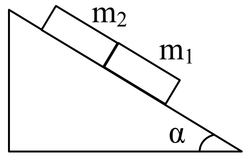
XXXIX LIETUVOS JAUNŲJŲ FIZIKŲ OLIMPIADA

XII klasė

II ratas



1. Nuožulniąja plokštuma pradeda judėti du suglausti tašeliai. Nuožulniosios plokštumos polinkio kampas α, tašelių masės m_1 ir m_2, trinties koeficientai μ_1 ir μ_2 ($\mu_1 > \mu_2$). Kokiu pagreičiu judės pirmasis tašelis?

Sprendimas

Jei tašeliai judėtų nepriklausomai vienas nuo kito, jų pagreičiai būtų $a_1 = g(\sin\alpha - \mu_1 \cos\alpha)$, $a_2 = g(\sin\alpha - \mu_2 \cos\alpha)$. Tačiau $\mu_1 > \mu_2$, todėl $a_2 > a_1$, t.y. antrasis tašelis stums pirmąjį. Išilgai nuožulniosios plokštumos tašelius veikia lygiagretus plokštumai sunkio jėgos dėmuo:

$$F_1 = (m_1 + m_2)g\sin\alpha,$$

o stabdo trinties jėga

$$F_2 = (\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2)g\cos\alpha.$$

Tada tašelių pagreitis

$$a = \frac{F_1 - F_2}{m_1 + m_2} = g\left(\sin\alpha - \frac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2}\cos\alpha\right).$$

2. Tūrio V = 0,1m^3 inde yra idealiosios dujos, kurių molekulės masė m = 6,7·10^{-25}kg. Indas patalpintas vakuume. Indo sienelėje yra maža ploto s = 1mm^2 skylutė. Pradiniu laiko momentu dujų slėgis inde p = 2 kPa, molekulių koncentracija n = 3·10^{22}m^{-3}. Koks bus dujų slėgio pokytis per laiko tarpą Δt = 10 s?

Sprendimas

Dujos, plėsdamosios į vakuumą, darbo neatlieka. Todėl dujų vidinė energija, o tuo pačiu ir temperatūra, nesikeičia. Kadangi p = nkT, dp = kTdn. Koncentracijos pokytis sąlygojamas išlekiančių pro skylutę molekulių skaičiaus dN = - Vdn.

Panagrinėkime molekulių judėjimą skylutės aplinkoje. Laikome, kad vidutinis molekulių judėjimo greitis

$$v = \sqrt{\frac{3kT}{m}}.$$

Per laiką dt pro skylutę gali išlėkti molekulės, esančios atstumu vdt nuo skylutės, t.y. iš tūrio elemento dV = Svdt. Molekulių skaičius tūrio elemente yra ndV = nSvdt. Tačiau pro skylutę gali išlėkti tik tos molekulės, kurios juda link skylutės. Laikant, kad molekulių judėjimo kryptys pasiskirsčiusios tolygiai, gaunama, kad pro skylutę išlėks 1/6 molekulių, esančių tūryje dV, t.y.

$$dN = \frac{1}{6}nSvdt.$$

Tada

$$dp = -\frac{kT}{V}dN = -\frac{kTnSv}{6V}dt = -\frac{kTnS}{6V}\sqrt{\frac{3kT}{m}}dt = -\frac{pS}{2V}\sqrt{\frac{kT}{3m}}dt,$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{S}{2V}\sqrt{\frac{kT}{3m}}dt.$$

Integruodami intervalui Δt gauname:

$$\ln p\Big|_p^{p_1} = -\frac{S}{2V}\sqrt{\frac{kT}{3m}}t\Big|_0^{\Delta t},$$

$$\Delta p = p_1 - p = p\left(e^{-\frac{S}{2V}\sqrt{\frac{p}{3nm}}\Delta t} - 1\right).$$

Įstatę parametrų vertes gauname:

$$\Delta p = 18 \text{ Pa}.$$

Pateikti sąlygoje duomenys sunkiai realizuojami, nes įvertinus temperatūrą

$$T = p/nk,$$

gaunama T =4800K, o tokioje temperatūroje išsilydo visos žinomos medžiagos. Imant $n=3\cdot10^{18}$ m^{-3}, kaip buvo pateikta sąlygoje olimpiados metu, gaunama T=4,8 10^7 K.

3. Tarp dviejų horizontalių kondensatoriaus plokštelių yra alyva, kurios tankis ρ=0,8g/cm^3, santykinė dielektrinė skvarba ε = 2,2. Atstumas tarp plokštelių h = 10cm. Prie apatinės kondensatoriaus plokštelės yra rutuliukas, kurio masė m = 0,1 g, krūvis q=5·10^{-6}C. Koks potencialų skirtumas turi būti tarp plokštelių, kad rutuliukas kiltų į viršų?

Sprendimas

Rutuliuką veikia tokios jėgos: sunkio jėga P = mg, Archimedo jėga $F_A = \frac{1}{6}\pi d^3 \rho g$, elektrostatinė jėga $F_e = qE = \frac{q\varphi}{h}$. Rutuliukas kils į viršų, jei į viršų bus nukreipta tų jėgų atstojamoji, t.y. kai

$$F_A + F_e \geq P,$$

$$\frac{1}{6}\pi d^3 \rho g + \frac{q\varphi}{h} \geq mg,$$

$$\varphi \geq \frac{(6m - \pi d^3 \rho)gh}{6q} = 1{,}87\ V.$$

4. Elektromagnetinių virpesių kontūre palaikomi rezonansiniai pastovios amplitudės svyravimai. Virš induktyvumo ritės L ant gumos juostos, kurios stangrumo koeficientas k, pakabintas mažas geležinis masės m rutuliukas,. Kokia turi būti kontūro kondensatoriaus talpa, kad rutuliukas svyruotų didžiausia amplitude? (Rutuliuko judėjimas nekeičia ritės induktyvumo).

Sprendimas

Rutuliuko svyravimų amplitudė bus didžiausia, kai išorinės jėgos dažnis sutaps su rutuliuko savųjų svyravimų dažniu. Kadangi ritė traukia rutuliuką kaip magnetas, kai rite teka srovė, per vieną elektromagnetinių svyravimų periodą rutuliukas bus pritrauktas du kartus, nes ritėje du kartus atsiras srovė (priešingų krypčių). Taigi rutuliuką veikiančios išorinės jėgos dažnis ν du kartus didesnis už virpesių dažnį ν_{LC}. Kadangi

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}},\ \nu_{LC} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}}; \nu = 2\nu_{LC}$$

tai

$$C = \frac{4m}{kL}.$$

5. Jūsų raketa nusileido panašioje į Žemę planetoje. Pasiūlykite keletą būdų laisvojo kritimo pagreičiui nustatyti. Kokios priemonės tam reikalingos? Koks būdas ir kodėl yra tiksliausias, jei matavime naudojami paprasti buitiniai prietaisai?

Sprendimas

1 būdas. Imame kokį nors kūną, leidžiame jam kristi iš aukščio h ir išmatuojame kritimo laiką t. Laisvojo kritimo pagreitį gauname iš išraiškos

$$g = \frac{2h}{t^2}.$$

2 būdas. Kokį nors kūną pasveriame spyruoklinėmis svarstyklėmis (dinamometru) ir svirtinėmis svarstyklėmis, jų parodymai atitinkamai P_1 ir P_2. Tada

$$g = g_0 \frac{P_1}{P_2},$$

kur g_0 – laisvojo kritimo pagreitis Žemėje.

3 būdas. Išmatuojame matematinės svyruoklės ilgį ir svyravimų periodą. Laisvojo kritimo pagreitis išreiškiamas formule

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}.$$

Galimi ir kiti būdai. Tiksliausias iš pasiūlytų yra trečias būdas: imant pakankamai ilgą siūlą jo ilgio santykinė paklaida gaunama nedidelė, o matuojant ne vieno, o kelių ar net kelių dešimčių svyravimų laiką ir periodas randamas gan tiksliai.

III ratas

6. Kokiame aukštyje virš apvalaus stalo centro reikia pakabinti lemputę, kad stalo kraštas būtų maksimaliai apšviestas? Stalo spindulys r.

<u>Sprendimas</u>

Stalo krašto apšviestumas išreiškiamas formule

$$E = \frac{I}{S^2}\cos\alpha,$$

kur I – lemputės šviesos stiprumas, S – atstumas nuo lemputės iki stalo krašto, α – šviesos kritimo kampas į stalo plokštumą stalo krašte. Pažymėję lemputės aukštį virš stalo h, gauname:

$$S = \sqrt{h^2 + R^2},$$

$$\cos\alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}},$$

$$E = \frac{Ih}{(h^2 + R^2)^{3/2}}.$$

Apšviestumo maksimumui rasti E išvestinę pagal h prilyginame 0. Gauname

$$\frac{I}{(h^2 + R^2)^{3/2}} - \frac{3Ih^2}{(h^2 + R^2)^{5/2}} = 0,$$

iš kur aukščiui h gauname

$$R^2 - 2h^2 = 0.$$

Imdami teigiamąją lygties šaknį, gauname:

$$h = \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

7. Pradžioje inde yra 10 molių dujų A ir 40 molių dujų B. Laikui bėgant iš dujų A susidaro dujos C ir D (A = C + 2D), o iš dujų B – dujos E ir F (B = E + F). Be to, iš dujų C ir F susidaro skystis (G = 2C + F). Kiek kartų slėgis pasibaigus reakcijoms skiriasi nuo pradinio, jei temperatūra išlieka pastovi?

<u>Sprendimas</u>

Suskilus dujoms A ir B, gauname n_C = 10mol dujų C, n_D = 20mol dujų D ir n_E=n_F=40mol dujų E ir F. Vykstant reakcijai 2C+F=2G, sureaguoja visos dujos C ir 5mol dujų F. Laikome, kad susidariusio skysčio G tankis žymiai didesnis, negu dujų, ir todėl nekreipiame dėmesio į skysčio užimamą tūrį, o taip pat į jo garų slėgį. Tokiu būdu, pasibaigus reakcijoms inde lieka 20mol dujų D, 35mol dujų E ir 40mol dujų E. Pasinaudodami dujų būvio lygtimi, išreiškiame pradinės ir galutinės būsenų slėgius p_0 ir p:

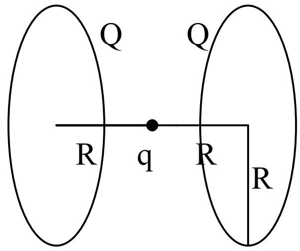
$$p_0 = \frac{n_A + n_B}{V} RT,$$

$$p = \frac{n_D + n_E + n_F}{V} RT.$$

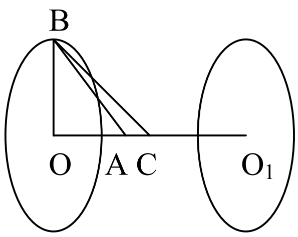
Iš čia slėgių santykis

$$\frac{p}{p_0} = \frac{m_D + n_E + n_F}{n_A + n_B} = 1{,}9.$$

8. Du vienodi vieliniai žiedai įtvirtinti taip, kad jų ašys sutampa. Žiedų spinduliai R, atstumas tarp jų plokštumų 2R. Žiedams suteikti vienodi krūviai Q. Mažas rutuliukas patalpinamas tarp žiedų ir gali judėti išilgai tiesės, jungiančios žiedų centrus. Raskite rutuliuko mažų svyravimų periodą, jei rutuliukui suteiktas krūvis q to paties ženklo, kaip ir žiedų krūviai. Rutuliuko masė m.



Sprendimas



Pažymime žiedų centrus O ir O_1, atkarpos OO_1 vidurį C. Tegul rutuliukas pasislinks iš pusiausvyros padėties C į tašką A mažu atstumu AC = x. Gausime jį veikiančią jėgą. Imame mažą žiedo elementą taško B aplinkoje, to elemento krūvį pažymime q‘. Krūvių q’ ir q sąveikos jėgos projekcija į OO_1 yra

$$f = \frac{qq' \cdot OA}{4\pi\varepsilon_0 (AB)^3} = \frac{qq'(R+x)}{4\pi\varepsilon_0 (2R^2 + 2Rx + x^2)^{3/2}}.$$

Sumuodami visų žiedo elementų poveikio jėgas, gauname viso žiedo krūvio Q poveikio jėgą:

$$F_1 = \frac{qQ(R+x)}{4\pi\varepsilon_0 (2R^2 + 2Rx + x^2)^{3/2}}.$$

Akivaizdu, kad žiedo elementų poveikio jėgų statmenųjų OO_1 komponenčių atstojamoji lygi 0. Analogiškai gauname antrojo žiedo poveikio jėgą

$$F_1 = \frac{qQ(R-x)}{4\pi\varepsilon_0 (2R^2 - 2Rx + x^2)^{3/2}}.$$

Jėgos F ir F_1 priešingų krypčių ir nukreiptos nuo atitinkamo žiedo. Atstojamoji jėga yra lygi tų dviejų jėgų skirtumui it nukreipta priešinga poslinkiui kryptimi x. Kai x mažas, atmesdami aukštesnius nei 2 x laipsnius atstojamajai jėgai gauname:

$$F' = F - F_1 = \frac{qQ}{8\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 R^3} x.$$

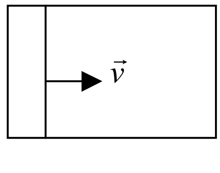
Matome, kad F\` proporcinga x, ir proporcingumo koeficientas

$$k = \frac{qQ}{8\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 R^3}.$$

Tada mažų svyravimų periodas

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 4\pi\sqrt{\frac{2\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 m R^3}{qQ}}.$$

9. Stačiakampio rėmelio, pagaminto iš vielos, kurios ilgio vieneto varža r, viena kraštinė dvigubai ilgesnė už kitą. Rėmelis yra statmename jo plokštumai magnetiniame lauke, kurio indukcija B. Skersinis, padarytas iš tokios pačios vielos ir be varžos kontaktuojantis su rėmelio



ilgesniosiomis kraštinėmis, juda išilgai jų greičiu v, būdamas lygiagretus mažesniosioms kraštinėms. Kokia mažiausia srovė tekės skersiniu?

Sprendimas

Skersiniui judant, jame indukuojama elektrovaros jėga

$$E = vBl,$$

kur l – skersinio ilgis. Tokiu būdu, skersinis lygiavertis srovės šaltiniui, kurio elektrovaros jėga E ir vidaus varža R = rl.

Taigi turime srovės šaltinį, prie kurio lygiagrečiai prijungtos dvi varžos, atitinkančios kairiąją ir dešiniąją rėmelio puses. Pažymime skersinio atstumą nuo kairiojo rėmelio pusės x. Tada kairiąją ir dešiniąją puses atitinkančios varžos R_1 ir R_2 atitinkamai lygios

$$R_1 = r(1+2x),\ \ R_2 = r(l+2(2l-1)) = r(5l-2x).$$

Panaudodami Omo dėsnį gauname

$$I = \frac{E}{R+\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}} = \frac{6El}{r(7l^2+8xl-4x^2)}.$$

Maksimaliai srovei rasti I išvestinę pagal x prilyginame 0. gauname lygtį:

$$8l-8x=0.,$$

$$x=l.$$

Įstatę tą vertę, o taip pat E išraišką gauname

$$I = \frac{6Bl^2v}{r(7l^2+8l^2-4l^2)} = \frac{6vB}{11r}.$$

Kad tai minimali, o ne maksimali vertė, įsitikiname imdami kokią nors kitą x vertę.

Sakysime, kai x = 0,

$$I = \frac{6vB}{7r} > \frac{6vB}{11r}.$$

10. Kokiu pagreičiu protonas artėja prie vienkrūvio neigiamo anglies jono tuo momentu, kai atstumas tarp jų r = 10 cm? Protono masė m_p=1,67·10^{-27}kg, elementarusis elektros krūvis e=1,6·10^{-19}C, $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\cdot 10^9\, m/F.$

Sprendimas

Pažymime protono ir anglies jono pagreičius jų bendro masių centro atžvilgiu atitinkamai a_p ir a_c. Tada protono pagreitis anglies atžvilgiu

$$a = a_p + a_c.$$

Pagreičiams rasti pasinaudojame Kulono dėsniu

$$a_p = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2 m_p},$$

$$a_c = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2 m_c}.$$

Ieškomasis pagreitis

$$a = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(\frac{1}{m_p}+\frac{1}{m_c}\right).$$

Laikome, kad $m_c = 12m_p$. Tada

$$a = \frac{13e^2}{48\pi\varepsilon_0 r^2 m_p} = 15 m/s^2.$$

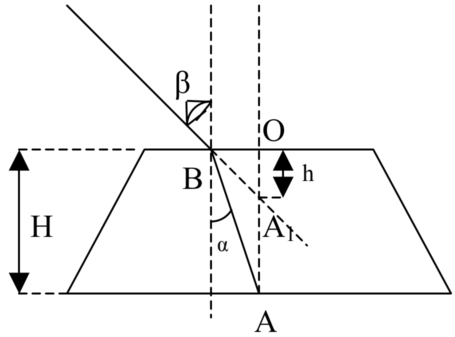
Eksperimentas

11. Nustatyti plokštelės medžiagos lūžio rodiklį oro atžvilgiu dviem būdais ir vienam iš būdų apskaičiuoti absoliutinę bei santykinę paklaidas. Priemonės: trapecijos formos skaidri plokštelė, balto popieriaus lapas, milimetrinio popieriaus juostelė, liniuotė, pieštukas.

Sprendimas

Padėjus lygiagrečių sienelių plokštelę ant milimetrinės juostelės galima stebėti juostelės vaizdo a) vertikalųjį ir b) horizontalųjį nuokrypį.

a) Iš lūžio rodiklio apibrėžimo



$$n = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

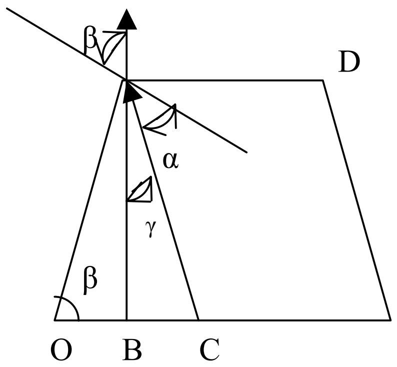
nedideliems kampams vietoj sin imant tg, gauname

$$n = \frac{H}{h},$$

kur H – plokštelės storis, h – tariamasis jos storis. Tariamajam storiui nustatyti plokštelė dedama ant dalies milimetrinio popieriaus juostelės, o kita juostelės dalis priglaudžiama prie plokštelės šono taip, kad atrodytų žiūrint iš viršaus vienodame lygyje su matoma pro plokštelę juostele. Priglaustosios juostelės atstumas nuo plokštelės viršaus ir yra ieškomasis h.

Turint plokštelę 30mm pločio, matuodami liniuote padarome paklaidą iki 1mm. Atstumas h matuojamas mažiau tiksliai, galima paklaida siekia 3 – 5mm. Todėl lūžio rodiklio santykinė paklaida gali siekti 30%.

b) Patenkant šviesos spinduliams į stebėtojo akį pro sieneles OA ir AD, stebimas dvigubas vaizdas. Spindulys iš taško B pro sienelę AD praeina nelūždamas, ir ta pačia kryptimi eina spindulys pro sienelę AO iš taško C. Gauname:



$$n = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

Kadangi α = β – γ, turim: $n = \dfrac{\sin\beta}{\sin(\beta-\gamma)} = \dfrac{1}{\cos\gamma - \sin\gamma\, ctg\beta}$.

Išmatuojame AO = a, AB = H, BC = l. Tada

$$ctg\beta = \frac{\sqrt{a^2 - H^2}}{H},$$

$$\sin\gamma = \frac{l}{\sqrt{a^2 + H^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{H}{\sqrt{a^2 + H^2}},$$

$$n = \frac{H\sqrt{a^2 + H^2}}{H^2 - l\sqrt{a^2 - H^2}}.$$

Imant parametrų matavimo paklaidas to paties didumo, kaip ir anksčiau, gaunama 10–15 % santykinė paklaida.

Užduotys ir sprendimai skelbiami iš leidinio:

39-OJI LIETUVOS JAUNŲJŲ FIZIKŲ OLIMPIADA. *Parengė A. Bandzaitis*

Pastaba: ši informacija interneto svetainėje www.olimpas.lt skelbiama nuo 2005 09 29.