55-oji Lietuvos moksleivių fizikos olimpiada
10 klasės užduotys

1. Moksleiviai apsilankė Vilniaus „Akropolyje“ ir grįžo atgal namo autobusu. Autobuso vairuotojas planavo visą kelią važiuoti v_1=70 km/h greičiu. Tokiu greičiu jis ir pradėjo važiuoti, tačiau nuvažiavus tam tikrą atstumą pradėjo lyti ir vairuotojas sumažino greitį iki v_2=60 km/h. Kai lietus baigėsi iki miesto, kuriame gyvena moksleiviai, liko važiuoti l=40km. Vairuotojas padidino greitį iki v_3=70 km/h ir atvažiavo į miestą laiku. Kiek laiko lijo?

Sprendimas:

Pažymėkime atstumą nuo Vilniaus iki miesto, kuriame gyvena moksleiviai $x\ km$. Tuomet laikas, kurį vairuotojas planavo praleisti kelionėje yra: $t = \frac{x}{v_1}$.

Pažymėkime atstumą, kurį nuvažiavo moksleiviai iki prasidedant lietui $a\ km$.
Laikas, kurį važiavo iki lietaus yra:

$$t_1 = \frac{a}{v_1}.$$

Tada atstumas, kurį moksleiviai važiavo lyjant lietui yra $(x - a - l)\ km$ ir laikas

$$t_2 = \frac{x - a - l}{v_2}.$$

Laikas, kurį moksleiviai važiavo pasibaigus lietui $t_3 = \frac{l}{v_3}$.

Kadangi vairuotojas atvažiavo į miestą laiku, tai laikams galioja lygybė

$$t_1 + t_2 + t_3 = t$$

$$\frac{a}{v_1} + \frac{x - a - l}{v_2} + \frac{l}{v_3} = \frac{x}{v_1}$$

$$\frac{a}{v_1} - \frac{x}{v_1} + \frac{x - a}{v_2} + \frac{l(v_2 - v_3)}{v_2 v_3} = 0$$

Išreiškime skirtumą $x - a$:

$$\frac{x - a}{v_2} - \frac{x - a}{v_1} = \frac{l(v_3 - v_2)}{v_2 - v_3}$$

$$x - a = \frac{l v_1 (v_3 - v_2)}{v_3 (v_1 - v_2)}.$$

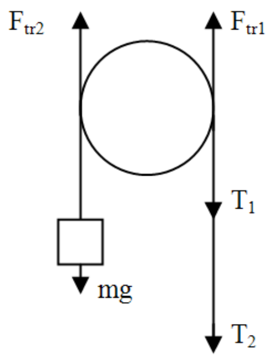
Gautą išraišką statome į laiko t_2 lygtį:

$$t_2 = \frac{l}{v_2}\left(\frac{v_1(v_3 - v_2)}{v_3(v_1 - v_2)}\right),$$

$$t_2 = \frac{40}{60}\left(\frac{70(75 - 60)}{75(70 - 60)} - 1\right) = \frac{4}{15} h = 16 \min$$

2. Per nejudantį, tam tikrame aukštyje, pakabintą horizontalų rąstą permesta virvė, kurios viename gale pakabintas m = 6 kg masės kūnas. Norint, kad kūnas nejudėtų antras virvės galas turi būti traukiamas minimalia T_1 = *40 N* jėga. Kokia minimalia jėga T_2 reikia traukti virvę, kad kūnas pradėtų kilti į viršų? Laikyti, kad trinties jėga yra tiesiai proporcinga maksimaliai virvės įtempimo jėgai.

Sprendimas:



Dėl virvės trinties į medį krovinio sunkio jėga $F = mg$ = 60 N yra didesnė už jėgą T_1, kuria reikia tempti virvę, norint jį išlaikyti.
Dėl tos pačios priežasties norint krovinį pradėti kelti, reikia jį veikti didesne jėga T_2 nei mg, nes reikia nugalėti rimties trinties jėgą.
Pirmu atveju, kai reikia išlaikyti kūną:

$$mg = T_1 + F_{tr1}.$$

Antru atveju, kai reikia pakelti kūną:

$$T_2 = mg + F_{tr2}$$

Virvės rimties trinties jėga priklauso nuo spaudimo į rąstą, t.y. virvės įtempimo, o virvės įtempimo jėga pirmu atveju vietose, kur virvė liečiasi su rąstu, kinta nuo T_1 iki mg. Pagal uždavinio sąlygą trinties jėgą lemia maksimali įtempimo jėga. Pirmu atveju, kai reikia išlaikyti kūną, maksimalią įtempimo jėgą lemia $F = mg$, o antru atveju, kai reikia pakelti kūną, maksimali įtempimo jėga bus lygi T_2.
Atsižvelgiant į sąlygoje nurodytą proporcingumą pirmu atveju

$$F_{tr1} = kmg;$$

Antru atveju

$$F_{tr2} = kT_2,$$ kur k – proporcingumo koeficientas.

$$mg = T_1 + kmg.$$

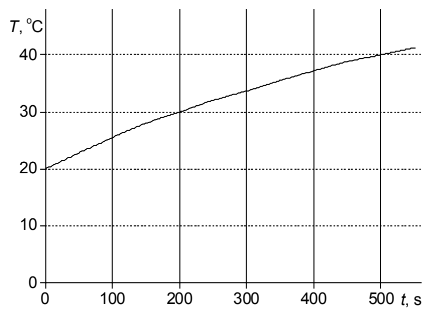
Antru atveju, kai reikia pakelti kūną:

$$T_2 = mg + kT_2.$$

Iš šių dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais (k ir T_2) randame: $k = 1 - \frac{T_1}{mg}$

$$T_2 = \frac{mg}{1-k} = \frac{mg}{1-\left(1-\frac{T_1}{mg}\right)} = \frac{(mg)^2}{T_1} = 90\text{ N}$$

3. Į kalorimetrą, kuriame yra m_0 = 100 g, T_0 = 20 °C laipsnių temperatūros vandens, pastoviu greičiu lašinamas karštas vanduo. Po kiekvieno lašo kalorimetre suspėja nusistovėti šiluminė pusiausvyra. Vandens, esančio kalorimetre, temperatūros priklausomybė nuo laiko pateikta paveiksle. Raskite karšto vandens temperatūrą, jei proceso metu ji yra pastovi. Į šilumos nuostolius neatsižvelgti.



Sprendimas:

Tegul karštojo rezervuaro temperatūra T_+; per laiko vienetą į kalorimetrą patenkantį vandens kiekį pažymėkime μ. Tada temperatūra kalorimetre laiko momentu t gali būti apskaičiuota iš tokios sąlygos:

$$Cm_0\left(T - T_0\right) = C\mu t\left(T_+ - T\right) \quad (1)$$

Kur C – vandens savitoji šiluma talpa.

Norint panaudoti grafiko duomenis, parenkame laiko momentus (tiksliausi taškai)

t1 = 200 s (T1 =30 oC) ir

t2 = 500 s (T2 = 30oC).

Perrašome (1) lygtį šiems laiko momentams:

$$Cm_0\left(T_1 - T_0\right) = C\mu t_1\left(T_+ - T_1\right)$$

$$Cm_0\left(T_2 - T_0\right) = C\mu t_2\left(T_+ - T_2\right)$$

Padalinę abi lygtis gauname:

$$\frac{T_2 - T_0}{T_1 - T_0}\cdot\frac{t_1}{t_2} = \frac{T_+ - T_2}{T_+ - T_1}$$

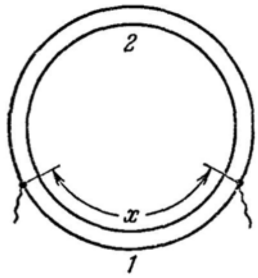
Ir išsprendę gauname:

$$T_+ = \frac{T_2\left(T_1 - T_0\right)t_2 - T_1\left(T_2 - T_0\right)t_1}{\left(T_1 - T_0\right)t_2 - \left(T_2 - T_0\right)t_1}$$

Įstatę t_1 ir t_2 taškų duomenis, gauname: T_+=80 ^{o}C.

4. Iš laido, kurio varža *R* = 10Ω padarytas žiedas. Kur reikia prijungti įtampos šaltinio gnybtus, kad grandinės varža būtų lygi 1Ω ?

<u>Sprendimas</u>:



Pažymėkime ilgį 1-osios dalies x, tuomet likusios dalies ilgis bus $2\pi r - x$. Išreiškiame viso žiedo varža:

$$R = \frac{\rho l}{S} = \frac{\rho 2\pi r}{S}$$

kur R yra viso laido varža iš kurio padarytas žiedas. O atskirų dalių varžos tuomet bus:

$$R_1 = \frac{\rho x}{S} \quad \text{ir} \quad R_2 = \frac{\rho\left(2\pi r - x\right)}{S}$$

Varžos sujungtos lygiagrečiai, tai bendra 1-osios ir 2-osios dalių varža turės išraišką:

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{\frac{\rho x}{S}\cdot\frac{\rho\left(2\pi r - x\right)}{S}}{\frac{\rho x}{S} + \frac{\rho\left(2\pi r - x\right)}{S}}$$

Gauname kvadratinę lygtį ir ją išsprendžiame:

$$Rx2\pi r - Rx^2 = R_{12}\left(2\pi r\right)^2$$

Supaprastiname lygtį ją padalinant iš $-\left(2\pi r\right)^2$:

$$\frac{Rx^2}{\left(2\pi r\right)^2} - \frac{Rx}{2\pi r} + R_{12} = 0 \quad R_{12} = \frac{Rx\left(2\pi r - x\right)}{\left(2\pi r\right)^2}$$

Spręsti paprasčiau įvedus pakeitimą $y = \frac{x}{2\pi r}$:

$$Ry^2 - Ry + R_{12} = 0$$

Gauname

$$y_1 = \frac{10+\sqrt{60}}{20} \approx 0{,}89,$$

$$y_2 = \frac{10-\sqrt{60}}{20} \approx 0{,}11$$

Taigi atstumas tarp prijungimo taškų turi būti arba 0.89, arba 0.11 viso laido ilgio, iš kurio sudarytas žiedas.