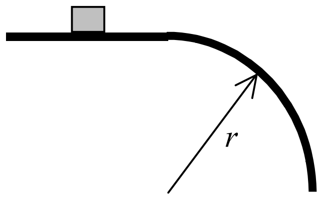
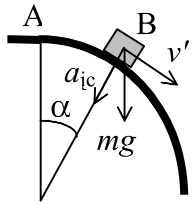
52-oji Lietuvos moksleivių fizikos olimpiada
III rato užduotys XI klasei



1. Stalo slidžiu paviršiumi kraštas užapvalintas ketvirčiu apskritimo, kurio spindulys *r*. Kokį mažiausią greitį reikia suteikti gulinčiam ant stalo mažam tašeliui, kad jis atitrūktų nuo stalo a) pasiekęs užapvalinimą? b) nuslydęs apvaliu stalo kraštu atstumą *l*? c) Kokiame taške tašelis atitrūktų nuo stalo pradėjęs slysti užapvalinimu be pradinio greičio? d) Kokiu atstumu nuo stalo krašto tašelis nukris ant grindų aukščiau nurodytais atvejais, jei stalo aukštis *h*?



a) Tašelis atitrūks, kai sunkio jėga bus nepakankama suteikti įcentrinį pagreitį, reikalingą judant *r* spindulio apskritimu. Gauname

$$g \le v^2/r,\ v_{\min}=\sqrt{gr}.$$

b) Sakykime, kad tašelis atitrūksta taške B (t. y., ∪AB=*l*) turėdamas greitį *v'*. Tada

$$g\cos\alpha \le v'^2/r,\quad mv'^2/2 = mv^2/2 + mgl(1-\cos\alpha),\quad \alpha = l/r,\quad v_{\min}=\sqrt{gr\left(3\cos(l/r)-2\right)}$$

c) Aukščiau pateiktoje formulėje imdami $v_{\min}=0$, gauname

$$\cos l/r = 2/3,\quad l = r\arccos 2/3 = 0{,}84r.$$

d) a atveju tašelis nukris ant grindų po laiko $t_a=\sqrt{2h/g}$ atstumu $s=v_{\min}t_a-r=\sqrt{2hr}-r$ nuo stalo krašto.

b atveju pagal kampu $\alpha = l/r$ į horizontą greičiu $v'=\sqrt{gr\cos\alpha}$ mesto kūno judėjimo dėsningumus kritimo laiką randame iš lygties $h-r(1-\cos\alpha)=v'\sin\alpha\cdot t_b+gt_b^2/2$,

jos teigiamas sprendinys $t_b=\left(-v'\sin\alpha+\sqrt{v'^2\sin^2\alpha+2g\left(h-r\left(1-\cos\alpha\right)\right)}\right)/g$.

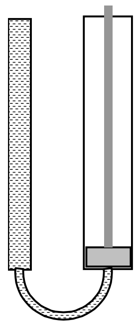
Per laiką t_b nuo taško B horizontalia kryptimi tašelis nutols atstumą $v'\cos\alpha\cdot t_b$, o nuo stalo krašto atstumą

$$s=v'\cos\alpha\left(-v'\sin\alpha+\sqrt{v'^2\sin^2\alpha+2g\left(h-r\left(1-\cos\alpha\right)\right)}\right)/g-r\left(1-\sin\alpha\right).$$

Įstatę *v'* ir α gauname

$$s=\sqrt{r\cos^3(l/r)\left(2h-r\left(1-\cos(l/r)\right)^2\left(\cos(l/r)+2\right)\right)}-r\left(1-\sin^3(l/r)\right).$$

c atveju imame cos(*l*/*r*)=2/3. Tada $s=\left(4\sqrt{r\left(27h-4r\right)}-r\left(27-5\sqrt{5}\right)\right)/27$.

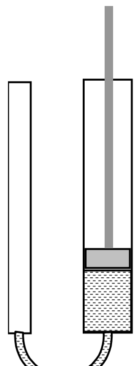


2. Du iš viršaus atviri cilindriniai indai, kurių aukštis po 1 m, o skersmenų santykis 1:2, apačioje sujungti plona žarnele. Platesniajame inde įtaisytas stūmoklis, o siauresnysis iki kraštų pripiltas vandens. Stūmoklis nuo indo dugno keliamas į viršų labai lėtai, ir kol vanduo subėga į platesnįjį indą, 4 % vandens išgaruoja. a) Koks gaunamas slėgio po stūmokliu pokytis? b) Kas pakistų, jei kuris nors vienas indas ar abu būtų palenkti į šoną 45° kampu?

Pradiniu momentu slėgis į apatinę stūmoklio pusę $p=p_0+\rho gh=p_0+mg/\pi d_1^2$, čia ρ – vandens tankis, *h* – vandens stulpelio aukštis siauresniajame inde, *m* – vandens masė, d_1 – siauresniojo indo skersmuo, p_0 – atmosferos slėgis (į apatinę pusę atmosferos slėgį perduoda vanduo). Pakėlus stūmoklį vanduo suteka į platesnį indą, kaip parodyta paveiksle. Šiuo atveju į apatinę pusę veikia slėgis

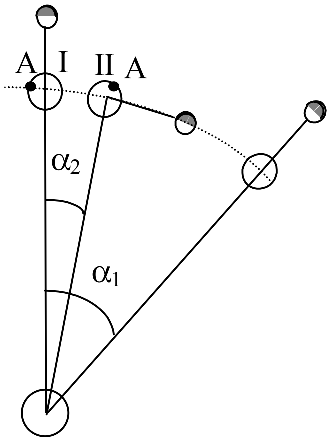
$$p'=p_0-\rho gh=p_0-m'g/\pi d_2^2,$$

$$\Delta p=-m'g/\pi d_2^2-mg/\pi d_1^2=-mg/\pi d_1^2\left(0{,}96/4+1\right)=-1{,}24\rho gh,\qquad \Delta p=-12000\,\text{Pa}.$$



Palenkus siauresnįjį vamzdelį padinis aukštis *h* sumažėja $\sqrt{2}$ karto (laikome, kad vamzdelis siauras, todėl palenkus nuo viršaus išteka labai mažai vandens, o išsiurbus jo siauresniajame vamzdelyje beveik nelieka). Tada slėgio pokyčio išraiška $\Delta p=-mg/\pi d_1^2\left(0{,}96/4+1/\sqrt{2}\right)=-0{,}95\rho gh,\ \Delta p=-9000\,\text{Pa}$. Palenkus platesnįjį vamzdelį $\Delta p=-mg/\pi d_1^2\left(0{,}96/4\sqrt{2}+1\right)=-1{,}17\rho gh,\ \Delta p=-11000\,\text{Pa}$, o palenkus abu vamzdelius $\Delta p=-\left(mg/\pi d_1^2\right)\left(0{,}96/4+1\right)/\sqrt{2}=-0{,}88\rho gh,\ \Delta p=-8500\ \text{Pa}$. Čia neatsižvelgiame, kad palenkus platesnįjį vamzdelį slėgis į įvairias stūmoklio vietas bus skirtingas.

3. Laikykime, kad Žemė sukasi apie Saulę spindulio $R_Ž$=1,496· 10[11] m apskritimu, jos apsisukimo periodas $T_Ž$=365,242 parų, o Mėnulis sukasi apie Žemę spindulio R_M=3,848· 10[8] m apskritimu, jo apsisukimo periodas T_M=27,322 parų. 1) Kaip kinta Mėnulio judėjimo greitis Saulės atžvilgiu? 2) Mėnulio pilnatis buvo matoma iš Žemės 2004 m. kovo 7 d. Kada bus vėl matoma Mėnulio pilnatis? 3) Sakykime, kad tam tikroje Žemės vietoje Mėnulio pilnatis buvo matoma patekant virš horizonto laikrodžiui rodant 8 valandą vakaro. Po kiek laiko toje pat vietoje bus matoma patekanti virš horizonto Mėnulio delčia (apšviesta apie pusė matomo Mėnulio ploto)? Žemė apie Saulę, Mėnulis apie Žemę ir Žemė apie savo ašį sukasi ta pačia kryptimi.



Saulės, Žemės ir Mėnulio padėtys esant artimiausioms pilnatims ir delčiai pateiktos paveiksle. 1) Žemės sukimosi apie Saulę linijinis greitis $v_Ž = 2\pi R_Ž / T_Ž$, $v_Ž = 29{,}8\,\text{km/s}$. Mėnulio sukimosi apie Žemę linijinis greitis $v_M = 2\pi R_M / T_M$, $v_M = 1.02\,\text{km/s}$. Kadangi $R_Ž >> R_M$, Mėnulio greitį Saulės atžvilgiu galime apskaičiuoti vektoriškai sudėdami Žemės greitį Saulės atžvilgiu ir Mėnulio greitį Žemės atžvilgiu. Didžiausią Mėnulio greitį Saulės atžvilgiu gauname esant pilnačiai: $v_{\max} = v_Ž + v_M$, $v_{\max} = 30{,}8\,\text{km/s}$, mažiausią – esant jaunačiai: $v_{\min} = v_Ž - v_M$, $v_{\min} = 28{,}8\,\text{km/s}$. Esant priešpilniam ar delčiai greičiai $v_Ž$ ir v_M statmeni, jų sumos modulis $v' = \sqrt{v_Ž^2 + v_M^2}$, $v' = 29{,}8\,\text{km/s}$. Kitose padėtyse greičio modulis įgauna tarpines vertes. Greičio kryptis taip pat kinta: su Žemės orbitos liestine ji sudaro 0° kampą esant pilnačiai ir jaunačiai, ir ±1,97° kampus esant priešpilniam ir delčiai. Be to, Mėnuliui su Žeme sukantis apie Saulę greičio kryptis tolygiai keičiasi ir per pusę metų tampa priešinga.

2) Iš paveikslo matyti, kad iš Žemės pilnatis vėl bus matoma Mėnuliui pilnai apsisukus apie Žemę ir dar pasisukus kampu α_1. tam reikalingą laiko tarpą t randame iš lygčių

$2\pi t / T_M = 2\pi + \alpha_1,\ 2\pi t / T_Ž = \alpha_1,\ t = T_Ž T_M / (T_Ž - T_M),\ t = 29{,}53\,\text{parų}$, t.y., pilnatis bus matoma balandžio 5 d.

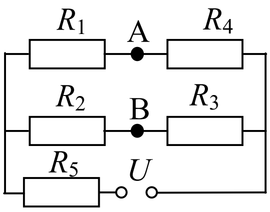
3) Sakykime, kad patekanti 8 val. vakaro pilnatis matoma iš taško A (Mėnulio ir Žemės padėtis I). Kad būtų matoma patekanti delčia Mėnulio ir Žemės padėtis turi būti II. Laiko tarpą t' tarp tų padėčių randame iš lygčių $2\pi t' / T_M = \pi/2 + \alpha_2,\ 2\pi t' / T_Ž = \alpha_2,\ t' = T_Ž T_M / 4(T_Ž - T_M),\ t = 7.38\,\text{parų}$. Tačiau Mėnulio patekėjimą lemia Žemės sukimasis apie ašį, ir reikalinga taško A padėtis būtų po 7,25 parų. Tuo metu Mėnulis bus dar ne visai pasiekęs Žemės orbitą, t. y., patekant bus apšviesta kiek mažiau pusės matomo ploto, o po paros bus apšviesta kiek daugiau pusės matomo ploto. Prie kovo 7 d. 8 val. vakaro pridėjus 7,25 parų gauname kovo 15 d. 2 val. nakties, o po paros – kovo 16 d 2 val. nakties.

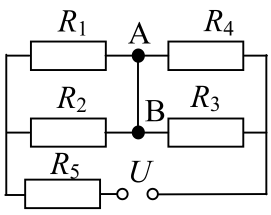
4. Elektriniame 1500 W galios arbatinuke šildant vandenį pastebėta, kad per 30 s vandens temperatūra padidėjo nuo 85 iki 90 ºC, o tuo metu kaitinimą išjungus temperatūra sumažėjo iki 89 ºC per 84 s. Kiek vandens buvo arbatinuke? Vandens savitoji šiluma 4200 J/kg K, arbatinuko šiluminės talpos nepaisome.

Laikome kad šilumos atidavimo aplinkai greitis k temperatūroms 85–90 °C yra vienodas.Pažymime N=1500 W, τ_1=30 s, τ_2=84 s, Δt_1=5 K, Δt_2=1 K, c=4200 J/kg K. Tada pagal šilumos balanso lygtis

$$N\tau_1 = cm\Delta t_1 + k\tau_1,\ cm\Delta t_2 = k\tau_2,\ m = N / (c(\Delta t_1/\tau_1 + \Delta t_2/\tau_2)),\ m = 2\text{ kg}.$$

5. Sujungta elektrinė grandinė pagal pateiktą schemą. Ką parodys tarp taškų A ir B įjungtas 1) idealus ampermetras? 2) idealus voltmetras? U=10 V, R_1= R_3=2 Ω, R_2= R_4=8 Ω, R_5=0,8 Ω.





1) Įjungus idealų ampermetrą gauname ekvivalenčią elektrinę grandinę, pateiktą paveiksle. Panaudodami Omo dėsnį ieškomąjį srovės stiprį išreiškiame taip:

$$I = I_1 - I_4 = \frac{U}{R_1R_2/(R_1+R_2) + R_3R_4/(R_3+R_4) + R_5} \cdot \left(\frac{R_2}{R_1+R_2} - \frac{R_4}{R_3+R_4}\right),\ I = 1{,}5\text{ A}.$$

2) Įjungus tarp taškų A ir B idealų voltmetrą elektros srovė juo neteka, įtampą tarp tų taškų randame panaudodami Omo dėsnį:

$$U_{AB} = U_2 - U_1 = \frac{U(R_2(R_1+R_4) - R_1(R_2+R_3))}{(R_1+R_4)(R_2+R_3) + R_5(R_1+R_2+R_3+R_4)},\ U_{AB} = 5{,}2\text{ V}.$$

Užduotis parengė VU prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis

Pastaba: ši informacija interneto svetainėje www.olimpas.lt skelbiama nuo 2004 04 08.