Papildomo ugdymo mokykla Fizikos olimpas

Mechanika
Dinamika 1

(Paskaitų konspektas)
2009 m. sausio 12-18 d.

Prof. Edmundas Kuokštis

Vilnius

Paskaita #3

Dinamika

Jei kinematika nagrinėja tik kūnų judėjimą, nesiaiškindama tą judėjimą sukėlusių priežasčių, tai dinamika tiria priežastis (kūnų sąveiką), kurios lemia judėjimą. Dinamikos pagrindą sudaro trys Niutono dėsniai, kurių esmę suformulavo Niutonas 1687 m.

Niutono dėsniai (kaip, beje, ir visi kiti fizikos dėsniai) atsirado, apibendrinus daugybę eksperimento faktų. Jų teisingumą įrodo (nors ir daugybės, bet vis dėlto riboto skaičiaus reiškinių) eksperimentiškai patvirtintos pasekmės, kurios išplaukia iš šių dėsnių.

Jau buvo minėta, kad Niutono mechanika per dviejų šimtų metų istoriją pasiekė milžiniškų laimėjimų, todėl jau buvo laikoma, kad šie dėsniai turi paaiškinti bet kurį fizikinį reiškinį. Tačiau mokslo vystymasis ir naujų faktų atskleidimas pakoregavo šią išvadą. Čia vėlgi tektų prisiminti „didelių greičių mechaniką“ (reliatyvistinę mechaniką) ir mikropasaulio mechaniką (kvantinę mechaniką). Vis dėlto šie naujieji pasiekimai nenubraukė klasikinės mechanikos reikšmės, bet pakoregavo tik jos taikymo ribas.

Pirmasis Niutono dėsnis

Jis teigia: *bet koks kūnas yra rimties būsenoje arba juda tolygiai tiese, kol nėra pašalinio kitų kūnų poveikio, keičiančio šią būseną.*
Abiem atvejais (rimties arba tolyginio tiesiaeigio judėjimo būsena) pagreitis lygus nuliui. Todėl šį dėsnį galima suformuluoti ir taip: bet kokio kūno greitis nekinta (atskiru atveju jis gali būti lygus 0), kol išoriniai kūnai sąveikaudami jo nepakeičia.

Čia atsiranda svarbi ***inercinės sistemos*** sąvoka. Iš tikrųjų net mintiniu eksperimentu galima įsitikinti, kad pirmasis Niutono dėsnis galioja ne visose sistemose. Pvz., turime dvi sistemas, kurių viena nejudama, o kita pirmosios atžvilgiu juda su pagreičiu. Jei kūnas vienos iš tų sistemų atžvilgiu nejuda, tai kitos atžvilgiu jis, akivaizdu, judės su pagreičiu. Tai prieštaravimas pirmajam Niutono dėsniui, nes jis negali būti tenkinamas abiejose sistemose.
Sistema, kurioje galioja pirmasis Niutono dėsnis, vadinama ***inercine sistema***. Pirmasis Niutono dėsnis dar vadinamas inercijos dėsniu. Sistemos, kuriose šis dėsnis negalioja, vadinamos ***neinercinėmis sistemomis***. Ar Žemės atskaitos sistema yra inercinė?
Bandymų būdu patikrinta, kad Saulės atskaitos sistema yra inercinė. Tai heliocentrinė atskaitos sistema.

Masė ir kūno judesio kiekis (impulsas)

Veikiant kitiems kūnams, duotasis kūnas pradeda judėti su pagreičiu.
Esant vienodam poveikiui, įvairūs kūnai įgyja skirtingą pagreitį. Bet kuris kūnas priešinasi išorės poveikiui. Ši kūno savybė vadinbama ***inertiškumu***. Inertiškumo matas – kūno ***masė***.

Dinamikoje įvedama svarbi ***uždarosios sistemos*** sąvoka. Tai nagrinėjamų kūnų sistema, kurioje sąveikauja tik šie nagrinėjami kūnai, o išorinio poveikio (sąveikos su išoriniais kūnais) nėra. Praktiškai tai sąlyginė sistema, bet dažnai šį modelį galima taikyti gana dideliu tikslumu.
Pvz., dviem sąveikaujančiom tik tarpusavyje dalelėms (dviejų dalelių uždaroji sistema) galioja eksperimente patikrintas faktas

$\Delta \boldsymbol{v}_1$ ir $\Delta \boldsymbol{v}_2$ turi priešingus ženklus, o $\dfrac{|\Delta \boldsymbol{v}_1|}{|\Delta \boldsymbol{v}_2|} = \dfrac{m_2}{m_1}$.

Arba $m_1 \Delta \boldsymbol{v}_1 = -m_2 \Delta \boldsymbol{v}_2$. (3-1)

Jei dalelių masė nekinta,

$$\Delta(m_1 \boldsymbol{v}_1) = -\Delta(m_2 \boldsymbol{v}_2)$$

Įvedama judesio kiekio (impulso) sąvoka. Jusesio kiekis (impulsas) apibūdinamas kaip dydis

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} \qquad (3\text{-}2)$$

Bendru atveju uždarajai sistemai iš *i* dalelių sistemos (pvz., kietasis kūnas) visas impulsas

$$\boldsymbol{v} = \sum_i m_i \boldsymbol{v}_i \,. \qquad (3\text{-}3)$$

Dabar dviems dalelėms lygtį su *mv* pokyčiais galima perrašyti

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = Const\,. \qquad (3\text{-}4)$$

Taigi, ***pilnutinis uždarosios sistemos iš dviejų sąveikaujančių dalelių impulsas išlieka pastovus***. Tai impulso (judesio kiekio) tvermės dėsnis.

Antrasis Niutono dėsnis

Įprastinė antrojo Niutono dėsnio forma

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \qquad (3\text{-}5)$$

Čia $\boldsymbol{F}$ – kūną veikianti atstojamoji jėga, *m* – kūno masė, $\boldsymbol{a}$ – pagreitis, kuriuo juda masės *m* kūnaas, veikiamas $\boldsymbol{F}$ jėgos.
Dažnai naudojama ir kita šio dėsnio forma, kuri iš esmės yra ta pati, bet operuojama jusesio kiekio (impulso) pokyčiu.
Judesio kiekio kitimo greitis lygus veikiančiai tą kūną jėgai, t.y.

$$\frac{\Delta \boldsymbol{p}}{\Delta t} = \boldsymbol{F} \qquad (3\text{-}6)$$

Perėję prie ribos, kai $\Delta t \to 0$, gauname diferencialinę formą:

$$\boxed{\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F}} \qquad (3\text{-}7)$$

Tai ***kūno judėjimo lygtis*** (antrasis Niutono dėsnis).

Priėmę (nereliatyvistiniu atveju), kad masė pastovi, gautume

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$$

Kaip matyti, tai kita antrojo Niutono dėsnio formuluotė: *kūno masės ir jo pagreičio sandauga lygi veikiančiai tą kūną jėgai.*
Čia reikėtų atkreipti dėmesį, kad šioje formulėje pakankamai suprantamai ir griežtai apibrėžtas pagreitis, bet tiek masė, tiek jėga galėtų būti nusakomi būtent iš šio antrojo Niutono dėsnio. Tai lyg ir tautologijos atvejis.

(Tautologija - tai apibrėžimo arba įrodymo loginė klaida – apibrėžiamoji sąvoka apibrėžiama ta pačia sąvoka, tezė įrodinėjama remiantis ta pačia teze).

Išeitų, kad masė gali būti apibrėžta per jėgą, o jėga – per masę. Siekdami išeiti iš šio „užburto rato“, pritaikykime šį dėsnį masės etalonui, o po to jau galime lyginti kitas mases.

Baigtiniams pokyčiams reikėtų sumuoti jėgos impulsus, t.y. skaičiuoti integralą:

$$\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F} dt \,. \qquad (3\text{-}8)$$

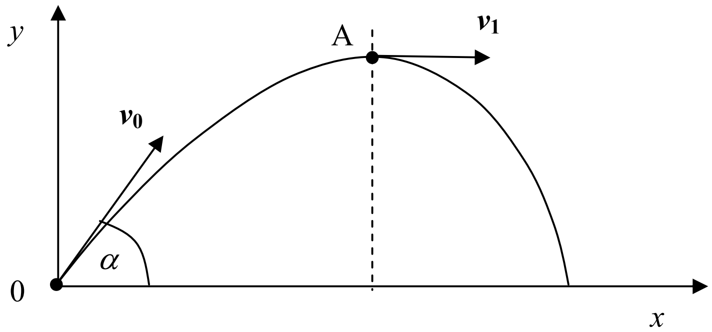
Atskiru atveju, kai $\boldsymbol{F} = \text{Const}$,

$$\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{F}\int_{t_1}^{t_2} dt = \boldsymbol{F}(t_2 - t_1)\,, \qquad (3\text{-}9)$$

t.y. *judesio kiekio pokytis per baigtinį laiko tarpą yra lygus jėgos impulsui per laiko tarpą.*

Pavyzdys

Raskite visų sviedinį veikiančių jėgų atstojamosios impulsą per laiką, kol sviedinys iš pradinės padėties O pasiekė aukščiausią tašką A. $v_0 = 500 \mathrm{m/s}$, $\alpha = 60°$, $v_1 = 200 \mathrm{m/s}$, $m = 100 \mathrm{kg}$.

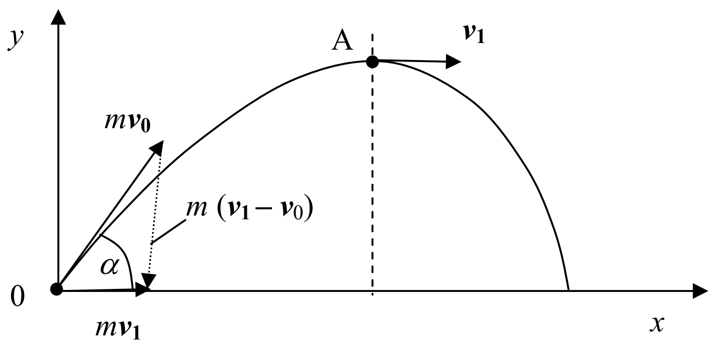


Sprendimas

Visų veikiančių kūną jėgų impulsas per laiko tarpą tarp A ir O yra judesio kiekio pokytis per tą patį laiko tarpą, t.y.

$$\boldsymbol{p}_A - \boldsymbol{p}_O = m\boldsymbol{v}_1 - m\boldsymbol{v}_0 .$$

Brėžinyje galime pereiti prie judesio kiekio, kurį gautume tiesiog padauginę greitį kaip vektorių ir kūno masės. Judesio kiekio pokytis pavaizduotas kaip vektorių skirtumas $m(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_0)$.



Veikiančių kūną jėgų impulso per minėtą laiko tarpą modulį galime surasti per projekcijas. Jei pažymėtume $\boldsymbol{S} = m(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_0)$, tai

$$S_x = m(v_1 - v_0 \cos\alpha),$$

$$S_y = -mv_0 \sin\alpha .$$

Taigi,

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = m\sqrt{v_1^2 + v_0^2 - 2v_0 v_1 \cos\alpha} = 100\sqrt{200^2 + 500^2 - 2\cdot 200\cdot 500\cdot 0{,}5} =$$
$$= 4{,}36\cdot 10^4 \,\mathrm{kg\cdot m/s}$$

Trečiasis Niutono dėsnis

Jis skamba taip: *Jėgos, kuriomis veikia vienas kitą sąveikaujantys kūnai, yra lygios ir priešingų krypčių.*

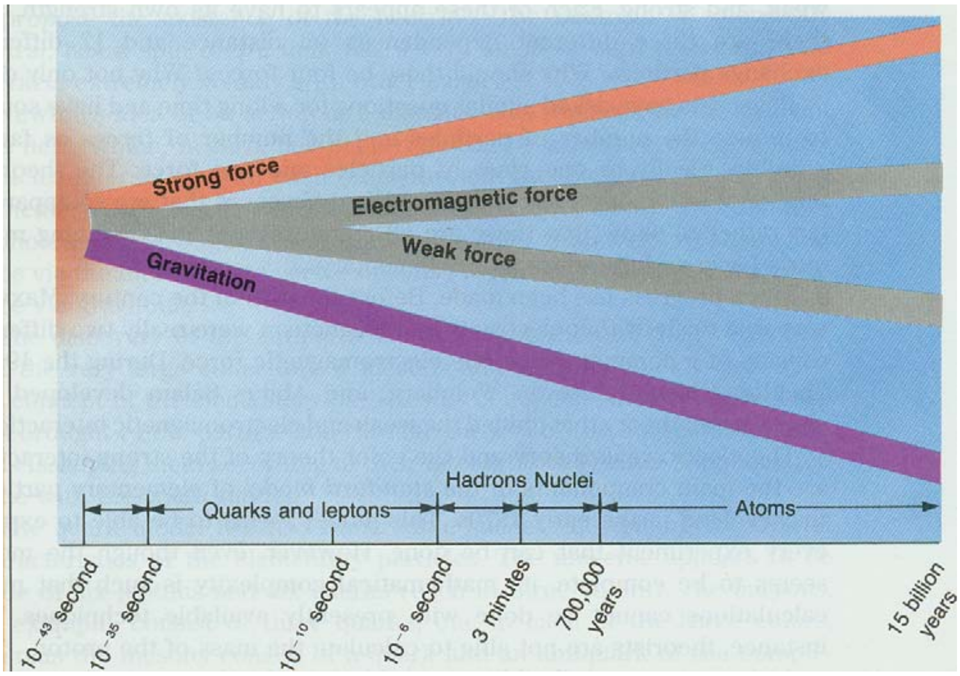
$$\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21} \qquad (3\text{-}10)$$

Klausimas: Jei arklys traukia vežimą jėga *F*, tai ir vežimas traukia arklį tokia pat jėga *F*, bet priešingos krypties. Kodėl tuomet vežimas pajuda?

Jėgos ir jų rūšys bei klasifikacija

Šiuokaikinėje fizikoje skiriamos keturios ***fundamentalių*** sąveikų (jėgų) rūšys:

1) Gravitacijos (sąveika, atsirandanti dėl visuotinės traukos)
2) Elektromagnetinė (vyksta per elektrinius ir magnetinius laukus)
3) Stripriorji branduolinė (laiko daleles branduolyje)
4) Silpnoji branduolinė (atsakinga už daugelį elementariųjų dalelių skilimų).



Galimas ir kitoks jėgų skirstymas, tačiau tos jėgos nėra fundamentinės. Fundamentinių jėgų negalima pakeisti kitomis. Apskritai mechanikoje vyrauja elektromagnetinės kilmės jėgos (pvz., trinties) arba gravitacinės (paprastai tarp astronominių objektų).
Kai kurios jėgų išraiškos

Gravitacijos jėga tarp dviejų taškinių kūnų

$$F = G\frac{m_1 m_2}{R^2} \qquad (3\text{-}12)$$

Beje, tokia pat išraiška galioja sferiškai simetriškiems kūnams. Tuomet atstumas R – tai atstumas tarp tų kūnų masės centrų.

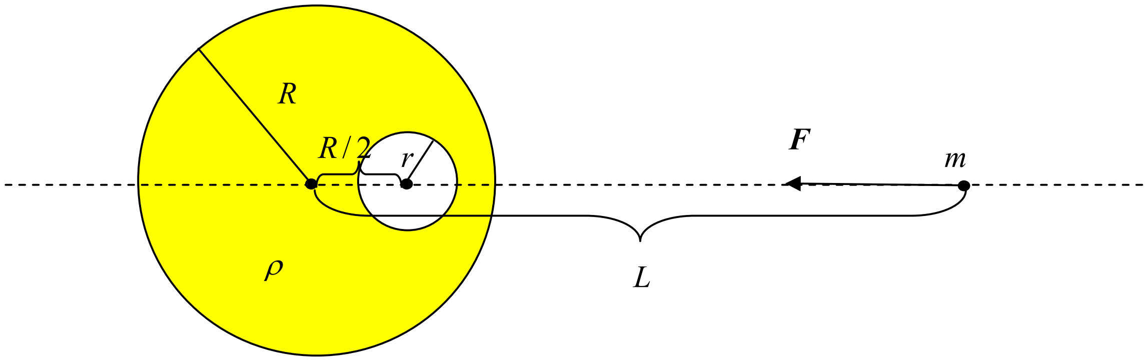
Masės centras bendru atveju apibrėžiamas kaip

$$\boldsymbol{r}_c = \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum_i m_i} \qquad (3\text{-}13)$$

Pavyzdys
Kam lygi gravitacijos sąveikos jėga tarp taškinio kūno, kurio masė m, ir vienalyčio tankio ρ ir spindulio R rutulio, turinčio tuščiavidurę sferinę spindulio $r < R/2$ ertmę, kurios centras yra atstumu $R/2$ nuo rutulio centro ir ašyje, jungiančioje rutulio centrą su taškiniu kūnu. Atstumas tarp taškinio kūno ir rutulio centro $L > R$.

$$F = ?\left| \begin{array}{l} m \\ \rho \\ R \\ r < R/2 \\ L > R \end{array} \right.$$

Sprendimas



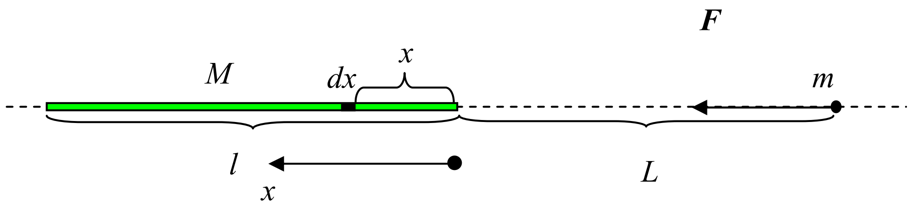
$$F = F_v - F_{ertm} = G\frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho m}{L^2} - G\frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho m}{\left(L - \frac{R}{2}\right)^2} = G\frac{4}{3}\pi\rho m\left(\frac{R^3}{L_2} - \frac{r^3}{\left(L - \frac{R}{2}\right)^2}\right).$$

Pavyzdys

Kokia gravitacijos jėga veikia tarp taškinio masės m kūno ir masės M bei ilgio l plono strypelio, jei kūnas yra strypelio ašies tęsinyje atsumu L nuo artimiausio strypelio galo?

$$F = ?\left| \begin{array}{l} m \\ M \\ l \\ L \end{array} \right.$$

Sprendimas



$$F=\int_0^l G\frac{m\left(\frac{M}{l}\right)dx}{(L+x)^2}=\frac{GmM}{l}\int_0^l\frac{dx}{(L+x)^2}=\frac{GmM}{l}\left(-\frac{1}{L+x}\right)\Bigg|_0^l=\frac{GmM}{l}\left(\frac{1}{L}-\frac{1}{L+l}\right)=$$
$$=\frac{GmM}{l}\frac{l}{L(L+l)}=\frac{GmM}{L(L+l)}$$

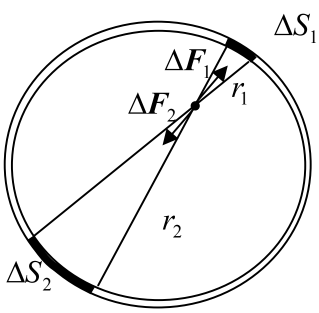
Pavyzdys

Koks slėgis spindulio R vandens planetos centre? Išreikškite šį slėgį per laisvojo kritimo pagreitį g planetos paviršiuje.

Sprendimas

Pirmiausia pastebėsime, kad sferinio sluoksnio viduje gravitacijos suminė jėga lygi nuliui. Bet kuriame taške $\Delta F_1=\Delta F_2=\Delta F$ - vienoda ir nepriklauso nuo taško (žr. brėž.).

$$\Delta\boldsymbol{F}\propto\frac{\Delta S}{r^2}\propto\frac{r^2}{r^2}$$ - nepriklauso nuo r.



Tada slėgį galime skaičiuoti kaip:

$$p = \int_0^R G \frac{\rho \cdot 4\pi x^2 dx \cdot \rho \frac{4}{3}\pi x^3}{4\pi x^2 \cdot x^2} = \frac{4\pi G\rho^2}{3}\int_0^R x dx = \frac{2\pi G\rho^2 R^2}{3}.$$

Laisvojo kritimo pagreitis planetos paviršiuje

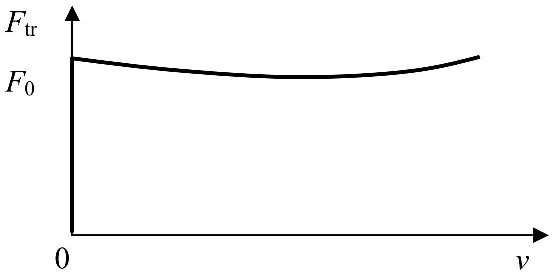
$g = G\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{R^3\rho}{R^2} = \frac{4\pi GR\rho}{3}$, todėl $p = \frac{\rho g R}{2}$.

Trintes jėgos

Kasdieniame gyvenime visur susiduriame su trintimi. Tai elektromagnetinės kilmės jėgos. Jos gali būti ir naudingos, ir nepageidautinos.
Skiriama vidinė trintis (dujose, skysčiuose, kietųjų kūnų judėjimas skysčiuose ar dujose) bei sausoji trintis (trintis tarp kietųjų kūnų).
Trintis apibūdinama trinties koeficientu (gali būti žymimas ir k, ir μ)

$$F_{tr} = kF_n \qquad (3\text{-}14)$$

Paprastai ramybės trintis šiek tiek didesnė už slydimo trintį, kuri apskritai priklauso ir nuo judėjimo greičio. Dažnai uždaviniuose į tai neatsižvelgiama.



Sunkio jėga (sunkis) ir svoris

Jėga, kuria Žemė traukia bet kokį masės m kūną, vadinama *sunkio jėga* arba *sunkiu*. Jei Žemės paviršiuje laisvojo kritimo pagreitis yra $\boldsymbol{g}$, sunkio jėga lygi

$$\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g} \qquad (3\text{-}15)$$

Paprastai kūnai turi atramą (stalo paviršius, virvės įtempimo jėga ir pan.). Jei Žemės atžvilgiu kūnas nejuda, tai suminė jėga lygi nuliui, vadinasi, atrama tuo atveju turi veikti kūną jėga

$$\boldsymbol{F}_r = -\boldsymbol{P}. \qquad (3\text{-}16)$$

Pagal trečiąjį Niutono dėsnį ir kūnas turi veikti atramą tokio pat dydžio, bet priešingos krypties jėga $\boldsymbol{G} = -\boldsymbol{F}_r$.
Taigi pusiausvyros sąlygomis

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g} \qquad (3\text{-}17)$$

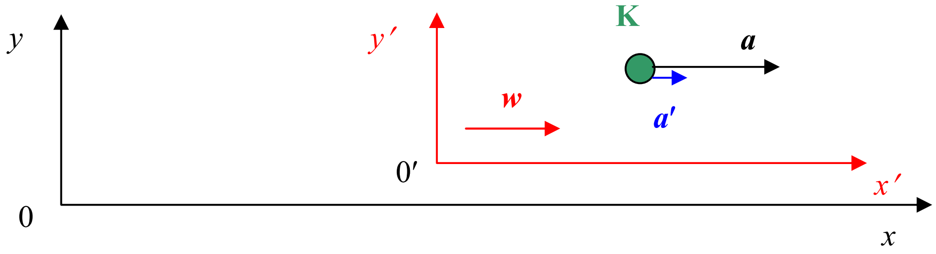
Jėga $\boldsymbol{G}$, kuria kūnas veikia atramą, vadinama kūno svoriu. Ji lygi mg tik tuo atveju, kai kūnas ir atrama Žemės atžvilgiu nejuda (arba juda tiesiai pastoviu greičiu – čia neatsižvelgiama į Žemę kaip neinercinę atskaitos sistemą, nes paprastai tai nedaro didelės įtakos – vienok griežtai kalbant reikėtų daryti atitinkamas pataisas).

Neinercinės sistemos

Niutono dėsniai galioja tik inercinėse sistemose (esančiose rimtyje arba judančiose pastoviu greičiu – tokių sistemų pagreitis lygus 0). Kūnas, judantis pagreičiu $\boldsymbol{a}$, šiuo pagreičiu juda visų inercinių sistemų atžvilgiu. Bet kuri neinercinė sistema juda inercinių sistemų atžvilgiu. Tegul šis pagreitis $\boldsymbol{w}$. Tuomet kūno pagreitis neinercinėje sistemoje $\boldsymbol{a}'$ skirsis nuo kūno pagreičio inercinėje sistemoje $\boldsymbol{a}$. Čia galioja ryšys

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}' = \boldsymbol{w} \qquad (3\text{-}18)$$

Pvz., štrichuota sistema $x'O'y'$ (neinercinė) juda neštrichuotos sistemos xOy (inercinės) atžvilgiu pagreičiu $\boldsymbol{w}$, o kūnas **K** juda pagreičiu $\boldsymbol{a}$ xOy sistemos atžvilgiu ir pagreičiu $\boldsymbol{a}'$ $x'O'y'$ sistemos atžvilgiu. Čia paimtas judėjimas išilgai x ašies.



Jei neinercinė sistema juda tiesiai greitėdama (lėtėdama), tai visi tos sitemos taškai turi vienodą pagreitį $\boldsymbol{w}$. Jei neinercinė sistema sukasi, įvairūs tos neinercinės sitemos taškai judės skirtingu pagreičiu ir $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}(\boldsymbol{r}')$, kur $\boldsymbol{r}'$ - taško radiusas vektoriuis neinercinės sistemos atžvilgiu.
Jei tašką veikia atstojamoji jėga $\boldsymbol{F}$, tai jis juda vienodu pagreičiu bet kurios inercinės sitemos atžvilgiu:

$$\boldsymbol{a} = \frac{1}{m}\boldsymbol{F} \qquad (3\text{-}19)$$

Tuomet neinercinėje sistemoje to taško pagreitis

$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{w} = \frac{1}{m}\boldsymbol{F} - \boldsymbol{w}\,. \qquad (3\text{-}20)$$

Iš čia aišku, kad net esant $\boldsymbol{F} = 0$, taškas neinercinės sistemos atžvigiu judės su pagreičiu $-\boldsymbol{w}$, t.y. kūną lyg ir veiktų jėga $-m\boldsymbol{w}$. Taigi, neinercinėje sistemoje galėtume taikyti inercinės sistemos Niutono dėsnius, įvesdami ***inercijos jėgą*** $\boldsymbol{F}_{in}$.

$$\boldsymbol{F}_{in} = -m(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}') = -m\boldsymbol{w}\,. \qquad (3\text{-}21)$$

Taigi, anttrasis Niutono dėsnis neinercinėje sistemoje atrodo kaip

$$m\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_{in} \qquad (3\text{-}22)$$

Dar šis principas vadinamas ***Dalambero principu***.

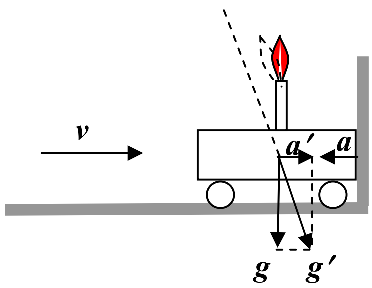
Pavyzdys 1

Vežimėlis su ant jo įtaisyta degančia žvake nedideliu greičiu rieda horizontalia plokštuma taip, kad žvakės liepsna vertikali. Staiga vežimėlis atsitrenkia į kliūtį. Kaip smūgio metu pakryps žvakės liepsna? Žvakė ant vežimėlio išlieka įtvirtinta, o dėl nedidelio greičio į oro masės judėjimą vežimėlio su žvake atžvilgiu galima nekreipti dėmesio.

Ats.: Žvakės liepsnos viršūnė atsilenks atgal.

Sprendimas

Žvakės liepsnos kryptį inercinėje sistemoje nulemia Archimedo jėgos kryptis, nes karštas liepsnos oras kyla šios jėgos veikimo kryptimi, o ši jėga yra priešinga Žemės traukos jėgai (**g** krypčiai). Jei persikelsime į sistemą, surištą su vežimėliu, stabdymo metu tai bus neinercinė sistema, judanti pagreičiu $\boldsymbol{a}$, priešingu vežimėlio greičio prieš atsitrenkimą $\boldsymbol{v}$ krypčiai (žr. brėž.). Tuomet pagal Dalambero principą šioje sistemoje turime įvesti priešingos krypties pagreitį $\boldsymbol{a}'$ (tai bus kryptis, sutampanti su vežimėlio pradinio greičio kryptimi).



Atstojamasis pagreitis $\boldsymbol{g}'$ ir rodys kryptį, kuri bus priešinga liepsnos krypčiai smūgio metu.

Pavyzdys 2

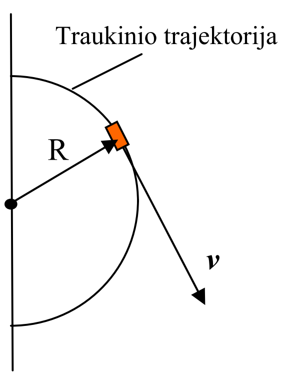
Matematinė ilgio l švytuoklė įtaisyta vežimėlyje, kuris juda horizontalia kryptimi, turėdamas pastovų pagreitį **a.** Kam lygus šios švytuoklės periodas?

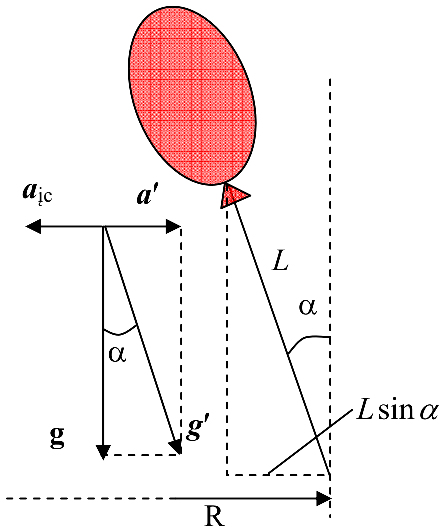
Ats. : $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{\sqrt{g^2 + a^2}}}$.

Pavyzdys 3

Važiuojanti traukiniu mergaitė už siūlo, kurio ilgis 1,0 m, laiko pripildytą heliu balionėlį. Traukinys važiuoja 100 km/h greičiu bėgiais, kurie sudaro 2,0 km spindulio lanką. Balionėlio siūlas atsilenkia nuo vertikalės. Kokia siūlo į horizontalią plokštumą projekcija? Kokia jos kryptis? Kokiu kampu atsilenkia siūlas?

Sprendimas





Patogu nagrinėti reiškiniuis sistemoje, nejudamai surištoje su traukiniu. Tačiau tai neinercinė sistema, kuri juda inercinės sistemos (pvz., Žemės) atžvilgiu pagreičiu, lygiu įcentriniam pagreičiui $\boldsymbol{a}_{\text{įc}}$:

$$a_{įc} = \frac{v^2}{R}.$$

Norėdami nagrinėti mechaninius reiškinius traukinyje kaip inercinėje sistemoje, pagal Dalambero principą turime įvesti inercinį pagreitį $\boldsymbol{a}' = -\boldsymbol{a}_{įc}$. Tuomet traukineje veikia laukas, nusakomas pagreičiu $\boldsymbol{g}' = \boldsymbol{g} + \boldsymbol{a}'$ (žiūr. brėž.). Pripildytą helio balionėlį veikia atstojamoji jėga (tai sunkio ir Archimedo jėgų vektorinė suma) į priešingą pagreičiui $\boldsymbol{g}'$ pusę, nes helio tankis maždaug septintadaliu mažesnis už oro tankį. Taigi, traukinyje siūlas nukrypsta link trajektorijos kreivumo centro (žiūr. brėž.) ir lygi

$$L_R = L\sin\alpha$$

Nuokrypio kampą apskaičiuojame iš sąryšio

$$tg\alpha = \frac{a'}{g} = \frac{v^2}{Rg} = \frac{100^2}{3{,}6^2 \cdot 2000 \cdot 9{,}81} = 0{,}0393, \text{ t.y.} \quad \alpha = 2{,}25° = 2°15'.$$

Projekcija lygi $L_R \approx 3{,}9\text{cm}$.

Paskaita #4

- Tverės dėsniai
- Kinetinė energija ir darbas
- Jėgų laukas. Konservatyviosios jėgos. Potencinis laukas
- Centrinės jėgos

Tvermės dėsniai

Jau apibūdinome uždarąją sistemą kaip sistemą, kurios neveikia išorinės jėgos. Uždarosiose sistemose egzistuoja tokios koordinačių ir greičių funkcijos, kurios išsilaiko. Tos funkcijos vadinamos judėjimo integralais. Svarbiausi yra taip vadinami adityvieji judėjimo integralai, t.y. tie, kuriems sistemos judėjimo integralas lygus atskirų nesąveikaujančių dalių judėjimo integralų sumai. Tokių judėjimo integralų yra trys. Tai ***energija, impulsas (judesio kiekis)*** ir ***impulso (judesio kiekio) momentas***.
Šie judėjimo integralai surišti su erdvės ir laiko savybėmis. Energijos tvermė remiasi *laiko vienalytiškumu*. Tai reiškia, kad pakeitus laiko momentą t_1 laiko momentu t_2, nekeičiant koordinačių ir greičių, sistemos mechaninės savybės nesikeičia.
Impulso tvermė susijusi su *erdvės vienalytiškumu*. Tai reiškia, kad perkėlus lygiagrečiai uždarąją sistemą į kitą ervės vietą, nekeičiant sistemos vidinio išsidėstymo (koordinačių) ir greičių, mechaninės sistemos savybės nepakinta. Šį dėsnį jau aptarėme.
Pagaliau impulso momento tvermės dėsnis susijęs su *erdvės izotropiškumu*, t.y. erdvės savybės visomis kryptimis vienodos.
Pažymėtina, kad šie tvermės dėsniai yra tikslūs ir bendresni, negu Niutono dėsniai. Pvz., jie galioja tiek klasikinėje mechanikoje, tiek reliatyvistiniu atveju.

Kinetinė energija ir darbas

Panagrinėkime procesą išilgai tiesės, jei veikia jėga **F** (visų dalelę veikiančių jėgų atstojamoji):

$$m\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{F} \qquad (4\text{-}1)$$

Padauginame šią lygybę skaliariškai iš vektoriaus $d\mathbf{s} = \mathbf{v}dt$ ($d\mathbf{s}$ - tai poslinkio vektorius)

$$m\boldsymbol{v}\dot{\boldsymbol{v}}\mathrm{d}t = \boldsymbol{F}\mathrm{d}\mathbf{s}\text{ . Bet } m\boldsymbol{v}\dot{\boldsymbol{v}}\mathrm{d}t = m\boldsymbol{v}\mathrm{d}\boldsymbol{v} = m\mathrm{d}\left(\frac{v^2}{2}\right) = \mathrm{d}\left(\frac{mv^2}{2}\right). \qquad (4\text{-}2)$$

Taigi

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{s}\,. \qquad (4\text{-}3)$$

Jei sistema uždara, tai $\boldsymbol{F} = 0$. Tada dydis

$T = \frac{mv^2}{2}$ lieka pastovus. Šis dydis vadinamas kinetine energija. Ji susijusi su dalelės (kūno) judėjimu.

Darbu kelyje d***s*** vadinamas dydis, kurį atlieka jėga ***F***:

$$\mathrm{d}A = \boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{s} \qquad (4\text{-}4)$$

Tai skaliarinis dydidis. Darbas d*A* – tai skaliarinė vektorių ***F*** ir d***s*** sandauga. Jei jėga veikia, kūnui persikeliant iš taško 1 į tašką 2, tai

$$\int_1^2 \mathrm{d}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \int_1^2 \boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{s} \qquad (4\text{-}5)$$

arba

$$T_2 - T_1 = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \int_1^2 \boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{s} \qquad (4\text{-}6)$$

Dydis $A = \int_1^2 \boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_1^2 F_s \mathrm{d}s$ - tai darbas, kurį atlieka jėga kelyje 1-2.

Taigi visų atstojamųjų jėgų, veikiančių dalelę, darbas naudojamas kinetinei dalelės energijai didinti.

Panagrinėkime darbą kiek detaliau. Jau minėta iš apibrėžimo, kad

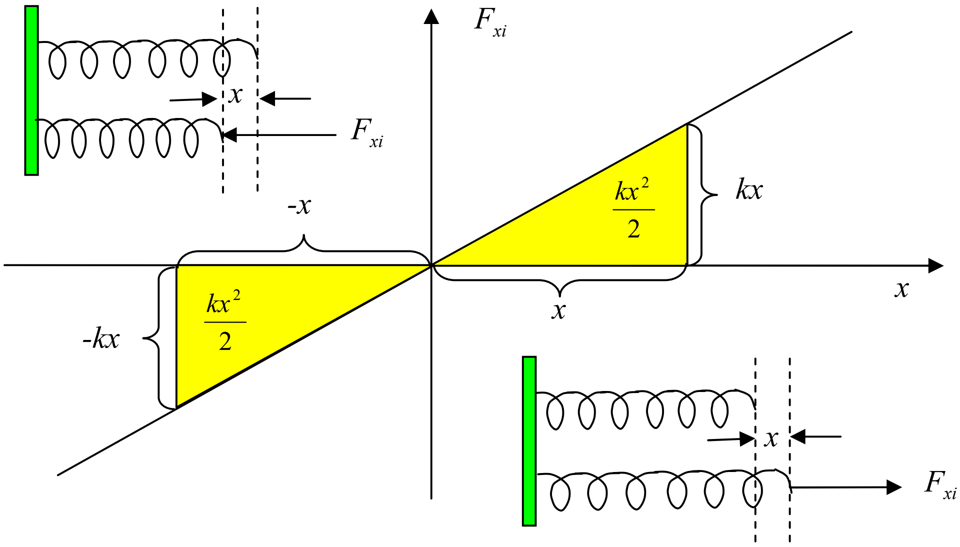
$$\mathrm{d}A = \boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{s} = Fs\cos\alpha\mathrm{d}s \qquad (4\text{-}7)$$

Čia α - kampas tarp vektorių ***F*** ir ***s***. Jei $\alpha < \frac{\pi}{2}$ (kampas smailus), *dA*>0. Tai reiškia, kad darbą atlieka išorinės jėgos sistemos atžvilgiu. Jei kampas bukas, t.y. $\alpha > \frac{\pi}{2}$, $dA < 0$. Tai reiškia, kad sistema atlieka darbą išorės atžvilgiu. Įdomu tai, kad esant $\alpha = \frac{\pi}{2}$, darbas neatliekamas. Buitiškai kasdieniame gyvenime būna kitaip. Pvz., jei pernešame krovinį horizontalia kryptimi, jį laikydami rankose (veikianti jėga statmena poslinkiui), mechanikoje darbo neatliekame, bet kasdieniame gyvenime tai asocijuojasi su darbu (kartais gana nemažu). Fizikoje privalome nuosekliai sekti priimtus apibrėžimus ir susitarimus. Taigi, jei jėga statmena poslinkiui arba poslinkis lygus 0, mechaninis darbas neatliekamas.

Panagrinėkime, kokį darbą atlieka išorinė jėga, ištempdama arba suspausdama spyruoklę, paklūstančią Huko dėsniui. Jei teigiamas poslinkis išilgai *x*-ašies, tai

$$F_H = -kx\,. \tag{4-8}$$

Išorinė jėga turi nugalėti Huko jėgą, t.y. $F_{xi} = -F_H = kx$.



Jei ištempiama dydžiu x, visas išorinės jėgos atliktas darbas

$$A = \int_0^x kx\mathrm{d}x = \frac{kx^2}{2} \tag{4-9}$$

Jei suspaudžiama tokiu pat dydžiu, darbas toks pat (taip pat teigiamas). Jo prasmė – plotas po kreive (šiuo atveju tiese) $F_{xi}(x)$ - geltonos sritys brėžinyje.

Jėgų laukas. Konservatyviosios jėgos. Potencinis laukas

Jei kiekviename erdvės taške dalelę per atstumą veikia kiti kūnai, sakoma, kad dalelė yra jėgų lauke. Tokių laukų pavyzdžiu galėtų būti gravitacijos jėgų laukas, kuris Žemėje pasireiškia sunkio jėga (kiekviename erdvės taške m masės kūną veikia sunkio jėga $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g}$). Kitas pavyzdys - elektrostatinis Kulono laukas, kurį sukelia statiniai krūviai.

Jėgų lauko jėgos, veikiančios materialųjį tašką arba kūną, atlieka darbą, perkeliant tą tašką ar kūną iš vienos vietos į kitą, kuris nepriklauso nuo perkėlimo kelio, vadinamos **konservatyviosiomis jėgomis**. Darbas priklauso tik nuo pradinio ir galutinio taško. Matematiškai tai reikštų, kad

$$\oint \boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \oint (F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y + F_z \mathrm{d}z) \equiv 0 , \qquad (4\text{-}10)$$

t.y. jei tokiame jėgų lauke grįžtame į pradinę padėtį, darbas neatliekamas.
Konservatyviųjų jėgų pavyzdys – tos pačios gravitacijos jėgos.
Nekonservatyviųjų jėgų pavyzdys galėtų būti trinties jėgos. Iš tikrųjų, trinties jegų darbas priklauso nuo kelio, kuriuo dalelė patenka iš vieno taško į kitą.

Taigi iš (4-10) seka, kad konservatyviosioms jėgoms turi egzistuoti tokia funkcija Π, kuriai

$$F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y + F_z \mathrm{d}z = \mathrm{d}\Pi \qquad (4\text{-}11)$$

Tai pilnasis funkcijos diferencialas.

Konservatyviosioms jėgoms būdinga, kad

$$F_x = \frac{\partial \Pi}{\partial x}, \ F_y = \frac{\partial \Pi}{\partial y}, \ F_z = \frac{\partial \Pi}{\partial z}, \text{ kur } \Pi = \Pi(x, y, z) . \qquad (4\text{-}12)$$

Toks jėgų laukas vadinamas potenciniu, o funkcija $\Pi(x, y, z)$ - potencine funkcija arba potencialo funkcija. Jei ši funkcija laikui bėgant kinta, laukas vadinamas nestacionarioju (nenuostoviuoju), o jei nekinta (priklauso tik nuo koordinačių), laukas vadinamas stacionariuoju (nuostoviuoju).
Dažnai trumpumo dėlei naudojamas taip vadinamas „nabla“ (∇) operatorius arba gradientas:

$$\nabla \varphi \equiv \mathrm{grad}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\boldsymbol{k} . \qquad (4\text{-}13)$$

$$\boldsymbol{F} = \frac{\partial \Pi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial \Pi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial \Pi}{\partial z}\boldsymbol{k} = \mathrm{grad}\Pi \qquad (4\text{-}14)$$

Akivaizdu, kad jei $\mathrm{d}A = \boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{s}$, tai $\mathrm{d}A = \mathrm{d}\Pi(x, y, z)$. Taigi, jei dalelė stacionariojo potencinio lauko jėgų perkeliama iš taško 1 į tašką 2, galioja ryšys

$$A_{12} = \Pi_2 - \Pi_1 \qquad (4\text{-}15)$$

Jau turėjome, kad toks darbas sunaudojamas dalelės kinetinei energijai didinti:

$$T_2 - T_1 = \Pi_2 - \Pi_1 \qquad (4\text{-}16)$$

Čia patogu įvesti funkciją

$$U(x, y, z) = -\Pi(x, y, z) \qquad (4\text{-}17)$$

Tada

$T_2 - T_1 = U_1 - U_2$, arba

$$\boxed{T_2 + U_2 = T_1 + U_1} \tag{4-18}$$

Matome, kad dalelei, esančiai konservatyviųjų jėgų lauke dydis $T + U$ išsilaiko, t.y. dydis $E = T + U$ yra judėjimo integralas. *U(x,y,z)* – tai potencinė dalelės energija. Dydis *E* – pilnutinė mechaninė dalelės energija.

Nesunku įsitikinti, kad galioja ryšys

$$A_{12} = U_1 - U_2, \tag{4-19}$$

kuris reiškia, kad konservatyviųjų jėgų atliekamas darbas dalelės atžvilgiu sumažina dalelės potencinę energiją. Kitais žodžiais – darbas atliekamas potencinės energijos sąskaita.

Taip pat galioja

$$\boxed{\boldsymbol{F} = -\mathrm{grad}\, U}, \text{ arba} \tag{4-20}$$

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \tag{4-21}$$

Jei dalelę be stacionariojo potencinio lauko veikia kokia nors nekonservatyvi išorinė jėga $\boldsymbol{F}^*$, tai dalelei persikeliant iš taško 1 į tašką 2 dalelės atžvilgiu atliekamas darbas

$$A_{12} = \int_1^2 \boldsymbol{F} \mathrm{d}\boldsymbol{s} + \int_1^2 \boldsymbol{F}^* \mathrm{d}\boldsymbol{s} = A_{\mathrm{konserv}} + A_{12}^* . \tag{4-22}$$

Čia A_{12}^* - nekonservatyviosios jėgos atliktas darbas.

Pasinaudoję tuo, kad $A_{\mathrm{konserv}} = U_1 - U_2$, ir tuo, kad $T_2 - T_1 = A_{12}$ (visų dalelę veikiančių jėgų atstojamosios jėgos atliekamas darbas sunaudojamas dalelės kinetinės energijos padidėjimui), gauname

$T_2 - T_1 = U_1 - U_2 + A_{12}^*$ arba

$$(U_2 + T_2) - (U_1 - T_1) = A_{12}^* \text{ arba } E_2 - E_1 = A_{12}^* . \tag{4-23}$$

Tai reiškia, kad visų nekonservatyviųjų jėgų darbas yra sunaudojamas sistemos mechaninės energijos didinimui (jei $A_{12}^* > 0$).

Jei $A_{12}^{*} < 0$, sistema atlieka darbą išorės atžvilgiu, veikiant nekonservatyviosioms jėgoms. Pvz., veikiant trinčiai kūnas perkeliamas iš taško 1 į tašką 2, kuriems $U_1 > U_2$. Jei kūno kinetinė energija nekinta, tuomet visas potencinės energijos pokytis virsta šiluma (dėl trinties).

Centrinės jėgos

Vienas dažnai pasitaikančių konservatyviųjų jėgų pavyzdys – centrinės jėgos (centrinių jėgų laukas). Šioms jėgoms būdinga, kad dalelę, esančią bet kuriame šių jėgų lauke, veikiančios jėgos kryptis eina per vieną nejudamą centrą, o jėgos dydis priklauso tik nuo atstumo iki to centro, t.y. $F = F(r)$. Pavyzdys – gravitacijos laukas. Jei centras yra labai toli nuo dalelės (kūno) tiek, kad visi charakteringi atsumai žymiai mažesni už atstumą iki centro, jėgų kryptys maždaug lygiagrečios. Tuomet sakoma, kad laukas **vienalytis (homogeniškas)**. Pavyzdys – gravitacijos (sunkio) laukas Žemės paviršiuje, kai atstumai kinta nedaug, lyginant su Žemės spinduliu (apie 6370 km). Kitas pavyzdys – vienalytis yra veikiantis elektringą dalelę jėgų laukas tarp plokščiojo kondensatoriaus plokštelių.