XLII LIETUVOS JAUNŲJŲ FIZIKŲ OLIMPIADA

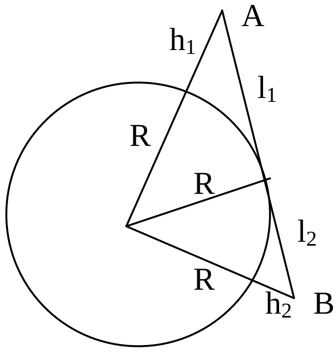
XII klasė

II ratas

1. **Žmogui plaukiant valtimi link kranto, jo galva yra 0,5 m virš vandens lygio. Kai tik jis pamato ant kranto esančio žibinto šviesą, tuoj pat įjungia garsinį signalą. Po kiek laiko ant kranto išgirs garsą, jeigu žibintas yra 1,5 m virš vandens lygio?**

Sprendimas

Paveiksle parodytas Žemės pjūvis. Čia taškas A atitinka žibinto padėtį, o taškas B – žmogaus galvos valtelėje vietą. Be to, pavartojome tokius sąlygoje nurodytų ir žinomų dydžių žymenis: h_1 = 1,5m, h_2 = 0,5m, Žemės spindulys R = 6371km, garso greitis v = 342m/s.



Norint rasti laiką, būtiną apskaičiuoti atstumą AB.

$$AB = l_1 + l_2. \qquad (1)$$

Iš Pitagoro teoremos:

$$R^2 + l_1^2 = (R + h_1)^2, \qquad (2)$$

$$R^2 + l_2^2 = (R + h_2)^2. \qquad (3)$$

Iš (2) ir (3) išreiškiame l_1 ir l_2:

$$l_1 = \sqrt{h_1^2 + 2h_1R}, \qquad (4)$$

$$l_2 = \sqrt{h_2^2 + 2h_2R}. \qquad (5)$$

(4) ir (5) lygčių pašakniuose pirmuosius narius kaip mažus dydžius galime atmesti. Tuomet

$$l_1 \approx \sqrt{2h_1R}, \qquad (6)$$

$$l_2 \approx \sqrt{2h_2R}. \qquad (7)$$

Iš (1), (6) ir (7) randame ieškomą laiką:

$$t = \frac{AB}{v},$$

$$t = \frac{\sqrt{2h_1R} + \sqrt{2h_2R}}{v}.$$

t ≈ 20s.

2. **Kambaryje stovi vertikalus iš viršaus atviras cilindro pavidalo indas. Jis uždengiamas galinčiu laisvai slankioti stūmokliu. Kuriuo atveju ir kodėl stūmoklis nusistovės aukštesnėje padėtyje: kai indas gerai praleidžia šilumą ar kai indas yra izoliuotas?**

Sprendimas

Tarkime, kad uždarant indą, pradinė dujų temperatūra T_0, slėgis p_0, indo tūris V_0. Akivaizdu, kad abiem atvejais po stūmokliu yra tas pats dujų kiekis.

Pirmuoju atveju, kai indas praleidžia šilumą, dujos suspaudžiamos izotermiškai, t.y. nusistovi šie parametrai: p_1, V_1, T_0.

$$p_0V_0 = p_1V_1. \qquad (1)$$

Antruoju atveju, kai indas izoliuotas,

$$\frac{p_0V_0}{T_0} = \frac{p_2V_2}{T_2}. \qquad (2)$$

Abiem atvejais slėgis inde vienodas, t.y. $p_2 = p_1$. Taigi palyginkime dujų tūrius po stūmokliu:

$$V_1 = \frac{p_0V_0}{p_1}, \qquad (3)$$

$$V_2 = \frac{p_0V_0T_2}{T_0p_2}, \qquad (4)$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_0}. \qquad (5)$$

Kai indas nepraleidžia šilumos, energijos nuostolių nėra, taigi $T_2>T_0$, o tai reiškia, kad $V_2>V_1$. Vadinasi, antruoju atveju stūmoklis nusistovės aukštesnėje padėtyje.

3. Horizontali S = 10 m^2 ploto metalinė plokštelė yra h = 1,0 m aukštyje nuo laidaus paviršiaus. Plokštelė pradeda laisvai kristi, visą laiką pasilikdama sujungta su paviršiumi per L = 3,18· 10^{-6} H induktyvumo rite. Po kiek laiko nuo kritimo pradžios sistemoje atsiras λ = 100 m ilgio radijo bangų rezonansas? ε_0 = 8,85· 10^{-12} C/V· m.

Sprendimas

Sistemą galime nagrinėti kaip virpamąjį kontūrą, sudarytą iš induktyvumo L ritės ir plokščiojo kondensatoriaus. Šio virpamojo kontūro savasis dažnis

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \qquad (1)$$

kur C – kondensatoriaus talpa.

Plokštei krintant, šio kondensatoriaus talpa kinta, nes kinta atstumas tarp plokštės ir paviršiaus. Esant tam tikram atstumui d, kondensatoriaus talpa bus būtent tokia, kad sistemoje galės atsirasti minėtas sąlygoje rezonansas, atitinkantis 100 m ilgio radijo bangą, t.y. šio rezonanso dažnis

$$\omega = \frac{2\pi v}{\lambda}, \qquad (2)$$

kur v – šviesos greitis, lygus 3· 10^8 m/s. Iš (1) ir (2):

$$\lambda = 2\pi v\sqrt{LC}, \qquad (3)$$

iš kur

$$C = \frac{\lambda^2}{4\pi^2v^2L}. \qquad (4)$$

Plokščiojo kondensatoriaus talpa

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}. \qquad (5)$$

Plokštė per laiką t nuo kritimo pradžios pajuda atstumu l, lygiu

$$l = \frac{gt^2}{2}; \qquad (6)$$

Bet $$d = h - l. \qquad (7)$$

Taigi, įrašę į (4) atitinkamus dydžius iš (5), (6) ir (7), gauname:

$$\frac{\varepsilon_0 S}{h - \frac{gt^2}{2}} = \frac{\lambda^2}{4\pi^2v^2L}, \qquad (8)$$

iš kur surandame reikiamą laiką:

$$t = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{2(\lambda^2h - 4\pi^2\varepsilon_0 Sv^2L)}{g}}.$$

Įstačius skaitines vertes, gauname, t ≈ 0,44 s.

4. Kaip neturint laikrodžio namų sąlygomis pasidaryti prietaisą neilgiems intervalams matuoti?

<u>Sprendimas</u>

Egzistuoja ne vienas būdas pasidaryti tokį prietaisą. Aptarsime bene paprasčiausią.
Pakabinę ant siūlo svarelį ir leidę jam svyruoti nedidele amplitude, kaip tik ir turėsime tokį prietaisą (matematinę svyruoklę). Svyravimo periodas:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \qquad (1)$$

kur l – siūlo ilgis. Taigi

$$l = \frac{gT^2}{4\pi^2}. \qquad (2)$$

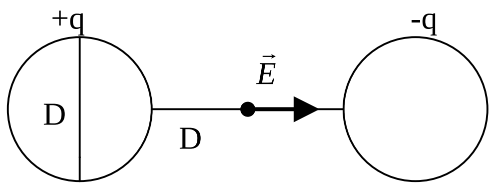
Iš čia randame svyruoklės, kurios svyravimo periodas 1s, siūlo ilgį: l = 0,248 m.

5. Abiejuose plono stiklinio vamzdelio galuose išpūtus vienodo skersmens D muilo burbulus, šiems burbulams suteikiami tokio pačio dydžio, bet priešingo ženklo krūviai. Vamzdelio ilgis L = D. Kiek kartų pakis elektrinio lauko stipris taške, esančiame vamzdelio viduryje (vienodai nutolusiame nuo jo galų), sistemai perėjus į stabilią būseną (t.y., kai vienas iš muilo burbulų visiškai susitrauks)?

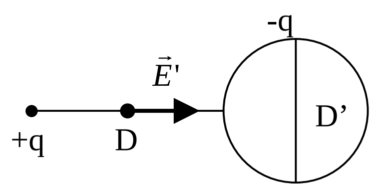
<u>Sprendimas</u>

Pradžioje elektrinio lauko stipris vamzdelio viduryje (žr. 1 pav.) lygus

$$E = 2k\frac{q}{D^2}. \qquad (1)$$



1 pav.



2 pav.

Sistemai perėjus į stabiliąją būseną, burbulo tūris lygus

$$V' = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{D'}{2}\right)^3, \qquad (2)$$

kur D’ – naujojo burbulo skersmuo.
Vyksmą laikydami izoterminiu, galime užrašyti burbulo tūrio pradžioje V_1 ir naujojo burbulo tūrio V_2 sąryšį:

$$V_2 = 2V_1, \qquad (3)$$

Pasinaudojame rutulio tūrio formule

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3. \qquad (4)$$

Iš (2), (3) ir (4) randame

$$D' = \sqrt[3]{2}D. \qquad (5)$$

Elektrinio lauko stipris, sistemai perėjus į stabiliąją būseną – tai dviejų laukų superpozicija:

$$E' = E_1' + E_2', \qquad (6)$$

kur E_1' *ir* E_2' - atitinkamai pirmojo ir antrojo krūvių sukurtų elektrinių laikų stipriai. Jie lygūs:

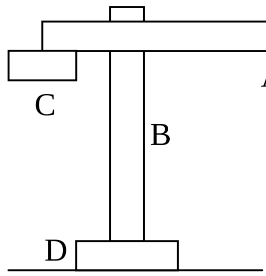
$$E_1' = k\frac{q}{(D/2)^2} = 4k\frac{q}{D^2}, \qquad (7)$$

$$E_2' = k\frac{q}{(D/2 + D'/2)^2}. \qquad (8)$$

Iš (1), (7) ir (8) randame

$$\frac{E'}{E} = 2\left[1 + \frac{1}{(1+\sqrt[3]{2})^2}\right] \approx 2,4.$$

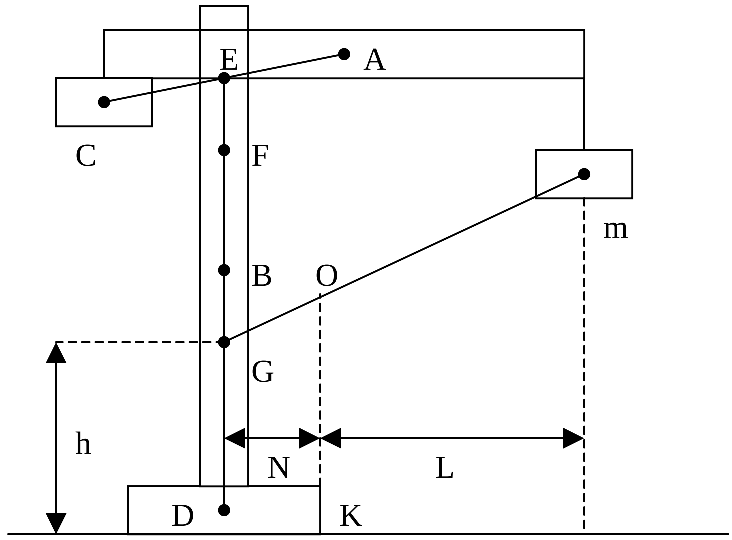
III ratas



6. Krano dalių masės: M_A=5 t, M_B=10 t, M_C=5 t, M_D=20 t. Raskite krano masių centro padėtį, jei visos krano dalys vienalytės. Kokio svorio krovinį keliant kranas apvirstų? Krovinys prikabinamas pačiame krano strėlės A gale. Brėžinio mastelis 1:300.

Sprendimas

Masių centro padėtį surasime grafiškai. Jeigu krano dalys yra vienalytės, tai kiekvienos tokios dalies masių centras bus jos geometriniame centre. Surandame šiuos taškus ir pažymime atitinkamai A, B, C ir D, kaip parodyta brėžinyje. Dabar surasime sistemos, susidedančios iš dviejų dalių (A ir C) masių, centro padėtį. Kadangi šių dalių masės vienodos, tai masių centras bus atkarpos, jungiančios taškus A ir C, viduryje. Pažymėkime šio taško padėtį raide E. Toliau pastebime, kad sistemos, susidedančios iš dalių A ir C, ir krano dalies B masės taip pat vienodos. Taigi sistemos, susidedančios iš trijų dalių (A, B ir C), masių centras bus atkarpos, jungiančios taškus E ir B viduryje (taškas F).



Mastelis 1:300

Pagaliau pastebime, kad sistemos, susidedančios iš dalių A, B ir C ir krano pagrindo D, masės taip pat sutampa. Taigi, ieškomas viso krano masių centras yra atkarpos, jungiančios taškus F ir D viduryje (taškas G). Išmatuojame šio taško atstumą nuo žemės paviršiaus h, atstumą N nuo taško K iki statmenos pagrindui linijos, einančios per tašką G bei atstumą L nuo taško K iki vertikalios linijos, einančios per krovinio masių centrą. Padauginę gautus rezultatus iš mastelio daugiklio, gauname:

$$h = 10{,}5 \text{ m},\ N = 6\text{m},\ L = 12\text{m}.$$

Krano masė $M = M_A + M_B + M_C + M_D = 40$t.

Keliant pakankamai sunkų (masės m) krovinį, kranas gali imti suktis apie ašį K ir apvirsti. Taip įvyks, jeigu vertikali tiesė, einanti per visos sistemos (krano ir krovinio) masių centrą (tašką O), nekirs krano pagrindo. Panagrinėkime ribinį atvejį, kai ši tiesė eina tiksliai per tašką K. Kad visos sistemos masių centras būtų taške O (1 pav.), turi galioti lygybė:

$$MN=mL.$$

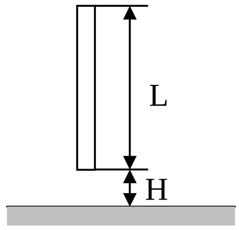
Iš šios lygties galime surasti mažiausią krovinio, kurį keliant kranas apvirstų, masę:

$$m = \frac{M \cdot N}{L}.$$

Įrašę M, N ir L vertes, gauname:

$$m = 20\text{t}.$$

7. **Plonas strypas pradeda kristi vertikaliai žemyn iš aukščio H virš vandens paviršiaus. Strypo ilgis L, tankis ρ, vandens tankis ρ_0. Į kokį didžiausią gylį panirs strypas?**



<u>Sprendimas</u>

Vandens pasipriešinimo nepaisysime. Akivaizdu, kad tuo atveju, kai $\rho \geq \rho_0$, strypas nirs gilyn, kol pasieks vandens telkinio dugną.

Kai $\rho < \rho_0$, atsižvelgiant į pasirinktus H, L ir tankių ρ, ρ_0 vertes, galimi du atvejai:

1) visas strypas panyra,
2) visas strypas nepanyra.

Juos ir panagrinėsime.

1) Į vandenį panirus visam strypui, išstumto vandens tūris lygus strypo tūriui V = LS, kur S - strypo skerspjūvio plotas. Jeigu vandens telkinys pakankamai didelis, tai vandens lygio pokytis, strypui panirus, bus nežymus, ir galime manyti, kad visas išstumtas vanduo atsiduria telkinio paviršiuje. Kai strypas pasiekia didžiausią gylį, jo potencinės energijos pokytis (žr. 1 pav.):

$$\Delta E_s = -\rho g L S (H + x).$$

Vandens potencinės energijos pokytis tuo pačiu momentu bus:

$$\Delta E_v = \rho_0 g L S \left(x - \frac{L}{2}\right).$$

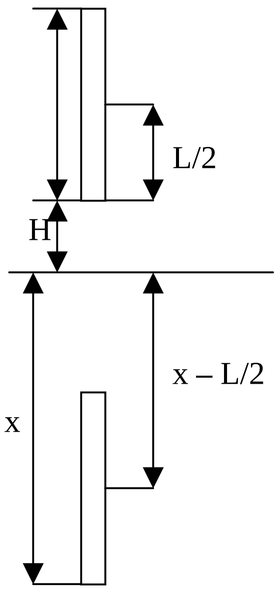
Izoliuotos sistemos pilnutinė energija nepakinta, todėl

$$\Delta E_s + \Delta E_v = 0.$$

Gauname lygtį $\rho g L S (H + x) = \rho_0 g L S \left(x - \frac{L}{2}\right)$,

kurią išsprendę, gauname didžiausią strypo panirimo gylį:

$$x = \frac{\rho H + \rho_0 \frac{L}{2}}{\rho_0 - \rho}.$$



1 pav.

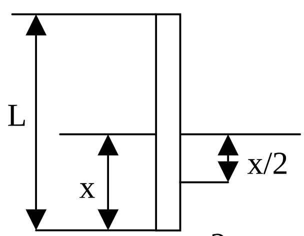
Dabar nustatysime, kokios turėtų būti dydžių H, L, ρ ir ρ_0 vertės, kad strypas visiškai panirtų. Į nelygybę $L \leq x$ įrašę gautą išraišką, turėsime:

$$L \leq \frac{\rho H + \rho_0 \frac{L}{2}}{\rho_0 - \rho}.$$

Taigi, kai dydžiai H, L, ρ ir ρ_0 tenkina pastarąją sąlygą, didžiausias gylis, į kurį panirs strypas

$$x = \frac{\rho H + \rho_0 \frac{L}{2}}{\rho_0 - \rho}.$$

2) Jeigu $\rho < \rho_0 \dfrac{L}{2(H + L)}$, tuomet į vandenį panirs tik dalis strypo (žr. 2 pav.).



2 pav.

Šiuo atveju strypo potencinės energijos pokyčio išraiška bus tokia pat kaip ir pirmuoju atveju, o vandens potencinės energijos pokytį galime užrašyti taip: $\Delta E_v = \rho_0 g x S \cdot \frac{x}{2}$.

Iš energijos tvermės dėsnio dabar gauname

$$\rho_0 x S g \frac{x}{2} = \rho L S g (H + x),$$

$$x^2 - x \frac{2L\rho}{\rho_0} - 2LH \frac{\rho}{\rho_0} = 0,$$

$$x_{1,2} = L \frac{\rho}{\rho_0} \pm \sqrt{L^2 \frac{\rho^2}{\rho_0^2} + 2HL \frac{\rho}{\rho_0}}.$$

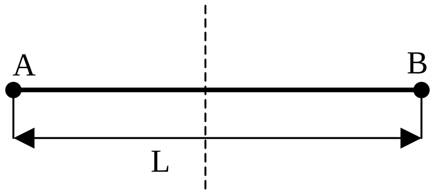
Kadangi x>0, tai antroji šaknis netinka. Matome, kad tuo atveju, kai $\rho < \rho_0 \dfrac{L}{2(H+L)}$, didžiausias gylis, į kurį panirs strypas, yra

$$x_{1,2} = L\frac{\rho}{\rho_0} + \sqrt{L^2\frac{\rho^2}{\rho_0^2} + 2HL\frac{\rho}{\rho_0}}.$$

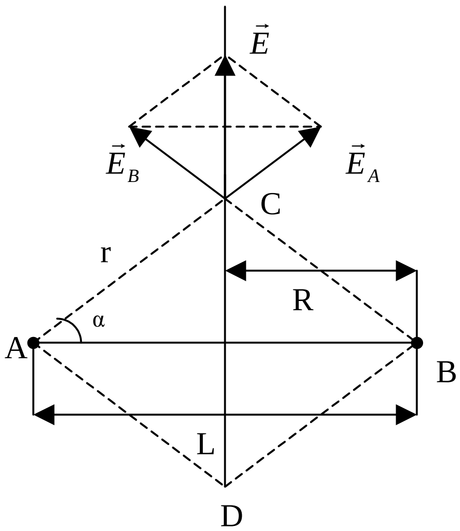
Nesunku įsitikinti, kad kai x = L, išraiškos pirmuoju ir antruoju atvejais sutampa.

Pastaba: Šį uždavinį taip pat galima spręsti tariant, kad strypo potencinė energija sunaudojama nugalėti Archimedo jėgai.

8. Du vienodi krūviai yra taškuose A ir B. Atstumas tarp krūvių L. Kurioje tiesės, kurios taškai vienodai nutolę nuo abiejų krūvių, vietoje elektrinio lauko stipris didžiausias?



Sprendimas



Krūvis, esantis taške A, taške C sukurs elektrinį lauką E_A (žr. pav.), o krūvis, esantis taške B – elektrinį lauką E_B.

$$E_A = E_B = \frac{kq}{r^2}.$$

Pasinaudoję laukų superpozicijos principu, surandame elektrinio lauko stiprį taške C:

$$E = 2E_A \sin\alpha.$$

Įrašę į šią išraišką sinα = h/r, gauname

$$E = \frac{2kqh}{r^3}.$$

Iš Pitagoro teoremos

$$h = \sqrt{r^2 - R^2},$$

kur R = L/2.

Tuomet

$$E = 2kq\sqrt{\frac{1}{r^4} - \frac{R^2}{r^6}}.$$

Akivaizdu, kad E bus didžiausias, kai po šaknies ženklu esanti išraiška įgis didžiausią galimą vertę. Surandame šios išraiškos išvestinę (r atžvilgiu) ir prilyginame ją nuliui:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^4} - \frac{R^2}{r^6}\right) = -\frac{4}{r^5} + \frac{6R^2}{r^7} = 0.$$

Išsprendę šią lygtį, surandame r_{max}

$$r_{\max} = \sqrt{\frac{3}{2}}R = \frac{\sqrt{3}L}{2\sqrt{2}},$$

$$h = \frac{L}{2\sqrt{2}}.$$

Tokį patį rezultatą gautume ir tuo atveju, jeigu nagrinėtume elektrinio lauko stiprį taške D, simetriškame taškui C ašies AB atžvilgiu.

Pastaba: Sprendžiant uždavinį, vietoj kintamojo r galima pasirinkti kampą α.

Kadangi $r = \dfrac{R}{\cos\alpha}$, tai elektrinio lauko stipris

$$E = \frac{2kq\cos^2\alpha\sin\alpha}{R^2}.$$

Surandame išvestinę ir prilyginame ją nuliui:

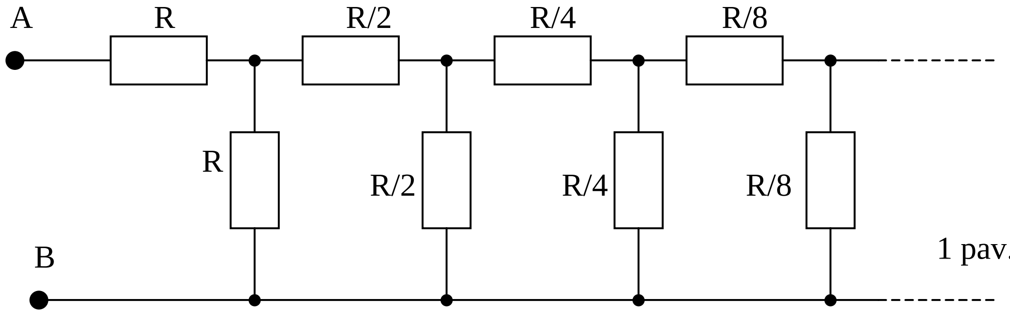
$$\frac{dE}{d\alpha}=\frac{2kq}{R^2}[-2\sin^2\alpha\cos\alpha+\cos^3\alpha]=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sin\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\alpha=\pm35^0.$$

Taigi elektrinio lauko stipris didžiausias taškuose C ir D (žr. pav.), nutolusiuose nuo krūvių atstumu $r_{\max}=\sqrt{\frac{3}{2}}R=\frac{\sqrt{3}L}{2\sqrt{2}}$ į vieną (taškas C) arba į kitą (taškas D) pusę.

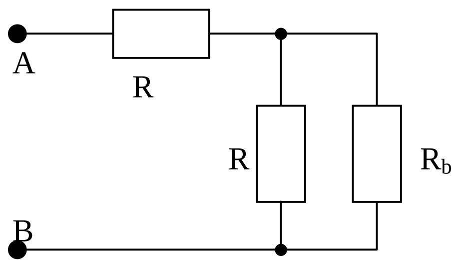
9. Raskite begalinės elektros grandinės varžą tarp taškų A ir B.



1 pav.

Sprendimas

Pažymėkime ieškomąją visos grandinės varžą $R_{AB}=R_a$ (žr. 1 pav.). Jeigu iš grandinės pašalintume pirmąsias dvi (iš kairės pusės) varžas R, tai akivaizdu, kad likusios grandinės dalies varža R_b būtų tiksliai du kartus mažesnė už pradinę visos grandinės varžą, t.y.:



2 pav.

$$R_b=R_a/2.$$

Šią grandinės dalį galime laikyti viena defektine varža R_b (žr. 2 pav.).

Grandinės dalies, susidedančios iš varžos R, sujungtos lygiagrečiai su varža R_b, varža būtų lygi

$$R_C=\frac{RR_b}{R+R_b}=\frac{R\frac{R_a}{2}}{R+\frac{R_a}{2}}=\frac{RR_a}{2R+R_a}.$$

Visa grandinė susideda iš varžos R, sujungtos nuosekliai su R_C, vadinasi,

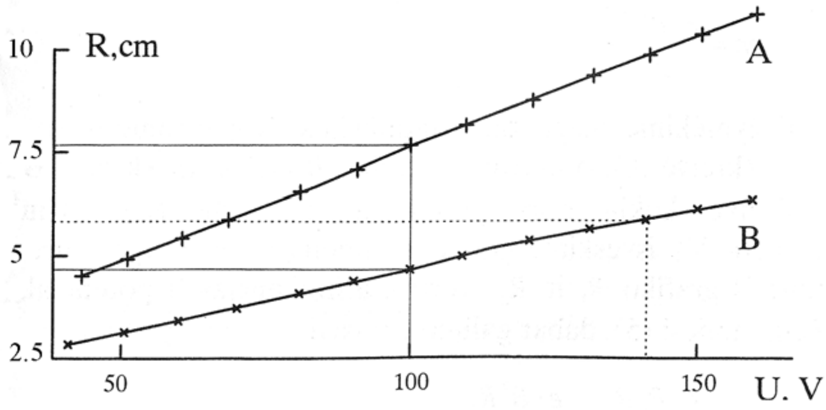
$$R_a=R+R_C.$$

Įrašome į šią lygtį R_C išraišką:

$$R_a=R+\frac{RR_a}{2R+R_a}.$$

Išsprendę šią lygtį gauname, kad visos grandinės varža $R_a=\sqrt{2}R.$

10. Vieną kartą jonizuotų jonų pluoštelis sudaromas pagreitinant juos potencialu U. Po to pluoštelis patenka į nuolatinio magnetinio lauko, kurio indukcijos vektorius B statmenas dalelių greičiui, sritį. Šioje srityje matuojamas dalelių trajektorijos kreivumo spindulys R. Paveiksle



pavaizduota šio spindulio priklausomybė nuo greitinančiojo potencialo (kreivė A) bei analogiška priklausomybė, kai magnetinė indukcija padidinama dydžiu ΔB = 0,05 T (kreivė B). Raskite dalelių masę.

Sprendimas

Greitintos potencialu U dalelės kinetinė energija lygi

$$\frac{mv^2}{2} = eU.$$

Vieną kartą jonizuoto jono krūvis lygus elementariam krūviui e = 1,6· 10^{-19}C. Srityje, kurioje magnetinio lauko indukcijos vektorius statmenas dalelių greičiui, įcentrinė jėga lygi jonus veikiančiai Lorenco jėgai, t.y. $$\frac{mv^2}{R} = evB$$

ir dalelės juda spindulio R apskritimu.

Tuomet turime $$v = \frac{2U}{RB}.$$

Dabar remdamiesi pastarąja lygtimi ir viena iš dviejų pirmųjų, galime gauti išraiškas, į kurias neįeina dalelių greitis:

$$R = \sqrt{\frac{2m}{e}}\frac{\sqrt{U}}{B},$$

$$U = \frac{eB^2R^2}{2m},$$

$$m = \frac{eB^2R^2}{2U}.$$

Pažymėkime magnetinės indukcijos dydį pirmuoju atveju B_1 (kreivė A), o antruoju atveju $B_2 = B_1 + \Delta B$ (kreivė B). Pasirinkę kokią nors potencialo U vertę (pavyzdžiui, U = 100V), išveskime grafike statmeną U ašiai tiesę. Suraskime iš grafiko R_1 ir R_2 vertes, atitinkančias šį potencialą. Remdamiesi U išraiška gauname:

$$U = \frac{eB_1^2R_1^2}{2m} = \frac{eB_2^2R_2^2}{2m},$$

$$B_1R_1 = B_2R_2,$$

$$B_1R_1 = B_1R_2 + \Delta BR_2,$$

$$B_1 = \frac{\Delta BR_2}{R_1 - R_2}.$$

Įrašę į masės išraišką turime

$$m = \frac{eB_1^2R_1^2}{2U} = \frac{e(\Delta B)^2R_1^2R_2^2}{2U(R_1 - R_2)^2}.$$

Įrašę skaitines vertes gauname m = 3,7· 10^{-26}kg.

Pastaba: Uždavinį taip pat sėkmingai galima išspręsti ir pasirinkus fiksuotą spindulio R vertę. Tuo atveju reikia nubrėžti grafike statmeną R ašiai tiesę ir surasti atitinkančias pasirinktą spindulį potencialo vertes (U_1 ir U_2). Tuomet

$$R = \sqrt{\frac{2m}{e}}\frac{\sqrt{U_1}}{B_1} = \sqrt{\frac{2m}{e}}\frac{\sqrt{U_2}}{B_2},$$

$$B_1 = \frac{\Delta B\sqrt{U_1}}{\sqrt{U_2} - \sqrt{U_1}}.$$

$$m = \frac{eB_1^2R^2}{2U_1} = \frac{e(\Delta B)^2R^2}{2(\sqrt{U_2} - \sqrt{U_1})^2}.$$

Apskaičiavę gautume tokį patį rezultatą kaip ir pirmuoju atveju.

Eksperimentas

11. Nustatykite pusrutulio medžiagos lūžio rodiklį visais jums žinomais metodais. Priemonės: pusritinis, šviesos šaltinis, smeigtukas, pieštukas, liniuotė, popieriaus lapas.

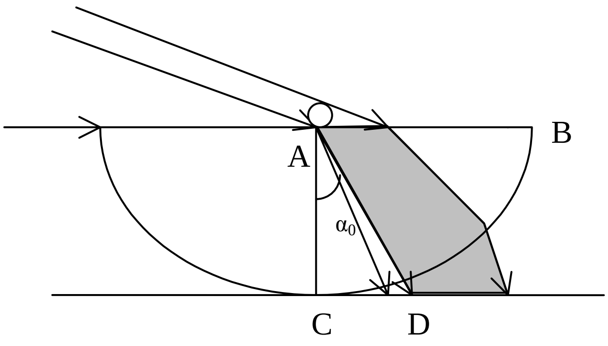
<u>Sprendimas</u>

I metodas. Ribinis lūžimas.

Pusritinį iškiliuoju paviršiumi paguldome ant stalo (1 pav.). Pakėlę lemputę virš jo, ant stalo gauname smeigtuko, esančio taške A, šešėlį. Leidžiant lemputę žemyn, šešėlis tolsta nuo pusritinio. Kai tik lemputę nuleidžiame taip žemai, kad pusritinį praeina ir ribiniu kampu (atitinkančiu visišką vidaus atspindį, jei spinduliai sklistų iš pusritinio) α_0 lūžę spinduliai, kairysis šešėlio kraštas (taškas D) nustoja slinkęs. Dešinįjį šešėlio kraštą riboja spinduliai, praeinantys pro pusritinio plokščiojo paviršiaus dalį AB. Didinant kritimo kampą, dešinysis šešėlio kraštas tolsta nuo taško D, smeigtuko šešėlis platėja.

Medžiagos lūžio rodiklis

$$n = \frac{1}{\sin\alpha_0}. \qquad (1)$$



1 pav.

Pažymėkime AC = R, CD = l.
Iš brėžinio matyti, kad

$$\sin\alpha_0 = \frac{l}{\sqrt{R^2 + l^2}}. \qquad (2)$$

Iš (1) ir (2) gauname

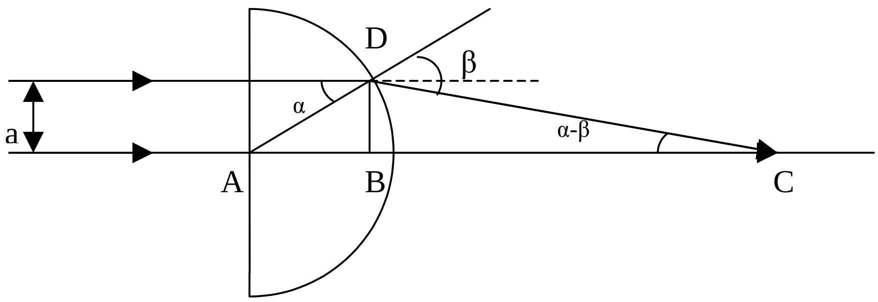
$$n = \sqrt{1 + \frac{R^2}{l^2}}.$$

Matuoti galima ir ribinį visiško vidaus atspindžio kampą α_0, nukreipiant šviesą DA kryptimi. Šiuo atveju sunkiau tiksliai nustatyti ribiniu kampu sklindančio spindulio kryptį.

II metodas. Fokusuojančios pusritinio savybės.

Lygiagrečiųjų spindulių pluoštelis, praėjęs pusritinį, susirenka taške C (2 pav.). Pažymėkime AD = R, AC = F + R, BD = a. Lūžio dėsnis viršutiniam spinduliui:

$$n \sin\alpha = \sin\beta. \qquad (1)$$



2 pav.

Iš ΔADB:

$$\sin\alpha = \frac{a}{R}. \qquad (2)$$

Taikome sinusų teoremą ΔACD:

$$\frac{F+R}{\sin(\pi-\beta)} = \frac{R}{\sin(\beta-\alpha)}.$$

Iš čia

$$F + R = \frac{R\sin\beta}{\sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta}. \qquad (3)$$

Iš (1), (2) ir (3) gauname:

$$F = \frac{nR^2}{n\sqrt{R^2-a^2} - \sqrt{R^2-n^2a^2}} - R. \qquad (4)$$

Matome, kad F priklauso nuo a. Didėjant a, kritimo kampas α taip pat didėja. Jeigu $\alpha \geq \alpha_0$ (α_0 ribinis visiško atspindžio kampas), tai spinduliai nepraeina pro pusritinį. Mažėjant a, F didėja. Kai a<<R, iš (4) formulės gauname didžiausią F reikšmę:

$$F = \frac{R}{n-1}. \qquad (5)$$

Išmatavę F ir pusritinio spindulį R, apskaičiuojame n:

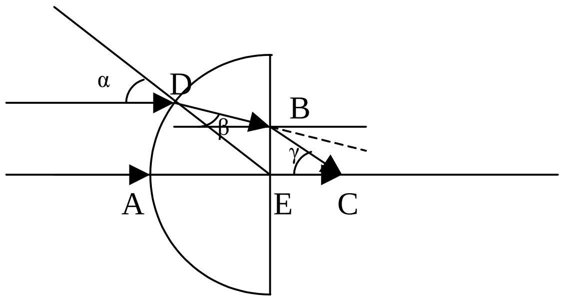
$$n = 1 + \frac{R}{F}.$$

(5) formulę galime gauti, pasinaudodami paraksialiuoju artėjimu, kai $\sin\alpha \approx tg\alpha \approx \alpha$.

Kai lygiagrečiųjų spindulių pluoštelis krinta į išgaubtąjį pusritinio paviršių, gauname mažesnę F reikšmę.

Šiuo atveju (žr. 3 pav.) EC=F, BE=h.

Lūžimo dėsnis viršutiniam spinduliui šiuo atveju:



3 pav.

$$\sin\alpha = n\sin\beta, \qquad (6)$$

$$n\sin(\alpha-\beta) = \sin\gamma, \qquad (7)$$

$$F = \frac{h}{tg\gamma}. \qquad (8)$$

Taikome sinusų teoremą ΔBDE:

$$\frac{h}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha-\beta)}. \quad (9)$$

Kai kampai maži ($\sin\alpha \approx tg\alpha \approx \alpha.$), iš (6) – (9) gauname:

$$F = \frac{R}{n(n-1)}. \qquad (10)$$

Išsprendę šią lygtį ir atmetę neigiamą sprendinį, turime:

$$n = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+\frac{4R}{F}}\right).$$

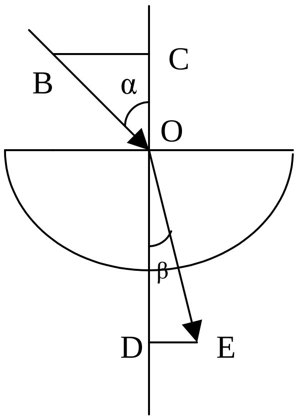
III metodas. Lūžimo dėsnis.

Apšviesto smeigtuko šešėlį nukreipiame į pusritinio tašką O (žr. 4 pav.). Pažymėkime krintančiojo ir lūžusio spindulio kryptis.

Iš lūžimo dėsnio turime:

$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Atidedame atkarpas OB = OE, o iš taškų B ir E nuleidžiame statmenis į liniją, išvestą per tašką O ir statmeną pusritinio plokščiajam paviršiui.



4 pav.

Iš brėžinio matyti, kad

$$\sin\alpha = \frac{BC}{BO},$$

o

$$\sin\beta = \frac{DE}{OE}.$$

Vadinasi,

$$n = \frac{BC}{DE}.$$

Pastaba: ši informacija interneto svetainėje www.olimpas.lt skelbiama nuo 2005 04 22.