m/M} \Rightarrow u = 2v, \text{ kai } m << M$$

b) Suraskime M ir m sistemos masių centro greitį:

$$v_c = \frac{Mv}{M+m}$$

Pereikime į atskaitos sistemą, susietą su M ir m masių centru. Tuomet M ir m greičiai ir judesio kiekiai:

$$v_1 = v - v_c = v\frac{m}{M+m},$$

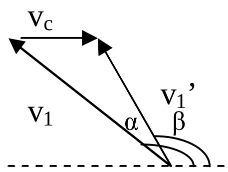
$$p_1 = Mv_1 = v\frac{Mm}{M+m},$$

$$v_2 = 0 - v_c = -v\frac{M}{M+m}$$

$$p_2 = mv_2 = -v\frac{Mm}{M+m}$$

Matome, kad judesio kiekis sistemoje, susietoje su masių centru, yra lygus 0. Įvykus smūgiui, ši sąlyga išsilaikys. Kadangi smūgis tamprus ir energija nėra prarandama, gausime, kad rutuliukų greičių (impulsų) moduliai nepakinta, pasikeičia tik jų kryptis. Tarkime, greitis $v_1$ sudaro kampą α su pradine judėjimo kryptimi. Grįždami į pirminę atskaitos sistemą, prie $v_1$ turėsime vektoriškai pridėti $v_c$, ir gausime M rutuliuko greitį po smūgio pirminėje atskaitos sistemoje.

Jei $v_1' > v_c$ , tai galimas judėjimas priešinga kryptimi (atsilenkimo kampas 180 deg):




$$v_1 > v_c,$$

$$v\frac{m}{M+m} > v\frac{M}{M+m}$$

$$M < m$$

Kaip ir buvo nurodyta sąlygoje, tai įmanoma tik tada, kai judantysis rutuliukas lengvesnis už stovinti.
Jei M>m, rasime maksimalų atsilenkimo kampą (x ašis nukreipta pradinio judėjimo kryptimi):

$$v_{1x}' = v_{1x} + v_c,$$

$$v_{1y}' = v_{1y}$$

$$\tan\beta = v_{1y}'/v_{1x}' = \frac{v_{1y}}{v_{1x}+v_c} = \frac{v_1\sin\alpha}{v_1\cos\alpha + v_c}$$

Tangentas kampui beta didėjant taip pat didėja, todėl galime ieškoti kampo beta tangento išvestinės pagal alfa. Išvestinę prilyginę nuliui, gausime tam tikrą kampą alfa, kurio vertę įstatę į tangento beta išraišką gauname:

$$\tan\beta = \frac{v_1}{\sqrt{v_c^2 - v_1^2}} = \frac{m}{\sqrt{M^2 - m^2}}$$

3. Ilgio L virvė guli tiesi ant stalo paviršiaus ir tik mažas virvės galiukas yra pakibęs ant stalo krašto. Jei stalas be galo slidus, paleidus virvę, ji pradės slysti žemyn. Koks virvės greitis tuo metu, kai ji visa atsiskiria nuo stalo? Stalo aukštis didesnis nei virvės ilgis. Papildomas <u>sunkus</u> klausimas: ta pati sąlyga, tik virvė suvyniota. Trinties tarp virvės dalių nėra.

Sprendimas

Pirmas sprendimo variantas. Virvė pradės slysti ir jai visai nuslydus nuo stalo, jos masės centras, lyginant su pradiniu momentu, pažemėjo dydžiu L/2. Potencinės energijos skirtumas lygus įgytai kinetinei energijai (remiantis energijos tvermės dėsniu), todėl

$$mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{gL}$$

Antras sprendimo variantas. Užrašykime antrąjį Niutono dėsnį virvei:

$$m_x g = ma$$

Čia $m_x$ – kabančios dalies masė. Jei virvės ilginis tankis σ, tai:

$$xg = L\ddot{x}$$

Tokios diferencialinės lygties sprendinys

$$x(t) = A\exp(t\sqrt{g/L}) + B\exp(-t\sqrt{g/L})\,.$$

Kuo mažesnė virvės dalis iš pradžių kabojo, tuo ilgiau užtruks visos virvės slydimas, todėl galime laikyti, kad T (visas slydimo laikas) pakankamai didelis ir atmesti narį su neigiamu eksponentės rodikliu. Tada

$$v(T) = \dot{x}(T) = A\sqrt{g/L}\exp(T\sqrt{g/L}) = x(T)\sqrt{g/L} = L\sqrt{g/L} = \sqrt{gL}$$

Tuo atveju kai virvės dalis suraityta, antrojo Niutono dėsnio ankstesnė lygtis negalioja, nes sunkio jėga greitina ne visą virvę, o tik jos dalį, be to sunkio jėga dar ir suteikia prie judėjimo prisijungusiai nedidelei daliai greitį v.

$$m_x g dt = m_x dv + v dm$$

$$\sigma x g dt = \sigma x dv + v\sigma v dt$$

$$xg = x\frac{dv}{dt} + vv$$

$$xg = x\dot{x} + \dot{x}^2$$

Gautosios diferencialinės lygties sprendinys gali priklausyti tik nuo g ir t, nes daugiau jokie dydžiai į ją neįeina. x dimensija yra m, g – m/s$^2$, t – s. Vienintelis galimas variantas: x=Cgt$^2$, kur C – bedimensė konstanta. Įstatę šia išraišką į lygti, gauname:

$$x = \frac{1}{6}gt^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{g}{3}\right)t^2$$

Lengvai pastebima analogija su judėjimu pagreičiu g/3.

$$v = \sqrt{\frac{2}{3}gL}$$

Kaip matome galutinis greitis mažesnis nei pirmu atveju. Nors potencinės energijos pokytis tas pats, dalis energijos buvo paversta į šilumą per daug mažų smūgelių, kurie priversdavo vis kitą dalį virvės pajudėti iš rimties būsenos.