Papildomo ugdymo mokykla Fizikos olimpas

# Mechanika
# Dinamika (II dalis)

(Paskaitų konspektas)
2009 m. kovo 12-18 d.

Prof. Edmundas Kuokštis

Planas

- Kietojo kūno masės centras
- Statika
- Pagrindinė sukamojo judėjimo lygtis
- Judesio kiekio (impulso) momento tvermės dėsnis
- Koriolio jėga
- Kietojo kūno dinamika
- Sukimasis apie nejudamą ašį. Inercijos momentas
- Slenkamojo ir sukamojo judėjimo palyginimas
- Kūnų judėjimas nuožulniąja plokštuma
- Giroskopas

Vilnius

# Fizikos Olimpas
Sesija 2009 03 12-16

- Kietojo kūno masės centras
- Statika
- Pagrindinė sukamojo judėjimo lygtis
- Judesio kiekio (impulso) momento tvermės dėsnis
- Koriolio jėga
- Kietojo kūno dinamika
- Sukimasis apie nejudamą ašį. Inercijos momentas

## Kietojo kūno masės centras

Iki šiol nagrinėjome taip vadinamą materialiojo taško dinamiką. Materialusis taškas – abstrakcija, modelis, kuris dažnai gana gerai atspindi tikrovę. Vienok realybėje visuomet susiduriame su baigtinių matmenų kūnais, kurie mechanikoje apibūdinami kaip kietieji kūnai. Tai vėlgi abstrakcija. Mechanikoje kietasis kūnas – tai baigtnių matmenų kūnas, kurio matmenys dėl sąveikos su kitais kūnais nesikeičia. Tikrovėje vyksta įvairios deformacijos, ir matmenys nors ir nežymiai, bet keičiasi. Dažnai tai nedidel pokyčiai, ir kietojo kūno modelis gana gerai tinka.

Mechanikoje praverčia kietojo kūno masės  centro sąvoka. Masės centras – tai taškas, kuris pasirinktos koordinačių sistemos atžvilgiu nusakomas bendru atveju tokiu būdu:

$$\boldsymbol{r}_C = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i \,, \tag{D2-1}$$

čia $m_i$ ir $\boldsymbol{r}_i$ – $i$-osios dalelės (ją galima laikyti taškiniu kūnu) masė ir radiusas-vektorius (tos pačios atskaitos sistemos atžvilgiu), $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ - visa kitojo kūno masė.

Jei koordinačių sistemos pradžią pasirinksime masių centre, tai $\mathbf{r}_C = 0$, ir

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i = 0 \tag{D2-2}$$

Jei kūno masė pasiskirsčiusi nenutrūkstamai, tai

$$\boldsymbol{r}_C = \frac{1}{m}\int_{(m)} \boldsymbol{r}\,\mathrm{d}m \tag{D2-3}$$

Kartais kietųjų kūnų sistemą patogu sudalinti į kelis kietuosius kūnus. Nesunku pastebėti, kad (D2-1), pvz., sudalinus kūną į 2 dalis, kurių vieną sudaro $k$ taškinių dalelių, o kitą – likusios kietojo kūno ($n$-$k$) dalelės, galima pergrupuoti tokiu būdu:

$$\boldsymbol{r}_C = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i = \frac{1}{m}\left[\sum_{i=1}^{k} m_i \boldsymbol{r}_i + \sum_{i=k+1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i\right], \tag{D2-4}$$

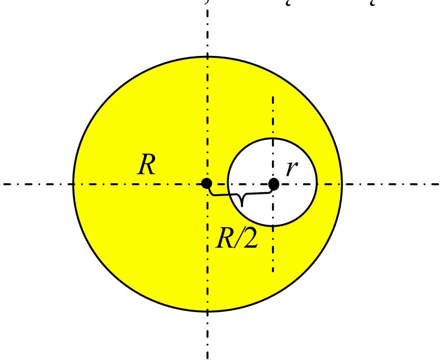
arba

$$m\boldsymbol{r}_C = m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2, \qquad \text{(D2-5)}$$

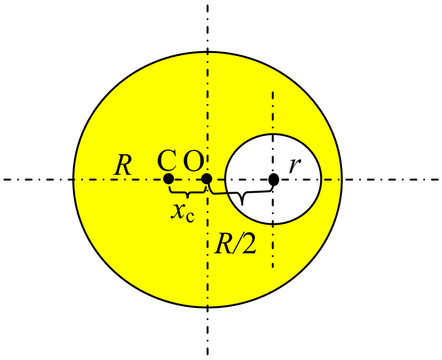
čia indeksai „1“ ir „2“ reiškia atitinkamus pirmojo ir antrojo kūno dydžius. Ši formulė praverčia, skaičiuojant įvairių firgūrų ar sudėtingos formos kųnų masės centrus, tinkamai parinkus pačius kūnus ir koordinačių pradžią.

## 1 pavyzdys

Rasti vienalyčio spindulio $R$ disko, turinčio spindulio $r$ ($r<R/2$) kiaurymę, kurios centras yra atstumu $R/2$ nuo disko centro, masių centrą.




Sprendimas




Tegul ieškomos figūros masės centras taške C. Galime įsivaizduoti, kad užpildome kiaurymę iki vienalyčio disko, kurio masių centras yra geometrinis skritulio centras O. Jo atžvilgiu pritaikykime formulę $m\boldsymbol{r}_C = m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2$, tardami, kad 1-asis kūnas yra duotoji figūra (skritulys su išpjova), o 2-asis – užpildančioji figūra ($r$ spindulio diskas). Tuomet taško O atžvilgiu $\boldsymbol{r}_C = 0$. Taigi,

$m_1 x_C - m_2 \dfrac{R}{2} = 0$. Visos figūros vienalytės, jų tankis vienodas (ploto vieneto masė visur ta pati), taigi gauname

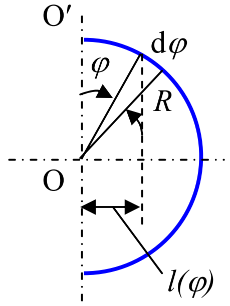
$$\pi(R^2 - r^2)\cdot x_c = \pi r^2\left(\frac{R}{2}\right).$$

Iš čia $x_c = \dfrac{Rr^2}{2(R^2 - r^2)}$.

## 2 pavyzdys

Rasti plonos vienalytės vielos, sulenktos į spindulio $R$ pusapskritimį, masės centrą.

Sprendimas




$$\mathrm{d}m = \frac{m}{\pi R} R\mathrm{d}\varphi$$

Pagal masių centro apibrėžimą ($x_C$ skaičiuojamas ašies OO′ atžvilgiu):

$$mx_c = 2\int_0^{\pi/2} l(\varphi)\mathrm{d}m = 2\int_0^{\pi/2} \frac{m}{\pi R} R\mathrm{d}\varphi R\sin\varphi \,.$$

Iš čia $x_c = \dfrac{2R}{\pi}$.

Tokio tipo uždavinių sprendimą palengvina **1-oji Guldeno teorema:** sukimosi kūno paviršius, gautas sukant bet kokią plokščią kreivę apie ašį, esančią tos kreivės plokštumoje, bet jos nekertančią, lygus tos kreivės ilgiui, padaugintam iš jos masių centro apibrėžto apskritimo ilgio.

Iš tikrųjų, šio uždavinio atveju pasirinkime ašį OO′. Tuomet pritaikome 1-ąją Guldeno teoremą:

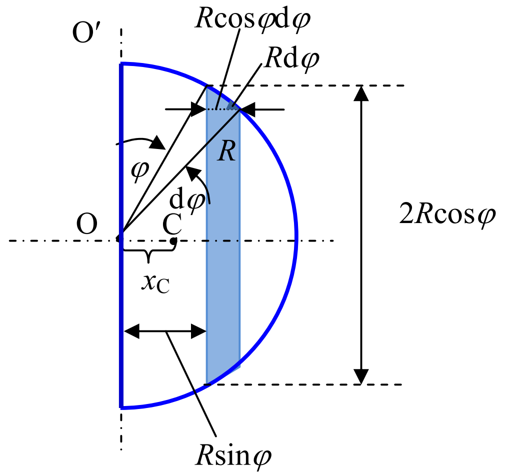
$4\pi R^2 = \pi R \cdot 2\pi x_C$ . Iš čia $x_c = \dfrac{2R}{\pi}$ - gauname tą pačią vertę.

## 3 pavyzdys

Rasti vienalyčio spindulio $R$ pusskritulio masės centrą.

Sprendimas

Pasirenkame integravimo kintamąjį kampą $\varphi$, kuris kinta ribose nuo 0 iki $\pi/2$ (žr. brėž.).




Tuomet $mx_C = \int_0^R x\mathrm{d}m$. Pusskritulis vienalytis, todėl masė proporcinga atitinkamos figūros plotui. Taigi,

$$\frac{\pi R^2}{2} x_C = \int_0^{\pi/2} 2R\cos\varphi\, R\cos\varphi \mathrm{d}\varphi R\sin\varphi\,,$$

$$\frac{\pi R^2}{2} x_C = 2R^3 \int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi \sin\varphi \mathrm{d}\varphi\,,$$

$$\frac{\pi R^2}{2} x_C = \frac{2R^3}{3}\,, \text{ iš čia } x_C = \frac{4R}{3\pi}\,.$$

Spręsdami šį uždavinį, galime pasinaudoti **2-ąja Guldeno teorema**: kūno tūris, gautas sukant bet kokią plokščią figūrą apie ašį, gulinčią tos figūros plokštumoje, bet jos nekertančią, lygus tos fogūros ploto ir jos masės centro apibrėžto apskritimo ilgio sandaugai.

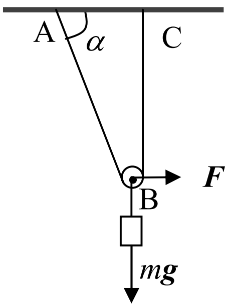
Šiame uždavinyje pasirenkame ašį OO′. Tuomet pritaikę 2-ąją Guldeno teoremą turime:

$$\frac{4\pi R^3}{3} = \frac{\pi R^2}{2} 2\pi x_C\,. \text{ iš čia } x_C = \frac{4R}{3\pi}\,.$$

## Statika

Statika – tai mechanikos dalis, nagrinėjanti kūnų pusiausvyros sąlygas. Statikoje analizuojamos jėgos bei jėgų momentai kaip vektoriai. Statinės pusiausvyros atveju tiek jėgų, tiek jėgos momentų atstojamosios lygios 0.

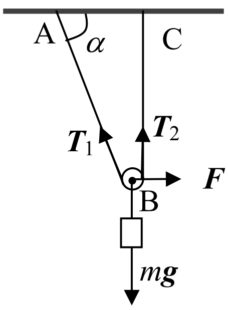
## 4 pavyzdys




Kam lygi horizontali jėga $F$, veikianti į nedidelį skridinį B, jei pakabinus masės $m$ krovinį siūlas CB vertikalus, o AB su horizontu sudaro kampą $\alpha$?

### Sprendimas

Situacija statinė, t.y. turime pusiausvyrą. Tuomet jėgų vektorinė suma lygi 0.




Tuomet patogu sumuoti horizontaliąsias ir vertikaliąsias jėgų projekcijas taške B. Įvedę siūlo tempimo jėgą $T$, turime tašką B veikiančias jėgas $\boldsymbol{T}_1$, $\boldsymbol{T}_2$ ($T = T_1 = T_2$), $m\boldsymbol{g}$ ir $\boldsymbol{F}$. tuomet

$$\begin{cases} F = T_1 \cos\alpha \\ mg = T_1 \sin\alpha + T_2 \\ T_1 = T_2 \end{cases}$$

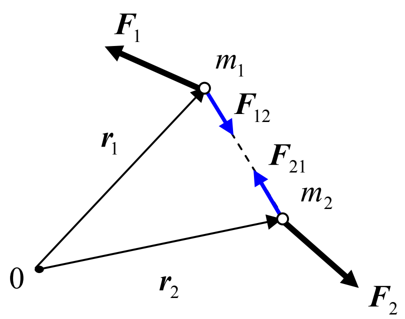
Išsprendę sistemą, gauname $F = mg\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$.

## Pagrindinė sukamojo judėjimo lygtis

Panagrinėkime dviejų sąveikaujančių dalelių sistemą. Tegul pirmąją dalelę veikia išorinė jėga $\boldsymbol{F}_1$ ir antra dalelė jėga $\boldsymbol{F}_{12}$. Antrajai dalelei analogiškos jėgos $\boldsymbol{F}_2$ ir $\boldsymbol{F}_{21}$. Vidinėms jėgoms $\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21}$.

Dalelių judėjimo lygtys (antrasis Niutono dėsnis)

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{p}}_1 &= \boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_1 \\ \dot{\boldsymbol{p}}_2 &= \boldsymbol{F}_{21} + \boldsymbol{F}_2 \end{aligned} \qquad \text{(D2-6)}$$




Padauginkime šias lygtis iš kairės vektoriškai atitinkamų radiusų vektorių pasirinkto taško (centro) 0 atžvilgiu.

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{r}_1, \dot{\boldsymbol{p}}_1] &= [\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{F}_{12}] + [\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{F}_1] \\ [\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{p}_2] &= [\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{F}_{21}] + [\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{F}_2] \end{aligned} \qquad \text{(D2-7)}$$

Bet $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{r}\boldsymbol{p}] = [\boldsymbol{r}\dot{\boldsymbol{p}}] + [\dot{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{p}] = [\boldsymbol{r}\dot{\boldsymbol{p}}]$, nes $[\dot{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{p}] = \frac{1}{m}[\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}] = 0$.

Be to, pasinaudoję tuo, kad $\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21}$ ir sudėję (D2-7) lygtis, gauname

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{[\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_1] + [\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{p}_2]\} = [(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2), \boldsymbol{F}_{12}] + [\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{F}_1] + [\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{F}_2]. \qquad \text{(D2-8)}$$

Čia pastebėsime, kad vektoriai $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ ir $\boldsymbol{F}_{12}$ kolinearūs (iš tikrųjų antilygiagretūs), todėl šių vektorių vektorinė sandauga lygi 0. Tuomet

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{[\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_1] + [\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{p}_2]\} = [\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{F}_1] + [\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{F}_2]. \qquad \text{(D2-9)}$$

Jei sistema uždara,

$$[\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_1] + [\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{p}_2] = \mathrm{const}\,t\,. \qquad \text{(D2-10)}$$

Tai išsilakantis dydis. Šis dydis dalelei $\boldsymbol{L} = [\boldsymbol{r}\boldsymbol{p}]$ vadinamas judesio kiekio (impulso) momentu centro O atžvilgiu. Tai pseudovektorius. Jis adityvus dydis.

Čia galima įvesti ir kitą naudingą dydį - **jėgos momentą**. Jėgos momentu centro O atžvilgiu vadinamas dydis $\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{rF}]$. Taigi, lygtį vienos dalelės atžvilgiu, panaudodami šiuos dydžius, galėtume užrašyti kaip

$\frac{d}{dt}\sum \boldsymbol{L} = \sum \boldsymbol{rM}_{\text{išorin}}$ arba

$$\boxed{\frac{d}{dt}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{M}} \qquad \text{(D2-11)}$$

Tai pagrindinė sukamojo judėjimo lygtis.

## Judesio kiekio (impulso) momento tvermės dėsnis

Jei sistema uždara (neveika jokie išoriniai momentai – jėgos gali veikti, bet momentai turi būti lygūs nuliui), tuomet $\boldsymbol{M} = 0$.
Tada

$$\boxed{\boldsymbol{L} = \text{const}} \qquad \text{(D2-12)}$$

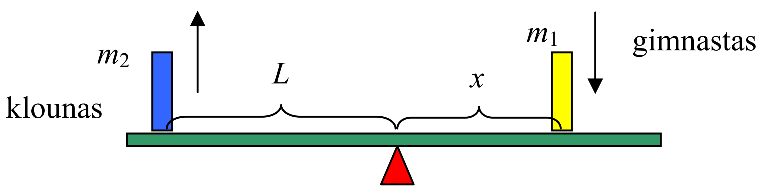
Tai impulso (judesio kiekio) momento tvermės dėsnis.

## 5 pavyzdys

Cirko trampliną sudaro horizontali lenta su per vidurį įtaisytu šarnyru. Į vieną lentos galą iš pakankamai didelio aukščio šoka masės $m_1$ gimnastas, o kitame lentos gale esantis masės $m_2$ klounas išmetamas į viršų. Kokiu atstumu $x$ nuo šarnyro turi taikyti šokti gimnastas, kad klounas pakiltų į didžiausią aukštį, jei klounas yra $L$ atstumu nuo šarnyro? Lentos masės nepaisyti.

Ats.: $x = L\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$

Sprendimas




Šarnyro atžvilgiu turi būti tenkinamas judesio kiekio momento tvermės dėsnis, t.y.

$$m_1 x v_1 = m_2 L v_2 \ .$$

Čia $v_1$ - gimnasto greitis, kurį jis turi prieš pat pasiekdamas trampliną, $v_2$ - klouno greitis, gimnastui sustojus.
Šiam momentui galime užrašyti ir energijos tvermės dėsnį, kuris bendru atveju nusakomas

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_2 v_2^2}{2} + Q \ .$$

Čia $Q$ – galima išsiskyrusi šiluma smūgio metu. Kad klounas pasiektų didžiausią aukštį, ši šiluma turi būti minimali, t.y. idealiu atveju lygi 0.
Tuomet iš šių dviejų lygčių eliminavę santykį $v_1 / v_2$, gauname

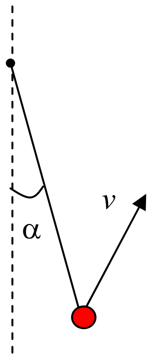
$$x = L\sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \ .$$

## 6 pavyzdys

Nedidelis rytuliukas pakabintas ant ilgio *l* siūlo. Po to rutuliukas atlenkiamas taip, kad siūlas sudaro kampą $\alpha$ su vertikale, ir suteikiamas horizontalus greitis statmena vertikaliai plokštumai, kurioje yra siūlas, kryptimi. Kokį pradinį greitį reikia suteikti rutuliukui, kad judėdamas jis atlenktų siūlą nuo vertikalės didžiausiu kampu $\pi / 2$ ?

Ats.: $v = \sqrt{\dfrac{2gl}{\cos\alpha}}$ .

### Sprendimas




Pradiniam (atsilenkimas kampu α) ir galutiniam (atsilenkimas kampu $\pi / 2$ ) momentams pritaikome judesio kiekio momento ašies atžvilgiu ir energijos tvermės dėsnius:

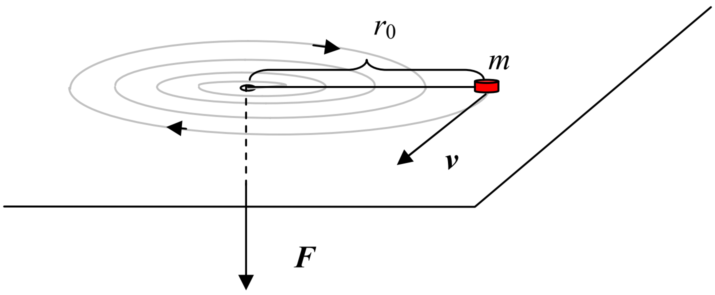
$$\begin{cases} mvl\sin\alpha = mul \\ \dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{mu^2}{2} + mgl\cos\alpha \end{cases} .$$

Iš lygčių eliminavę *u*, gauname

$$v = \sqrt{\frac{2gl}{\cos\alpha}}$$

## 7 pavyzdys

Ant horizontalios lygios plokštumos juda nedidelis masės *m* kūnas su pririštu siūlu, kurio antras galas pervertas per nedidelę plokštumos kiaurymę. Siūlas pamažu traukiamas į kiaurymę. Rasti siūlo įtempimo jėgą kaip kūno atstumo *x* iki kiaurymės finkciją, jei esant atstumui $r_0$ kūno greitis buvo statmenas siūlui ir lygus $v_0$.




Ats.: $F(x) = \dfrac{mv_0^2 r_0^2}{x^3}$.

Sprendimas

Kūnas *m* kiaurymės (judėjimo centro) atžvilgiu turi judesio kiekio momentą $L = mvr_0$. Sukamojo judėjimo atžvilgiu sistema yra uždara, nes veikia jėga, kuri nesukuria jėgos momento, t. y. $\boldsymbol{M} = 0$. Kadangi $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}$, tai $L = \text{const}$ - galioja judesio kiekio tvermės dėsnis. Taigi, jei kūnas yra atstumu *x* nuo kiaurymės, iš judesio kiekio tvermės dėsnio galime užrašytiį:

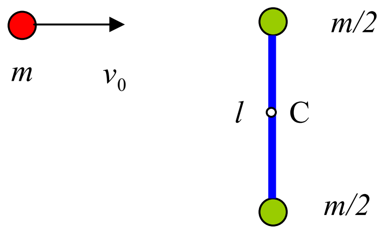
$$mv(x)x = mv_0 r_0.$$

Vadinasi, kai atstumas iki kiaurymės *x*, kūnas turi linijinį greitį $v(x) = \dfrac{v_0 r_0}{x}$, kuris statmenas siūlui. Bet kūną tame taške turi veikti įcentrinė jėga $F_{įc} = \dfrac{mv^2(x)}{x}$, o tai ir yra siūlo įtempimo jėga. Vadinasi,

$$F(x) = \frac{mv_0^2 r_0^2}{x^3}.$$

## 8 pavyzdys

Masės *m* rutuliukas, turėdamas greitį $v_0$, tampriai susiduria su vienu iš rutuliukų, sudarančių rimtyje buvusį kietą hantelį, kaip parodyta pav. Hantelio kiekvieno rutuliuko masė $m/2$, o atstumas tarp jų *l*. Nekreipdami dėmesio į rutuliukų matmenis ir tardami, kad hantelius jungiantis strypelis labai lengvas, rasti hantelio savąjį judesio kiekio momentą po smūgio, t.y. judesio kiekio momentą atžvilgiu judančio pastoviu greičiu hantelio masės centro C. Kokiu kampiniu greičiu sukasi hantelis jo masių centro ayžvilgiu?




Ats.: $L = \dfrac{lmv_0}{3}$, $\omega = \dfrac{4}{3l} v_0$ .

Sprendimas

Smūgio metu sąveikauja tik masės *m* rutuliukas ir viršutinysis hantelio rutuliukas. Užrašome jiems judesio kiekio ir energijos tvermės dėsnius:

$$\begin{cases} mv_0 = mv' + \dfrac{m}{2} v'' \\ \dfrac{mv_0^2}{2} = \dfrac{mv'^2}{2} + \dfrac{mv''^2}{4} \end{cases} .$$

Čia $v'$ ir $v''$ - atitinkamai masės *m* ir hantelio viršutiniojo rutuliuko greičiai po smūgio. Išsprendę sistemą, gauname

$$v' = \frac{v_0}{3} \text{ ir } v'' = \frac{4}{3} v_0 .$$

Tuo būdu, iš karto po smūgio apatinio hantelio rutuliuko atžvilgiu viršutinysis juda greičiu $v''$, o hantelio masių centras – dvigubi mažesniu greičiu, t.y. $v_C = \frac{2}{3} v_0$. Tuomet masių centro atžvilgiu (persikėlus į greičiu $v_C$ judantį hantelio masės centrą) viršutinysis rutuliukas juda greičiiu $v'' - \frac{2}{3} v_0 = \frac{2}{3} v_0$ (į dešinę), o apatinis – greičiu $0 - \frac{2}{3} v_0 = -\frac{2}{3} v_0$ (į kairę). Taigi, judesio kiekio momentas atžvilgiu judančio pastoviu greičiu hantelio masės centro C lygus:

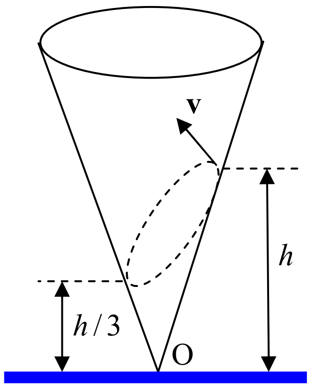
$$L = 2 \cdot \frac{m}{2} \cdot \frac{2}{3} v_0 \cdot \frac{l}{2} = \frac{lmv_0}{3} .$$

Kampinį greitį gauname iš lygybės:

$$\omega \cdot \frac{l}{2} = \frac{2}{3} v_0 \text{, t.y. } \omega = \frac{4}{3l} v_0 .$$

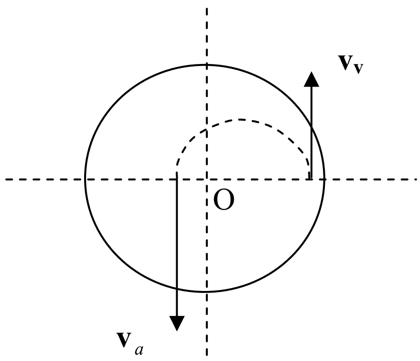
## 9 pavyzdys

Vertikaliai įtvirtinto kūgio vidiniu paviršiumu be trinties slysta nedidelis kūnas. Pradiniu momentu kūnas yra aukštyje *h*, o greičio vektorius nukreiptas kūgio paviršiaus liestinės kryptimi ir yra horizontaliojoje plokštumoje. Judėdamas toliau kūnas nusileidžia iki aukščio $h/3$, o po to pradeda kilti. Apskaičiuoti kūno greitį viršutiniame ir apatiniame trajektorijos taške.




Sprendimas

Vaizdas iš viršaus




Viršutiniam ir apatiniam taškui pritaikome judesio kiekio momento kūgio simetrijos ašies atžvilgiu ir energijos tvermės dėsnius:

$$\begin{cases} mv_v h tg\alpha = mv_a \dfrac{h}{3} tg\alpha \\ \dfrac{mv_v^2}{2} + mg\dfrac{2}{3}h = \dfrac{mv_a^2}{2} \end{cases}.$$

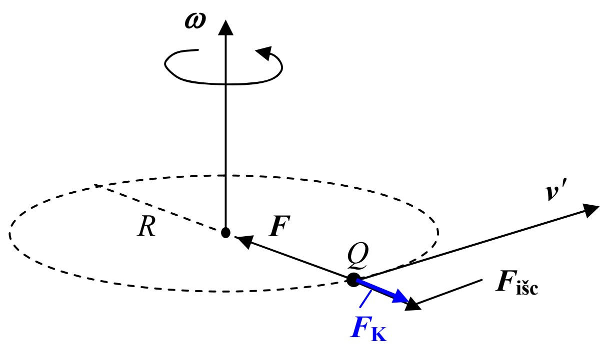
Čia *m* – kūno masė, $v_v$ ir $v_a$ - kūno greičiai atitinkamai viršutiniame ir apatiniame trajektorijos taške, o $2\alpha$ - kūgio viršūnės kampas.

Išsprendę sistemą,gauname:

$$v_v = \sqrt{\frac{gh}{6}},\ v_a = \sqrt{\frac{3gh}{2}}.$$

## Koriolio jėga

Dar vienas iš neinercinės sitemos pavyzdžių – besisukanti sistema. Jei persikeltume į šią sistemą, tai jos atžvilgiu nejudantis kūnas inercinės atskaitos sistemos atžvilgiu judėtų su įcentriniu pagreičiu. Jei kūnas besisukančios sistemos atžvilgiu nejuda, vadinasi tą jėgą toje sistemoje turi kompensuoti priešinga įcentrinei jėga. Ši fiktyvi jėga ir vadinama išcentrine jėga. Tai inercinės jėgos atvejis.
Ji turi prasmę tik besisukančioje sistemoje. Jei toje sistemoje kūno neveiktų jokia kita jėga (trinties, virvės tempimo ar kita), tai kūnas judėtų su pagreičiu nuo centro (iš čia ir pavadinimas – išcentrinis pagreitis arba išcentrinė jėga).
Kūnui *Q judant* besisukančioje neinercinėje sistemoje be inercinės (išcentrinės) jėgos atsiranda dar viena papildoma jėga, kuri vadinama Koriolio jėga.
Panagrinėkime atskirą atvejį, kai turime besisukančią apie tam tikrą ašį kampiniu greičiu $\omega$ sistemą $K'$, o joje judantį taškinį kūną greičiu $\mathbf{v}'$. Tegul konkreti konfigūracija tokia, kaip nurodyta brėžinyje.




Mūsų nejudamos (inercinės) atskaitos sistemos atžvilgiu kūnas juda greičiu

$$v = v' + \omega R \qquad \text{(D2-13)}$$

Tada įcentrinė jėga mūsų nejudamos sistemos atžvilgiu lygi

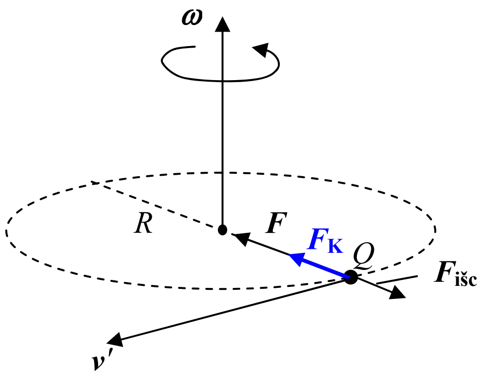
$$F = ma_n = \frac{mv^2}{R} = \frac{m(v' + \omega R)^2}{R} = \frac{mv'^2}{R} + 2mv'\omega + m\omega^2 R. \qquad \text{(D2-14)}$$

Besisukančios (neinercinės) sistemos atžvilgiu taškinis kūnas juda, turėdamas normalinį pagreitį $a_n' = \frac{v'^2}{R}$, t.y. lyg toje sistemoje veiktų jėga [čia išreiškiame $\frac{mv'^2}{R}$ iš (D2-14)]

$$ma_n' = \frac{mv'^2}{R} = F - 2mv'\omega - m\omega^2 R. \qquad \text{(D2-15)}$$

Matome, kad besisukančioje sistemoje be išcentrinės jėgos $\boldsymbol{F}_{\text{išc}} = m\omega^2$R atsiranda papildoma jėga ($-2mv'\omega$). Tai Koriolio jėga $\boldsymbol{F}_{\text{K}}$.

Jei greitis $v'$ būtų nukreiptas priešinga kryptimi:




Šiuo atveju nejudamos atskaitos sistemos atžvilgiu kūnas judėtų greičiu

$$v = v' - \omega R \qquad \text{(D2-16)}$$

Tada įcentrinė jėga nejudamos sistemos atžvilgiu lygi

$$F = ma_n = \frac{mv^2}{R} = \frac{m(v' - \omega R)^2}{R} = \frac{mv'^2}{R} - 2mv'\omega + m\omega^2 R\,. \qquad \text{(D2-17)}$$

Besisukančios sistemos atžvilgiu taškinis kūnas juda, turėdamas normalinį pagreitį $a'_n = \frac{v'^2}{R}$, t.y. lyg toje sistemoje veiktų jėga

$$ma'_n = \frac{mv'^2}{R} = F + 2mv'\omega - m\omega^2 R\,. \qquad \text{(D2-18)}$$

Taigi, šiuo atveju besisukančioje sistemoje be išcentrinės jėgos $\boldsymbol{F}_{\text{išc}} = m\omega^2\boldsymbol{R}$ veikia jėga $\boldsymbol{F}_{\text{K}}$, kurios modulis $2mv'\omega$.

Bendru atveju (esant bet kokiai greičio $\boldsymbol{v}'$ krypčiai)

$$\boxed{\boldsymbol{F}_k = 2m[\boldsymbol{v}'\boldsymbol{\omega}]} \qquad \text{(D2-19)}$$

Tai **Koriolio** inercijos jėga.

Jos pasireiškimo pavyzdžiai:

- Paplauti Žemės šiaurės pusrutulio upių, kurios teka iš pietų į šiaurę, rytiniai krantai.
- Labiau susidėvėję atitinkami geležinkelio bėgiai.
- Fuko švytuoklė.

## Kietojo kūno dinamika

Kietasis kūnas mechanikoje – tai baigtinių matmenų kūnas, turintis pastovią formą ir paprastai laikomas absoliučiai nedeformuojamu. Jo matmenys nėra daug mažesni už charakteringus nagrinėjamus ilgius ar nuotolius skirtingai nuo materialiojo taško. Vienose situacijose tas pats kūnas gali būtilaikomas materialiu tašku, kitose – kietuoju kūnu. Pvz., kūnas pakeliamas į tam tikrą aukštį. Jei kūno matmenys daug mažesni už šį aukštį, kūnas gali būti laikomas materialiuoju tašku. Jei kūno matmenys palyginami su šiuo aukščiu – kūnas turi būti analizuojamas kaip kietasis kūnas (būtina atsižvelgti į jo masės centro padėtį, sukimąsi ir kt.).

## Slenkamasis judėjimas

Iki šiol dažniausiai kalbėjome apie materialųjį tašką (arba keletą taškų). Jei turime didesnį masės $M$ kūną, kurio matmenų negalime atmesti kaip daug mažesnių už charakteringus nagrinėjamus atstumus, kūną galime mintimis sudalinti į daug mažų „taškinių“ kūnų $m_i$, kuriems naudojome atitinkamas materialiojo taško lygtis. Čia $\sum_i m_i = M$ . Pvz., kiekvienai dalelei galime taikyti antrąjį Niutono dėsnį

$$m_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{f}_i + \boldsymbol{F}_i . \qquad \text{(D2-20)}$$

Čia $\boldsymbol{f}_i$ - visų sistemos vidinių jėgų, veikiančių i-ąją dalelę, atstojamoji, o $\boldsymbol{F}_i$ - visų išorinių jėgų, veikiančių tą dalelę, atstojamoji. Sudėję visas daleles, gautume

$$\sum m_i \boldsymbol{a}_i = \sum \boldsymbol{f}_i + \sum \boldsymbol{F}_i \qquad \text{(D2-21)}$$

Vidinių jėgų suma lygi 0, todėl gauname

$$\sum m_i \boldsymbol{a}_i = \sum \boldsymbol{F}_i \qquad \text{(D2-22)}$$

Pastebėsime, kad įvesdami masių (inercijos) centrą, galime lygybę pertvarkyti:

$$\sum m_i \boldsymbol{r}_i = M \boldsymbol{r}_C \ . \qquad \text{(D2-23)}$$

Čia $\boldsymbol{r}_i$ - i-osios dalelės radiusas-vektorius pasirinktos sitemos atžvilgiu, o $\boldsymbol{r}_C$ - kūno masės (inercijos) centro radiusas-vektorius tos pačios sitemos atžvilgiu.

Bet $\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{a}_i$, o $\ddot{\boldsymbol{r}}_C = \boldsymbol{a}_C$. Tada

$\sum m_i \boldsymbol{a}_i = M \boldsymbol{a}_C$ , arba

$$M \boldsymbol{a}_C = \sum \boldsymbol{F}_{\text{išor}} \ . \qquad \text{(D2-24)}$$

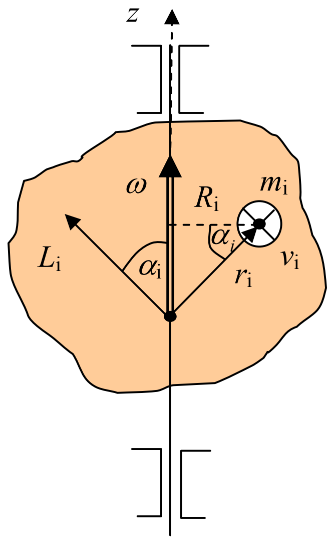
Ši lygtis reiškia, kad kietojo kūno masių centras juda taip, kaip judėtų taškinė kūno masės $M$ dalelė, kurią veiktų visų kūną veikiančių jėgų atstojamoji.

## Sukimasis apie nejudamą ašį. Inercijos momentas

Tegul absoliučiai kietas kūnas (atstumai tarp jo dalelių nekinta) sukasi apie fiksuotą $z$-ašį. Jei imtume i-ąją dalelę:

$$\boldsymbol{L}_i = [\boldsymbol{r}_i, m_i \boldsymbol{v}_i] = m_i [\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{v}_i] \qquad \text{(D2-25)}$$

Tada moduliams (žiūr. brėž. - vaizdas plokštumoje)




$$L_i = m_i r_i v_i = m_i r_i \omega R_i \qquad \text{(D2-26)}$$

$$L_{zi} = L_i \cos\alpha_i = m_i r_i \omega R_i \cos\alpha_i = m_i (r_i \cos\alpha_i) R_i \omega = \\ = m_i R_i^2 \omega \qquad \text{(D2-27)}$$

Susumavę pagal visas kūno daleles gauname

$$L_z = \sum L_{zi} = \sum m_i R_i^2 \omega = \omega \sum m_i R_i^2 \qquad \text{(D2-28)}$$

Čia įvedamas kūno inercijos momentas konkrečios sukimosi ašies atžvilgiu

$$\boxed{I = \sum m_i R_i^2} \qquad \text{(D2-29)}$$

Tuomet $L_z = I\omega$ arba bendru atveju

$$\boldsymbol{L} = I\boldsymbol{\omega} \qquad \text{(D2-30)}$$

Inercijos momentas – adityvus dydis, t.y. sistemos suminis inercijos momentas lygus atskirų jos dalių inrcijos momentų sumai. Inercijos mometas priklauso nuo ašies, kurios atžvilgiu kūnas sukasi ir kurios atžvilgiu jis skaičiuojamas. Tas pats kūnas gali turėti skirtingus inercijos momentus, jei ašys skirtingos.

Judesio kiekio momento tvermės dėsnis dažnai užrašomas ir tokiu būdu :

$$\boxed{I\omega = \mathrm{const}} \qquad \text{(D2-31)}$$

Priminsime, kad šiuo atveju išorinių ***jėgos momentų*** atstojamoji lygi nuliui (sistema uždara).
Dažnai būna, kad veikiantys išoriniai jėgų monetai kryptimi sutampa su judesio kiekio momento kryptimi, t.y. jie keičia tik judesio kiekio momento modulį. Tuomet pagrindinę sukamojo judėjimo lygtį galima taikyti skaliarine forma

$\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = M$, arba $\dfrac{\mathrm{d}(I\omega)}{\mathrm{d}t} = M$, arba (jei $I - \mathrm{Const}$ ir prisiminus, kad $\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \beta$ )

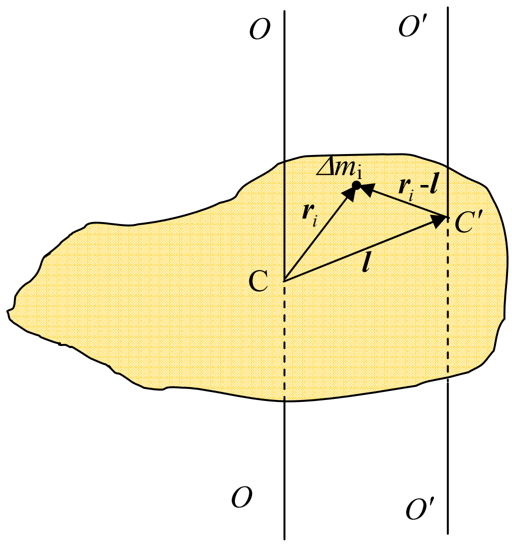
$$\boxed{I\beta = M} \qquad \text{(D2-32)}$$

## Šteinerio teorema

Kūno inercijos momentas $I$ bet kurios ašies atžvilgiu lygus inercijos momento $I_C$ ašies, einančios per kūno masių centrą ir lygiagrečios pirmajai ašiai, ir kūno masės bei atstumo tarp šių ašių $l$ kvadrato sandaugos sumai, t.y.

$$\boxed{I = I_C + ml^2} \qquad \text{(D2-33)}$$

Bet kokį kūną galime mintyse sudalinti į plonas plokštumas, statmenas nagrinėjamai ašiai. Sudėję jų inercijos momentus gauname viso kūno inercijos momentą, todėl galime nagrinėti vieną plokštimą. Visi vektoriai – vienoje tokioje plokštumoje.




Pagal inercijos momento apibrėžimą bet kurios ašies atžvilgiu (pvz., O′ O′)

$$I = \sum \Delta m_i (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{l})^2 = \sum \Delta m_i \boldsymbol{r}_i^2 - 2\sum \Delta m_i \boldsymbol{r}_i \boldsymbol{l} + \sum \Delta m_i \boldsymbol{l}^2$$

Masių centro atžvilgiu $I_C = \sum \Delta m_i r_i^2 = \sum \Delta m_i \boldsymbol{r}_i^2$ .
Be to, $\sum \Delta m_i \boldsymbol{r}_i \boldsymbol{l} = \left(\sum \Delta m_i \boldsymbol{r}_i\right) \boldsymbol{l} = 0 \cdot \boldsymbol{l} = 0$ , o $\sum \Delta m_i \boldsymbol{l}^2 = l^2 \sum \Delta m_i = ml^2$ . Taigi,

$$I = I_C + ml^2$$

## Inercijos momentų skaičiavimo pavyzdžiai

1. Masės $m$ ir spindulio $R$ plonas žiedas, ašis eina per masės centrą ir yra statmena žiedo plokštumai.

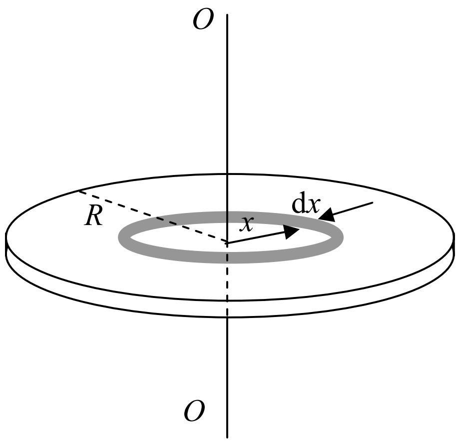
Sprendimas

Sudalinus žiedą į mažus elementus $\Delta m$, kiekvieno jų inercijos momenta lygus $\Delta mR^2$, nes jie visi yra vienodu atstumu nuo ašies. Tada

$I = \sum \Delta m_i R^2 = R^2 \sum \Delta m_i = mR^2$

2. Masės $m$ ir spindulio $R$ diskas, ašis eina per masės centrą ir yra statmena disko plkštumai.

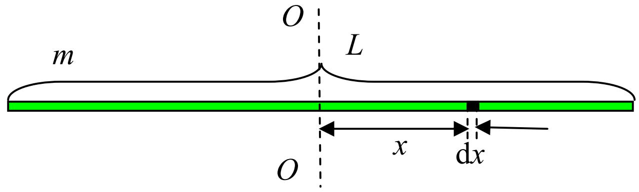
Sprendimas




$$I = \int_0^R \mathrm{d}m \cdot x^2 = \int_0^R \frac{m}{\pi R^2} 2\pi x \mathrm{d}x \cdot x^2 = \frac{2mR^4}{4R^2} = \frac{mR^2}{2}$$

3. Masės $M$ ir ilgio $L$ strypelis, ašis eina per masių centrą ir statmena strypeliui.

Sprendimas




$$I = 2\int_0^{L/2} \frac{M}{L} \mathrm{d}x \cdot x^2 = 2\frac{M}{L}\frac{x^3}{3}\bigg|_0^{L/2} = \frac{ML^2}{12}$$

3a. Kam lygus šio strypo inercijos momentas ašies, einančios per jo galą ir statmenos strypui, atžvilgiu?

Ats.: $I = \frac{1}{3}ML^2$

Sprendimas

Pasinaudojame Šteinerio teorema:

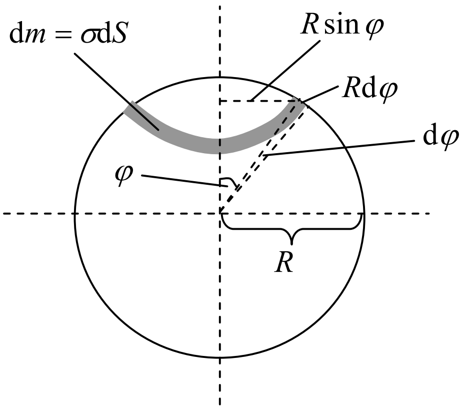
$$I = I_0 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{ML^2}{12} + \frac{ML^2}{4} = \frac{1}{3}ML^2 .$$

4. Apskaičiuokite plonasienės sferos inercijos momentą simetrijos ašies atžvilgiu. Sferos masė $m$, spindulys $R$.

Ats.: $I = \frac{2}{3}mR^2$

Sprendimas

Suskirstome sferą į plonus masės $dm$ žiedelius. Plono žiedo inercijos momentas lygus jo masei, padaugintai iš jo spindulio kvadrato.




Žiedelio masė $\mathrm{d}m = \sigma \mathrm{d}S = \frac{m}{4\pi R^2} 2\pi R \sin\varphi \cdot R\mathrm{d}\varphi = \frac{m}{2}\sin\varphi \mathrm{d}\varphi$. Tada

$$I = 2\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}m(R\sin\varphi)^2 = 2R^2\frac{m}{2}\int_0^{\pi/2} \sin^3\varphi \mathrm{d}\varphi = mR^2\int_0^{\pi/2} \sin^3\varphi \mathrm{d}\varphi =$$

$$= -mR^2\int_0^{\pi/2} (1-\cos^2\varphi)\mathrm{d}(\cos\varphi) = mR^2\left(-\cos\varphi\Big|_0^{\pi/2} + \frac{\cos^3\varphi}{3}\Big|_0^{\pi/2}\right) = \frac{2}{3}mR^2 .$$

5. Apskaičiuokite vienalyčio rutulio inercijos momentą simetrijos ašies atžvilgiu. Rutulio masė $m$, spindulys $R$.

Ats.: $I = \frac{2}{5} m R^2$

Sprendimas

Rutulį suskirstome į labai plonas spindulio $x$, storio $dx$ ir masės $dm$ sferas, kurių kiekvienos inercijos momentas lygus

$$\mathrm{d}I = \frac{2}{3}\mathrm{d}m \cdot x^2$$

$$\mathrm{d}m = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} 4\pi x^2 \mathrm{d}x = \frac{3m}{R^3} x^2 \mathrm{d}x$$

Tuomet

$$I = \int_0^R \mathrm{d}I = \int_0^R \frac{3m}{R^3} x^2 \mathrm{d}x \cdot \frac{2}{3} x^2 = \frac{2m}{R^3}\int_0^R x^4 \mathrm{d}x = \frac{2}{5} m R^2 .$$

## Besisukančio kietojo kūno kinetinė energija

Masės $m_\mathrm{i}$ taškinio kūno (dalelės) kinetinė energija

$E_{\mathrm{kin}} = \frac{m_i v_i^2}{2}$. Jei dalelė sukasi kampiniu greičiu $\omega$ apie ašį atstumu $r_\mathrm{i}$ nuo jos, galime ir taip užrašyti:

$$E_{\mathrm{kin}} = \frac{m_i(\omega r_i)^2}{2} = \frac{m_i r_i^2 \omega^2}{2} = \frac{I_i \omega^2}{2} . \qquad \text{(D3-1)}$$

Čia $I_\mathrm{i}$ – dalelės inercijos momentas ašies atžvilgiu.

Galime tarti, kad kietasis kūnas susideda iš daugelio taškinių dalelių, todėl besisukančio apie fiksuotą ašį kietojo kūno kinetinė energija gali būti skaičiuojama kaip suma tų taškinių dalelių kinetinių energijų, t.y.:

$$E_{\mathrm{kkin}} = \sum_i \frac{m_i r_i^2}{2} = \sum_i \frac{m_i r_i^2 \omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2}\sum_i m_i r_i^2 \qquad \text{(D3-2)}$$

Bet $\sum_i m_i r_i^2 = I$ - kietojo kūno inercijos momentas ašies atžvilgiu, tdėl

$$E_{\mathrm{kkin}} = \frac{I\omega^2}{2} \qquad \text{(D3-3)}$$

## Slenkamojo ir sukamojo judėjimo palyginimas

Lentelėje pateiktos kai kurios dažniausiai pasitaikančios praktinės formulės, naudojamos analizuojant slenkamąjį ir sukamąjį judėjimą

**D3-1 lentelė**

| Slenkamasis judėjimas | Sukamasis judėjimas |
|---|---|
| $\boldsymbol{s}$ - poslinkis | $\boldsymbol{\varphi}$ - kampas |
| $\boldsymbol{v}$ – linijinis greitis | $\boldsymbol{\omega}$ - kampinis greitis |
| $\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}}$ - linijinis pagreitis | $\boldsymbol{\beta} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$ - kampinis pagreitis |
| $m$ - masė | $I$ - inercijos momentas |
| $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ - judėjimo kiekis (impulsas) | $\boldsymbol{L} = I\boldsymbol{\omega}$ - judėjimo kiekio (impulso) momentas |
| $\boldsymbol{F}$ – jėga | $\boldsymbol{M}$ – jėgos momentas |
| $\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{F}$ - pagrindinė slenkamojo judėjimo lygtis (antrasis Niutono dėsnis) | $\dot{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{M}$ - pagrindinė sukamojo judėjimo lygtis; kai ašis $z$ fiksuota (nejudama), $I\beta_z = M_z$ |
| $E_{\mathrm{kin}} = \dfrac{mv^2}{2}$ - slenkančio kūno kinetinė energija | $E_{\mathrm{kin}} = \dfrac{I\omega^2}{2}$ - besisukančio kūno kinetinė energija |
| $\mathrm{d}A = \boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ - jėgos atliktas darbas kelyje $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ | $\mathrm{d}A = \boldsymbol{M}\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varphi}$ - jėgos momento atliktas darbas, pasukus kūną kampu $\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}$ |

## Kūnų judėjimas nuožulniąja plokštuma

### 1. Šliuožantis kūnas

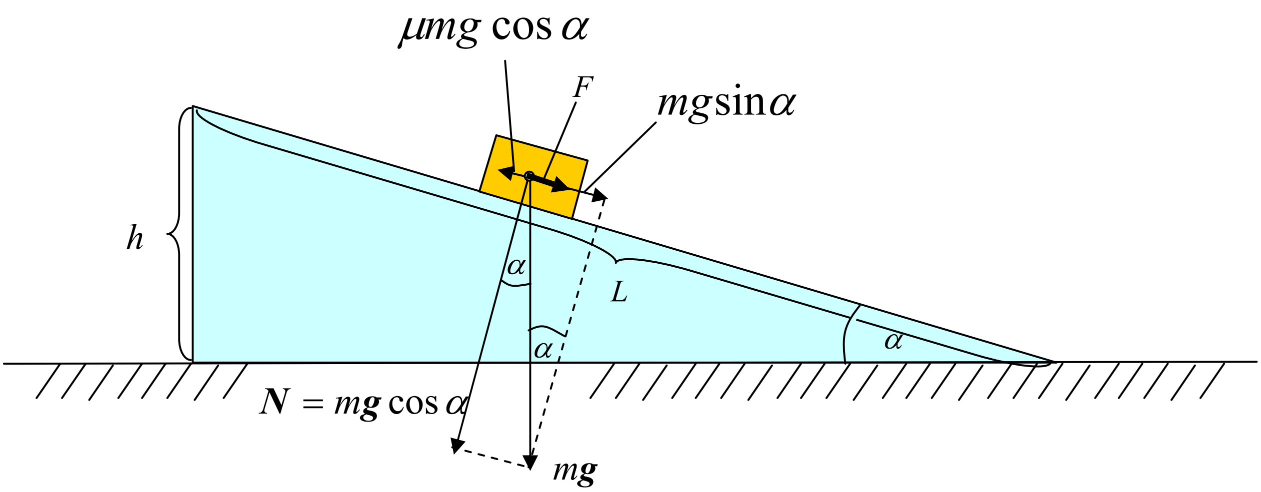
Ant įtvirtintos nuožulniosios plokštumos, sudarančios kampą $\alpha$ su horizontu, jos viršuje padedamas nedidelis masės $m$ kūnas. Trinties koeficientas tarp kūno ir nuožulnios plokštumos $\mu$, o nuožulniosios plokštumos ilgis $L$. Kūnas paleidžiamas judėti be pradinio greičio.

a) Kokiam trinities koeficientui $\mu$ kūnas pradės šliuožti?
b) Kokiu pagreičiu judės kūnas?

c) Per kiek laiko jis įveiks visą nuožulniosios plokštumos ilgį?
d) Kokį greitį jis įgis plokštumos papėdėje?
e) Kiek išsiskirs šilumos judant kūnui nuožulniąja plokštuma?

| | |
|---|---|
| | $\alpha$ |
| $\mu = ?$ | $m$ |
| $a = ?$ | $\mu$ |
| $t = ?$ | $L$ |
| $v = ?$ | |
| $Q = ?$ | |

Sprendimas




a) Kad kūnas pradėtų šliuožti, būtina,kad maksimali trinities jėga neviršytų sunkio jėgos dedamosios išilgai nuožulniosios plokštumos (čia tarsime, kad rimties trintis lygi slydimo trinčiai). Taigi

$$F_{\text{tr}} < mg\sin\alpha$$

Bet $F_{\text{tr}} = \mu N = \mu mg\cos\beta$

Tuomet

$\mu mg\cos\beta < mg\sin\alpha$ , iš kur

$$\mu < tg\alpha$$

b) Pagreitį surandame iš antrojo Niutono dėsnio, kurį pritaikome jėgoms ir judėjimui išilgai nuožulniosios plokštumos:

$ma = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha$ . Iš čia

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

c) Šliuožimo laiką $t$ galime rasti iš nueito kelio: $L = \frac{at^2}{2}$. Tada

$$t = \sqrt{\frac{2L}{a}} = \sqrt{\frac{2L}{g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}}$$

d) Galima spręsti dviem būdais.

*1-as būdas*

Pasinaudokime energijos tverme (į kūno matmenis neatsižvelgiame, nes jis mažas):

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + F_{\mathrm{tr}}L ,$$

kur $h = L\sin\alpha$ $h$ – nuožulniosios plokštumos aukštis. Tada

$$v = \sqrt{\frac{2mgh - 2F_{tr}L}{m}} = \sqrt{2gL(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)} .$$

*2-as būdas*

$v = at$ . Bet šliuožimo laiką $t$ galime rasti iš nueito kelio: $L = \frac{at^2}{2}$. Tada

$$v = a\sqrt{\frac{2L}{a}} = \sqrt{2aL} = \sqrt{2gL(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)} .$$

e) Šiluma išsiskiria dėl trinties jėgų darbo, t.y.

$$Q = F_{\mathrm{tr}}L = \mu mgL\cos\alpha .$$

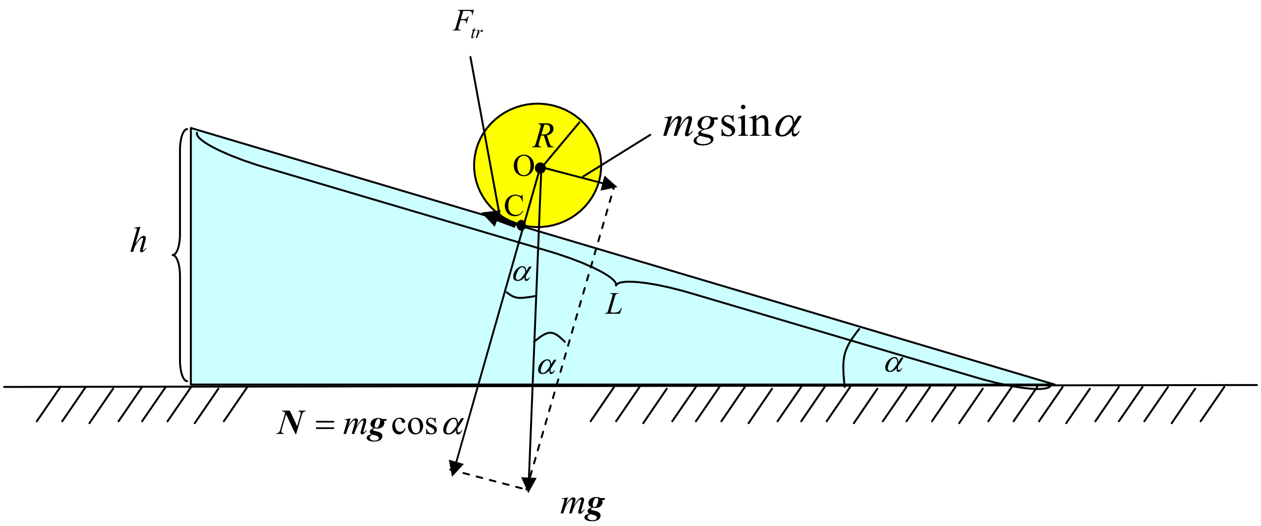
## 2. Riedantis cilindras.

Cilindras, kurio masė $m$ ir spindulys $R$, nurieda be praslydimo nuo įtvirtintos aukščio $h$ nuožulniosios plokštumos, sudarančios kampą $\alpha$ su horizontu, viršaus. Cilindro spindulys žymiai mažesnis už nuožulniosios plokštumos matmenis.

a) Kokiu linijiniu pagreičiu juda cilindro masės centras?
b) Kokiu kampiniu pagreičiu cilindro simetrijos ašies atžvilgiu sukasi cilindras?
c) Kokia trinities jėga veikia cilindrą jo lietimosi su nuožulniąja plokštuma taške?
d) Kiek laiko riedės cilindras iki nuožulniosios plokštumos papėdės?
e) Kokį linijinį greitį įgis cilindro masės centras nuriedėjęs nuo plokštumos?
f) Koks turi būti slydimo trinties koeficientas, kad cilindras nepraslystų?

Išnagrinėti tris atvejus, kai cilindro inercijos momentas labai mažas (jo masė sukoncentruota ties jo simetrijos ašimi), kai cilindras vienalytis ir kai cilindras – plonasienis vienalytis vamzdis.

Sprendimas




Čia tariame, kad riedėjimo trintis labia maža ir jos nepaisome. Veikianti trinties jėga (tai iš esmės rimties trintis, nes cilindras nepraslysta) suteikia cilindrui kampinį pagreitį bei priešinasi cilindro judėjimui plokštuma, bet darbo ši jėga neatlieka, nes nėra slydimo.

a)

*1-as būdas*

Sudarome lygčių sistemą, remdamiesi antruoju Niutono dėsniu išilgai judėjimui plokštumos, surišdami linijinį ir kampinį pagreičius bei užrašydami pagrindinę sukamojo judėjimo lygtį cilindro simetrijos ašies (eina per tašką O) atžvilgiu:

$$\begin{cases} mg\sin\alpha - F_{\mathrm{tr}} = ma \\ a = \beta R \\ F_{\mathrm{tr}} R = I_0 \beta \end{cases}$$

Eliminuojame $F_{\mathrm{tr}}$:

$$\begin{cases} mg\sin\alpha - \dfrac{I_0\beta}{R} = ma \\ a = \beta R \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad mg\sin\alpha - \frac{I_0 a}{R^2} = ma$$

Tada $$a = \frac{mg\sin\alpha}{\frac{I_0}{R^2} + m}.$$

Jei $I_0 \approx 0$ (cilindro masė sukoncentruota ties jo ašimi), gauname $a = g\sin\alpha$. Tai slystanti be trinities dalelė.

Jei cilindras vienalytis, jo inercijos momentas $I = \frac{mR^2}{2}$. Tada

$$a = \frac{2g\sin\alpha}{3}.$$

Jei cilindras – plonasienis vamzdis, jo inercijos momentas $I = mR^2$. Tada

$$a = \frac{g\sin\alpha}{2}.$$

*2-as būdas*

Pakanka nagrinėti dvi lygtis, kurių viena išreiškia tą patį ryšį tarp kampinio ir linijinio pagreičio, o kita – pagrindinė judėjimo lygtis sukamajam judesiui atžvilgiu nejudamos momentinės ašies, lygiagrečios cilindro simetrijos ašiai, bet esančios bendruose cilindro ir nuožulniosios plokštumos taškuose (brėžinyje ši ašis statmena brėžinio plokštumai ir eina per tašką C):

$$\begin{cases} a = \beta R \\ Rmg\sin\alpha = (I_0 + mR^2)\beta \end{cases}$$

Antroje lygtyje yra pritaikyta Šteinerio teorema.

Išsprendę šią dviejų lygčių sistemą, gautume identiškus atsakymus, gautus pirmuoju būdu.

b) $$\beta = \frac{a}{R} = \frac{mg\sin\alpha}{R\left(\frac{I_0}{R^2} + m\right)}.$$

Jei inercijos momentas labai mažas, vardiklyje galime atmesti narį su $I_0$. Tada

$$\beta = \frac{g\sin\alpha}{R}.$$

Jei cilindras vienalytis, $$\beta = \frac{2g\sin\alpha}{3R}.$$

Jei cilindras – plonasienis vamzdis, $$\beta = \frac{g\sin\alpha}{2R}.$$

c) Trinties jėgą galime apskaičiuoti, pvz., iš trečiosios trijų lygčių sistemos lygties [a) dalis]:

$$F_{\text{tr}} = \frac{I_0\beta}{R} = \frac{I_0 mg\sin\alpha}{R^2\left(\frac{I_0}{R^2}+m\right)} = \frac{I_0 mg\sin\alpha}{I_0+mR^2}.$$

Jei $I_0$ labai mažas, $F_{\text{tr}} = \frac{I_0 g\sin\alpha}{R^2}$ .

Jei cilindras vienalytis, $F_{\text{tr}} = \frac{1}{3}mg\sin\alpha$ .

Jei cilindras – plonasienis vamzdis, $F_{\text{tr}} = \frac{1}{2}mg\sin\alpha$ .

d) Pasinaudojame sąryšiu $L = \frac{at^2}{2}$. Čia nuožulniosios plokštumos ilgis $L = \frac{h}{\sin\alpha}$ .

Tada

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a\sin\alpha}} = \sqrt{\frac{2h\left(\frac{I_0}{R^2}+m\right)}{mg\sin^2\alpha}} = \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{2h\left(\frac{I_0}{R^2}+m\right)}{mg}}.$$

Jei $I_0 \approx 0$, $t = \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{2h}{g}}$ .

Jei cilindras vienalytis, $t = \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{3h}{g}}$.

Jei cilindras – plonasienis vamzdis, $t = \frac{2}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{h}{g}}$.

e)

*1-as būdas*

$$v = \sqrt{2aL} = \sqrt{\frac{2mgh\sin\alpha}{\left(\frac{I_0}{R^2}+m\right)\sin\alpha}} = \sqrt{\frac{2mgh}{\left(\frac{I_0}{R^2}+m\right)}} .$$

Jei $I_0 \approx 0$, $v = \sqrt{2gh}$ .

Jei cilindras vienalytis, $v = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$ .

Jei cilindras – plonasienis vamzdis, $v = \sqrt{gh}$ .

*2-as būdas*

Pasinaudojame energijos tvermės dėsniu. Pradiniame viršutiniame taške cilindras turi potencinės energijos $E_{\text{p}} = mgh$. Apačioje ši potencinė energija (visa, nes kaip minėta,

trintis darbo neatlieka) virsta kinetine cilindro energija. Ją galime taip pat dvejopai skaičiuoti.
Galime tarti, kad ši kinetinė energija susideda iš cilindro masės centro judėjimo kinetinės energijos ir cilindro sukimosi apie savo simetrijos ašį energijos, t.y.
$E_{\text{kin}} = \dfrac{mv^2}{2} + \dfrac{I_0\omega^2}{2}$. Pasinaudoję tuo, kad $v = \omega R$, ir tuo, kad $E_{\text{p}} = E_{\text{kin}}$, gauname tą patį $v$ atsakymą, t.y. $v = \sqrt{\dfrac{2mgh}{\left(\dfrac{I_0}{R^2} + m\right)}}$.

Taip pat galime manyti, kad cilindras riedėdamas jau horizontaliąja plokštuma (be praslydimo) sukasi apie momentinę ašį, esančią cilindro ir plokštumos lietimosi linijoje. Tuomet kinetinė cilindro energija lygi
$E_{\text{kin}} = \dfrac{I_C\omega^2}{2} = \dfrac{(I_0 + mR^2)v^2}{2R^2}$. Toliau sulyginę šią energiją su potencine energija, gautume tą patį $v$ atsakymą .

f) Cilindrui riedant, veikianti trinities jėga neturi viršyti didžiausios galimos slydimo trinities jėgos, kuri nusakoma kaip $F_{\text{sl max}} = \mu mg\cos\alpha$ . Tuo būdu,
$F_{\text{tr}} \le F_{\text{sl max}}$, arba
$\dfrac{I_0 mg\sin\alpha}{I_0 + mR^2} \le \mu mg\cos\alpha$ . Iš čia
$\mu \ge \dfrac{I_0\sin\alpha}{\cos\alpha(I_0 + mR^2)}$ .

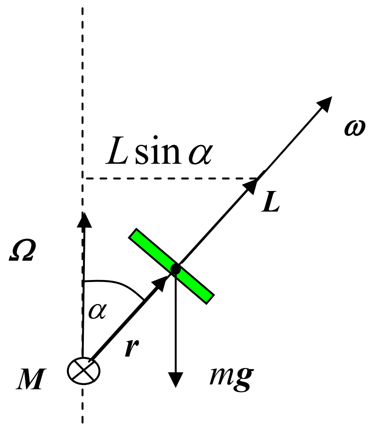
Jei $I_0$ labai mažas, $\mu \ge \dfrac{I_0}{mR^2}tg\alpha$ .

Jei cilindras vienalytis, $\mu \ge \dfrac{tg\alpha}{3}$ .

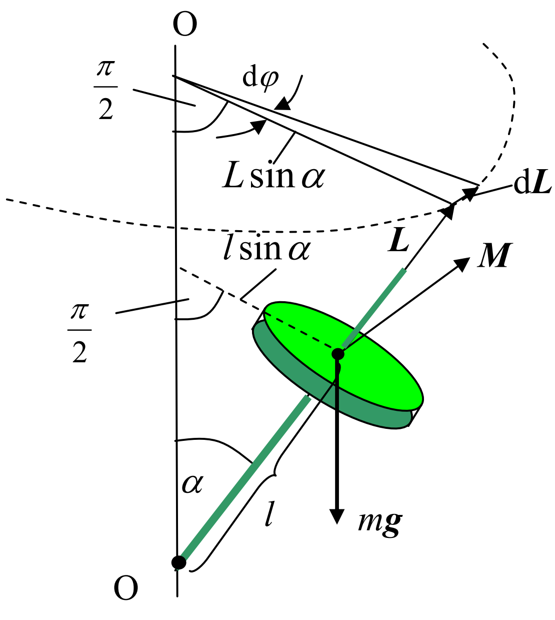
Jei cilindras – plonasienis vamzdis, $\mu \ge \dfrac{tg\alpha}{2}$ .

# Giroskopas

Giroskopas (vilkelis) – tai masyvus simetriškas kūnas, kuris dideliu greičiu sukasi apie savo simetrijos ašį.




$$\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{r}, m\boldsymbol{g}]$$



Pagrindinė sukamojo judėjimo lygtis

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}$$

Vadinasi, $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ yra lygiagretus $\boldsymbol{M}$. Iš brėžinio matyti, kad $\boldsymbol{M} \perp \boldsymbol{L}$, vadinasi ir $\mathrm{d}\boldsymbol{L} \perp \boldsymbol{L}$. Tai ir verčia giroskopą suktis apie ašį OO tam tikru precesijos dažniu (cikliniu) Ω. Raskime šį dažnį (precesijos kampinį greitį).
Perrašome pagrindinę sukamojo judėjimo lygtį moduliams:

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = mgl\sin\alpha$$

Iš brėžinio

$$\Omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}.$$

Bet $\mathrm{d}\varphi = \frac{\mathrm{d}L}{L\sin\alpha}$. Tada

$$\Omega = \frac{1}{L\sin\alpha}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{mgl\sin\alpha}{L\sin\alpha} = \frac{mgl}{L}.$$

Taigi giroskopo precesijos kampinis greitis lygus

$$\Omega = \frac{mgl}{I\omega}$$

Pažymėtina, kad precesijos kampinis greitis nepriklauso nuo palinkimo kampo, o jo vertė didėja, kai mažėja paties giroskopo kampinis greitis $\omega$.