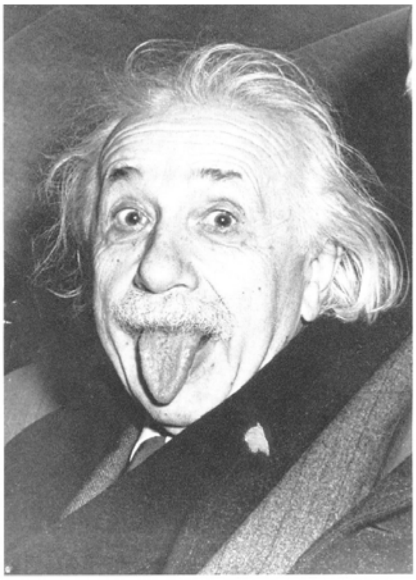
Fizikos Olimpas
Paskaita #1

1. Klasikinė ir modernioji fizika
2. Modeliai, teorijos, dėsniai, eksperimentas
3. Matematinis aparatas
4. Vektoriai
5. Matavimo vienetai. Dimensijų analizė
6. Tikslumas



Klasikinė ir modernioji fizika

Pirmieji moksliniai vaizdiniai atsirado, matyt, labai seniai, kiek apie tai galima spręsti iš rašytinių šaltinių. Tačiau fizikai kaip mokslui iš esmės pagrindus padėjo Galileo Galilėjus (1564-1642) bei Izaokas Niutonas (1643-1727). Mokslinio pažinimo požiūriu tai buvo revoliucija. Didelių laimėjimų yra pasiekusi ir kinetinė (dujų) teorija. Tris šimtmečius besivystantis fizikos mokslas kulminaciją pasiekė 19 a, kuomet buvo sukurta elektromagnetinė šviesos teorija. Šį fizikos etapą įprasta charakterizuoti kaip klasikinę fiziką. Klasikinės fizikos pasiekimai išties buvo stulbinantys. 19-20 amžių sankirtoje atrodė, kad fizinis pasaulis visiškai suprastas. Pavyzdžiui, tokio požiūrio laikėsi ir žinomas anglų fizikas Viljamas Tomsonas (Thomson) (lordas Kelvinas) (1824-1907), vienok jis genialiai įžiūrėjo šiaip jau giedrame klasikinės fizikos danguje du tamsius debesėlius, būtent fiasko, bandant sukurti teoriją ir paaiškinti absoliučiai juodo kūno spinduliuotę ir prieštaravimus dėl hipotetinės bangų aplinkos – eterio – elgesio. Iš tikrųjų vėliau 20 amžiuje šie debesėliai davė dvi pagrindines XX amžiaus fizikos teorijas – kvantinę mechaniką ir reliatyvumo teoriją. Kvantų idėja priklauso Maksui Plankui (1858-1947), kuris 1900 m. sugebėjo būtent įvesdamas energijos porcijas – kvantus – paaiškinti absoliučiai juodo kūno spinduliuotę.
Eterio hipotezės prieštaravimus išaiškino Albertas Einšteinas (1879-1955), susiedamas erdvę ir laiką.
1897 m. buvo atrastas elektronas, kuris įeina į visų elementų sudėtį. Elektrono atradėju laikomas Džozefas Džonas Tomsonas (Thomson) (1856-1940). Tuo būdu buvo pradėta skverbtis į atominę medžiagų sandarą.
Kur yra tos „klasikinės fizikos“ ribos? Egzistuoja *dvi ekstremalios situacijos* – „dideli“ greičiai ir „maži“ matmenys.
Dideliais greičiais laikysime tokius, kurie pradeda darytis palyginami su šviesos greičiu $(c = 3{,}00 \cdot 10^8\,\mathbf{m/s})$. Iš tikrųjų reliatyvumo teorijoje Lorenco transformacijose figūruoja daugiklis $\sqrt{1-\beta^2} = \sqrt{1-v^2/c^2}$, kur v – tiriamojo objekto greitis. Akivaizdu, kad dažniausiai mūsų kasdienėje aplinkoje $v \ll c$, ir tas daugiklis dideliu tikslumu artimas vienetui. Tuomet puikiausiai galioja Niutono (klasikinė) mechanika.

Reliatyvumo pasireiškimo pavyzdys.

Viena iš subatominių elementariųjų dalelių yra miuonas, turintis tokį pat kaip elektronas krūvį, bet apie 200 kartų didesnę masę. Miuonai atsiranda viršutiniuose Žemės atmosferos sluoksniuose, kuomet kosminiai spinduliai (daugiausia protonai), atsklidę iš kosmoso, susiduria su oro dujų molekulėmis. Miuonai pasiekia Žemę, turėdami artimą šviesai greitį (tipiškai apie 0,998c). Vienok miuonai yra nestabilūs ir skyla į kitas daleles. Vidutinė miuonų gyvavimo trukmė yra išmatuota laboratorijos sąlygomis jiems esant rimtyje ir sudaro $2{,}20 \cdot 10^{-6}\,\mathbf{s}$. Per šį laiką miuonas įveiktų atstumą

$d = vt_0 = 0{,}998c \cdot 2{,}20 \cdot 10^{-6} = 0{,}998 \cdot 3{,}00 \cdot 10^{8}\,\mathbf{m/s} \cdot 2{,}20 \cdot 10^{-6}\,\mathbf{s} = 659\mathbf{m}$

Tai tik $0{,}659\mathbf{km}$, o miuonai atsiranda 10-15 km aukštyje. Tačiau jie registruojami Žemės paviršiuje. Kaip tai paaiškinti?

Priežastis ta, kad laikas Žemės atskaitos sistemoje slenka greičiau, negu judančioje atskaitos sistemoje (surištoje su miuonu). Taigi laiko tarpas miuono sistemoje t_0 Žemėje tampa ilgesniu, o daugiklis ir yra būtent $1/\sqrt{1-v^2/c^2} = 15{,}8$. Vadinasi, miuonas Žemės atžvilgiu per savo gyvavimo trukmę gali įveikti kur kas didesnį atstumą

$$d = vt = \frac{vt_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = 10{,}4\mathbf{km}.$$

Skverbiantis į mikropasaulį (čia gal geriau tiktų terminas „nanopasaulis“) atsirado daug eksperimentinių faktų, kurie vėlgi prieštaravo klasikinės mechanikos išvadoms. Nuo kada prasideda šis mažasis „kitoks“ pasaulis? Pasirodo, kad tai sistemos, kurių matmenys mažesni nei šimtai angstremų ($1\,\mathring{\mathbf{A}} = 10^{-10}\,\mathbf{m}$). Keli šio keistojo mikropasaulio savybių pavyzdžiai.

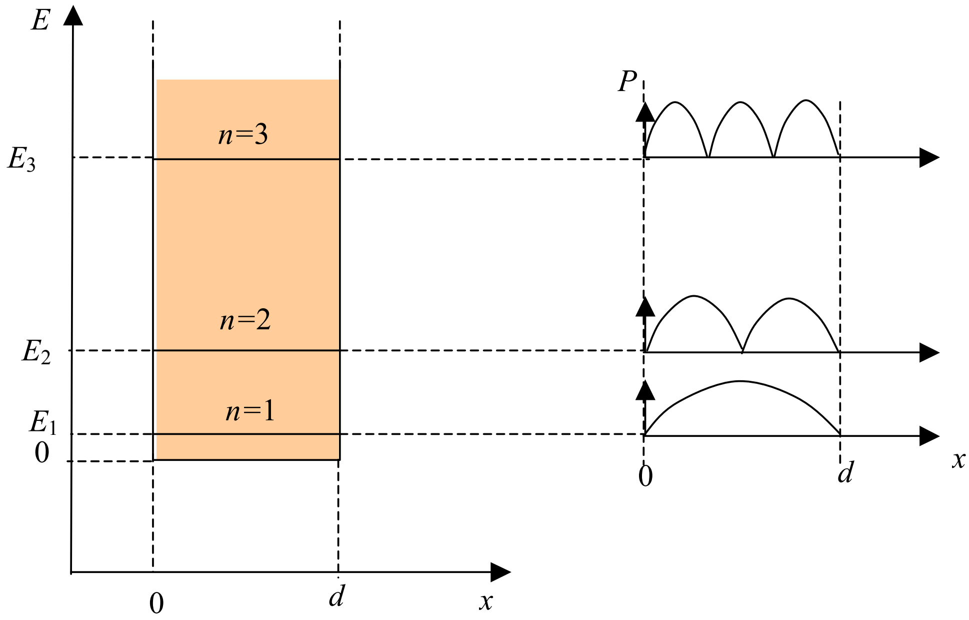
Dalelė potencinėje duobėje su be galo aukštomis sienelėmis

Tai analizuojama ir klasikinėje mechanikoje, ir jei dalelė neturi pakankamai energijos „išsiropšti“ iš duobės, ji ten ir „makaluojasi“. Tai lyg ir ne perdaug įdomi situacija. O kaip yra kvantiniame mikropasaulyje?

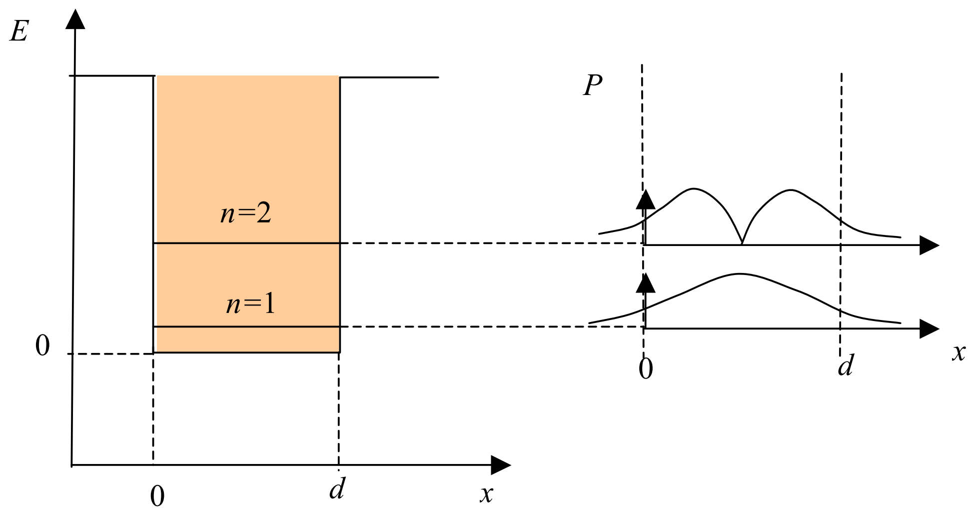
Kvantinėje duobėje energija kvantuojama, t.y. dalelė gali užimti ne bet kokios energijos būseną, bet tik tam tikrą, atitinkančią n sveiką skaičių.

$$\boxed{E_n = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 \propto \frac{n^2}{d^2}}$$

Atrodytų, kad situacija visiškai kita, lyginant su klasikiniu atveju. Bet iš tikrųjų galma parodyti, kad didesniems duobės pločiams d uždavinys darosi klasikiniu. *Parodykite tai.*

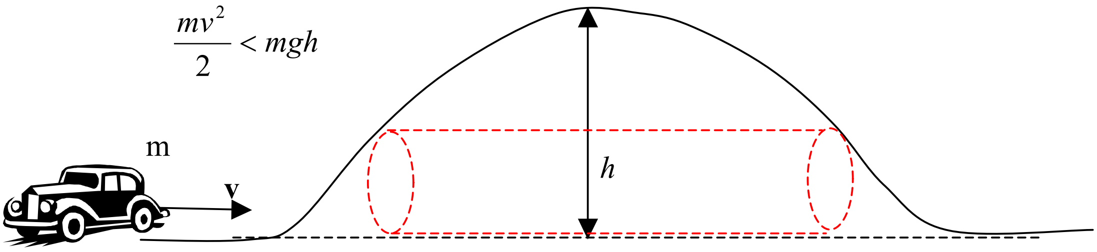


Dalelė potencinėje duobėje su baigtinio aukščio sienelėmis

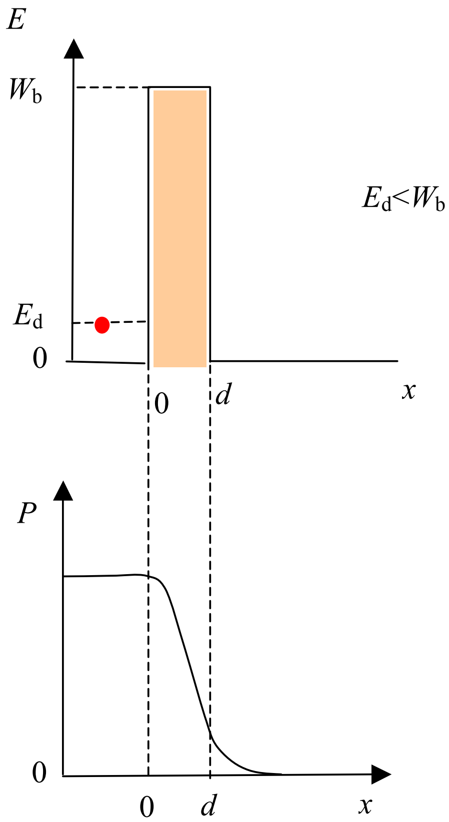


Tunelinis efektas

Klasikinis atvejis



Kvantinės sistemos atvejis



Modeliai, teorijos, dėsniai, eksperimentas

Siekdami suprasti ir paaiškinti kai kurių reiškinių grupes, mokslininkai dažnai pasinaudoja **modeliais.** Tai tam tikras mintinis reiškinio vaizdas, paremtas jau žinomomis sąvokomis ir leidžiantis sukurti dažnai labai naudingą analogiją. Kaip pavyzdys galėtų būti planetinis vandenilio atomo modelis arba banginis šviesos modelis. Pastaruoju atveju mes tiesiogiai nestebime tokių bangų kaip vandens paviršiuje, vienok toks vaizdas gali paaiškinti daugelį eksperimentų su šviesa, kuri demonstruoja panašumą su vandens paviršiaus bangomis.
Modelis leidžia atlikti tam tikras mintines manipuliacijas, kurių tiesiogiai negalėtume realizuoti. Dažnai tai leidžia giliau suprasti reiškinio esmę, o kartais ir numatyti įdomius iki tol nestebėtus reiškinius.
Joks modelis nėra visiškai tikslus, o tikslinant eksperimentinius faktus gali net duoti klaidingus rezultatus. Pavyzdžiui, jau minėtas planetinis vandenilio atomo modelis vėliau buvo daugelį kartų tikslinamas ir tobulinamas, nes radosi eksperimentų, kurių ankstesnis modelis niekaip negalėjo paaiškinti.
Kiek panašios savo paskirtimi ir taikymu **teorijos**, bet jos, nors kartais ir atrodo bei vartojamos kaip modelių sinonimai, yra kur kas platesnės ir labiau apibendrinančios. Pasinaudojant teorija dažnai uždaviniai sprendžiami gana dideliu matematiniu tikslumu, jos tinka daugeliui reiškinių klasių. Kaip pavyzdys galėtų būti banginė šviesos teorija.
Fizikoje dažnai naudojame ir **dėsnio** sąvoką. Tai trumpi, bet pakankamai bendri teiginiai (pvz., teiginys apie energijos tvermę, judesio kiekio tvermę). Kartais šie teiginiai įgauna formalizuotą pavidalą, rišantį kai kuriuos fizikiniu dydžius. Pavyzdžiui, žinome Niutono visuotinės traukos dėsnį, kurį apibūdina formulė $\mathbf{F} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\mathbf{r}_0$. Tam, kad teiginys galėtų būti vadinamas dėsniu, būtinas jo eksperimentinis patvirtinimas daugelio reiškinių grupėje. Tai labai apibendrinantis teiginys. Pažymėtina, kad rusų ir anglų kalba „dėsnis“ ir „įstatymas“ apibūdinami vienu žodžiu („zakon“ ir „law“).
Fizika iš esmės yra eksperimentinis mokslas, kuris ir remiasi eksperimentais bei bandymais, ir kuriamos teorijos bei modeliai tikrinami praktikoje. Vienok tiek teorijos, tiek dėsniai negali būti patikrinti begalę kartų, todėl negalime būti tikri, kad bet kuris dėsnis ar teorija absoliuičiai teisingi.
Paprastai mokslininkai savo praktinėje veikloje vadovaujasi visuotinai priimtinais dėsniais, tačiau visuomet būtina atminti, kad nauji bandymai gali pakeisti bet kutio dėsnio ar teorijos ribas. Galutinis teisėjas būna „jo didenybė eksperimentas“.

Nedidelės, bet patogios matematinio aparato gudrybės

Fizikams būtina pakankamai gerai įvaldyti matematinį aparatą, kuris tampa nepakeičiamu pagalbininku, analizuojant daugelį fizikos reiškinių. Vidurinėje mokykloje daugeliui teko susipažinti su matematikos taikymu fizikoje ir pajusti jos jėgą. Iš tikrųjų matematikos galimybių fizikojoe yra žymiai daugiau. Šiame kurse nebus ypatingai gilinamasi į specialius matematinius metodus, bet atkreipsime dėmesį į kelis su matematika susijusius dalykus.

Sinusų teorema

Trikampyje kraštinių ir prieš jas esančių kampų sinusų santykiai yra vienodi ir lygūs apie trikampį apibrėžto apskritimo skersmeniui, t.y.

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R \qquad (1\text{-}24)$$

Kosinusų teorema

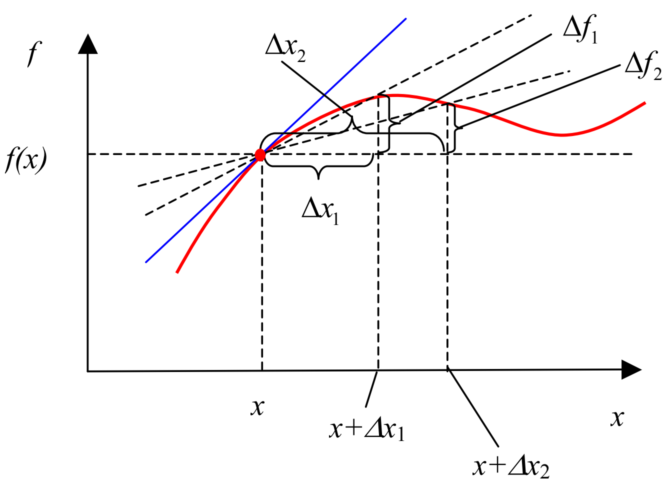
Bet kurios trikampio kraštinės kvadratas yra lygus kitų dviejų kraštinių kvadratų sumai, minus jų dvigubai sandaugai, padaugintai iš kosinuso kampo tarp jų:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2+c^2-2bc\cos\alpha \\ b^2 &= a^2+c^2-2ac\cos\beta \\ c^2 &= a^2+b^2-2ab\cos\gamma \end{aligned} \qquad (1\text{-}25)$$

Išvestinės (diferencijavimas)

Išvestinės arba diferencijavimo sąvoka atsirado būtent analizuojant kūnų judėjimą. Papraščiausiu atveju greitis – tai kelio išvestinė pagal laiką, pagreitis – tai greičio išvestinė pagal laiką. Išvestinė žymima keliais būdais, pvz., $f_x^{'}$, $\frac{df}{dx}$, o kinematikos uždaviniuose išvestinė pagal laiką žymima tašku, t.y. $\dot{x}$ arba $\dot{v}$. Formalus funkcijos išvestinės apibrėžimas – tai funkcijos pokyčio ribos santykio su kintamojo pokyčiu, šiam artėjant į nulį, riba, t.y.

$$\boxed{f_x^{'}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}} \qquad (1\text{-}1)$$



Formali matematinė funkcijois išvestinės prasmė – tai liestinės duotame taške tangentas. Tą nesunku pastebėti pateiktame brėžinyje.

Išvestinės plačiai taikomos fizikoje. Pvz., turėdami analitinę kokio nors fizikinio dydžio išraišką, galime nesunkiai rasti ekstremumų taškus (priklausomybės minimumą ar maksimumą). Šiame taške $f_x^{'} = 0$ (liestinės tangentas čia lygus nuliui).

Išvestinių savybės

Sudėtinės funkcijos išvestinė

Jei funkcija $u = g(x)$ taške $x = x_0$ turi išvestinę $g'(x_0)$ ir funkcija $y = f(u)$ taške $u_0 = g(x_0)$ turi išvestinę $y' = f'(u_0)$, tai ir sudėtinė funkcija $y = f(g(x))$ turi išvestinę, lygią

$$f'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Pvz., $y = \sin 3x$. Tuomet $y' = \cos 3x \cdot (3x)' = 3\cos 3x$.

Atvirkštinės funkcijos išvestinė

Jei funkcija $y = f(x)$ turi atvirkštinę funkciją $x = g(y)$, kurios išvestinė $g'(x)$ nelygi nuliui, tai funkcija $y = f(x)$ turi išvestinę, lygią

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)}$$

Funkcijų sumos išvestinė

Jei funkcijos u ir v turi išvestines taške x, tai jų suma tame taške turi išvestinę, lygią išvestinių sumai:

$$(u + v)' = u' + v'.$$

Funkcijų sandaugos išvestinė

Jei funkcijos u ir v turi išvestines taške x_0, tai jų sandauga tame taške turi išvestinę, randamą pagal formulę

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'$$

Pastovų dauginamąjį galima iškelti prieš išvestinės ženklą

$$(cf(x))' = cf'(x)$$

Funkcijų dalmens išvestinė

Jei funkcijos u ir v turi išvestines taške x ir $v(x) \neq 0$, tai jų dalmuo $\frac{u}{v}$ tame taške turi išvestinę, randamą pagal formulę

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Aukštesnių eilių išvestinės

Funkcijos $f(x)$ išvestinės $f'(x)$ išvestinė $(f'(x))' = f''(x)$ vadinama funkcijos antrosios eilės išvestine (arba antrąja išvestine).
Analogiškai

$f'''(x) = (f''(x))'$ - trečiosios eilės išvestinė.

$f^{IV}(x) = (f'''(x))'$ - ketvirtosios eilės išvestinė ir t.t.

Elementariųjų funkcijų išvestinės

1. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ a) $(c)' = 0$ b) $(x)' = 1$ c) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ d) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ 2. $(a^x)' = a^x \ln a$ a) $(e^x)' = e^x$ 3. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ a) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ 4. $(\sin x)' = \cos x$ 5. $(\cos x)' = -\sin x$	6. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ 7. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ 8. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 9. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 10. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$ 11. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Analizuojant įvairiausius fizikos uždavinius, labai praverčia funkcijos apytikris skaičiavimas. Čia patogu naudotis funkcijos skleidimu argumento laipsniais taip vadinama Teiloro-Mkloreno eilute. Funkciją taške 0 galima išskleisti begaline eilute:

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{'}(0)}{1!}x + \frac{f^{''}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{'''}(0)}{3!}x^3 + ...$$

Čia vienas, du, trys ir t.t. būkšneliai reiškia atitinkamai pirmojo, antrojo, trečiojo ir t.t. laipsnio išvestines. Jei x<<1, galima apsiriboti tik nariu su x.
Čia pastebėsime, kad bendru atveju gali prireikti skleisti ne taške 0, bet, pvz., taške x_0, be to, argumentas dažniausiai būna tam tikras fizikinis dydis, turintis dimensiją. Atlikus nesudėtingą kintamųjų pakeitimą, visuomet galima pereiti prie bedimensinio argumento ir taško 0.

Pvz., taško „0“ aplinkoje, kai x<<1:

$$\exp(\pm x) \approx 1 \pm x\,;$$
$$\frac{1}{1 \pm x} \approx 1 \mp x\,;$$
$$\sin x \approx x$$
$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$
$$\sqrt{1 \pm x} \approx 1 \pm \frac{x}{2}$$
$$\ln(1 \mp x) \approx \pm x$$
$$\frac{1}{\sqrt{1 \pm x}} \approx 1 \mp \frac{x}{2} \qquad \text{ir t.t.}$$

Fizikinis pavyzdėlis:

$E = mc^2 = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}c^2$. Jei v<<c, tai $\dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x}} \approx 1 + \dfrac{x}{2} = 1 + \dfrac{v^2}{2c^2}$. Tada kūno, kurio greitis v, energija, atmetus rimties energiją m_0c^2, lygi:

$E_{kin} = E - E_0 = \dfrac{m_0 v^2}{2}$. Tai klasikinė kinetinės energijos formulė.

Naudojama ir dalinė išvestinė, jei funkcija yra kelių kintamųjų. Iš esmės tai yra ta pati vieno kintamojo išvestinė, tik tuomet kiti kintamieji laikomi konstantomis. Žymima:
Jei pagal x, tai $f_x^{'}(x, y, z...)$; jei pagal y, tai $f_y^{'}(x, y, z...)$, arba $\dfrac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}$ ir $\dfrac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}$.

Dažnai fizikai naudoja diferencialo sąvoką. Apskritai diferencialas – tai kiek norima mažas dydis. Dažnai tą neapibrėžtai mažą dydį galima „paversti“ mažu baigtini pokyčiu.

Jau minėta, kad $f_x^{'} \equiv \dfrac{df}{dx}$. Taigi $df = f_x^{'}dx$, o nedideliems pokyčiams $\Delta f \approx f_x^{'}\Delta x$.

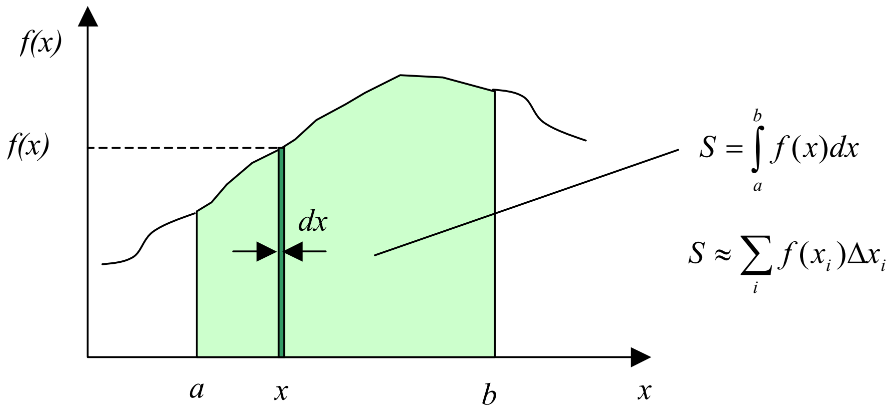
Pastebėsime, kad išraiškoje $\dfrac{df}{dx}$ jokiu būdu negalima „*d*“ suprastinti.

Integravimas

Dar vienas labai patogus matematinės analizės metodas – integravimas. Tai atvirkščias diferencijavimui veiksmas. Savo fizikine prasme ši procedūra reiškia tikslų kintančių dydžių sumavimą:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N} f_i(x)\Delta x_i \ . \qquad (1\text{-}2)$$

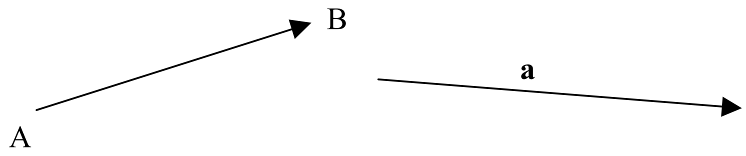
Čia N – intervalo nuo a iki b sudalinimų skaičius. Geometriškai integralas reiškia plotą, ribojamą funkcijos *f(x)* ir ašies *x.*



Vektoriai

Fizikoje yra operuojama tam tikrais fizikiniais dydžiais, kurie beveik visada charakterizuojami tam tikra skaitine verte (ir matavimo vienetu). Tačiau yra dydžių, kuriuos papildomai reikia nusakyti ir kryptimi erdvėje. Dydžiai, kurie charakterizuojami tik verte, vadinami skaliarais (skaliariniais dydžiais), o dydžiai, kurie be skaitinės vertės nusakomi ir kryptimi, vadinami vektoriais (vektoriniais dydžiais). Be to, pastariesiems reikalaujama, kad jie būtų sudedami pagal lygiagretainio taisyklę.
Skaliarinių dydžių pavyzdžiai: laikas, masė, energija, temperatūra, entropija.
Vektorinių dydžių pavyzdžiai: greitis, poslinkis, pagreitis, jėga, kampinis greitis (pseudovektorius), elektrinis ir magnetinis laukai, impulsas (judesio kiekis).

Erdvėje vektorių galima apibūdinti kaip postūmį, kuris tašką A perveda į tašką B trumpiausiu keliu. Tai kryptinė atkarpa, kurios nurodyta pradžia ir pabaiga. Vektorių žymėjimai gali būti gana įvairūs. Pvz., $\overrightarrow{AB}$, **a** (pariebintas šriftas), $\vec{a}$.

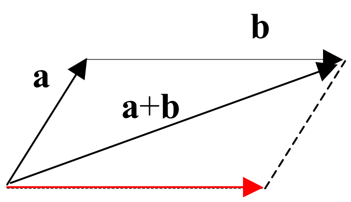


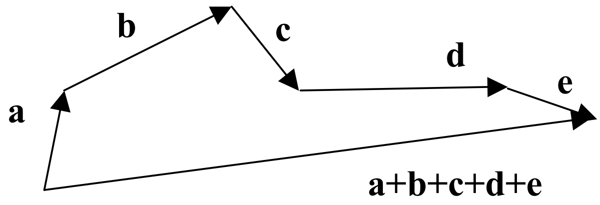
Vektoriaus $\overrightarrow{AB}$ ilgiu arba **moduliu** vadinamas atkarpos AB ilgis ir žymimas $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Vektorius, kurio pradžia ir galas sutampa, vadinamas **nuliniu vektoriumi** ir žymimas $\vec{0}$. Nulinio vektoriaus modulis lygus 0.
Vektorius, kurio ilgis lygus vienetui, vadinamas **vienetiniu** vektoriumi. Tai bedimensinis vienetas.
Vektoriai, kurių kryptys sutampa arba yra priešingų krypčių, vadinami **kolineariais**. Gali būti žymimi kaip $\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b}$ arba $\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{b}$. Nulinis vektorius kolinearus bet kuriam vektoriui.
Vektoriai vadinami **priešingaisiais**, jei jų moduliai lygūs, o kryptys priešingos. Jie žymimi kaip $\mathbf{a}$ ir $-\mathbf{a}$.
Vektoriai yra lygūs, jei jų moduliai lygūs, o kryptys sutampa, t.y. $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, jei $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ ir $\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b}$.
Vektoriai, kurie yra lygiagretūs vienai plokštumai, vadinami **komplanariniais**.

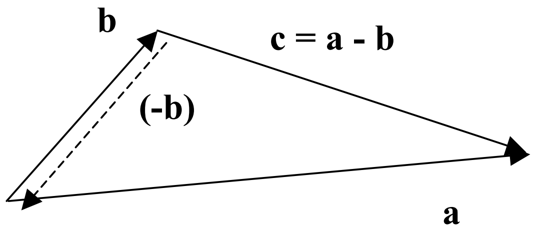
Veiksmai su vektoriais

Norint **sudėti** du vektorius, reikia prie pirmojo vektoriaus galo pridėti antrojo vektoriaus pradžią ir sujungti pirmojo vektoriaus pradžią su antrojo vektoriaus galu. Du nekolinearius vektorius galima sudėti ir pagal lygiagretainio taisyklę.





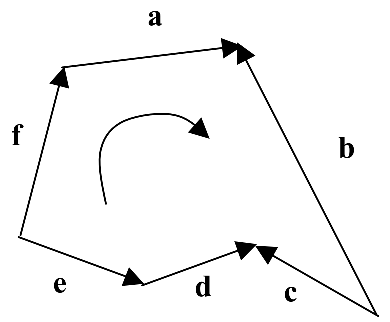
Norint iš vektoriaus **a** **atimti** vektorių **b**, reikia abu vektorius atidėti iš vieno taško ir vektoriaus **b** **galą sujungti su vektoriaus a** galu. Vektorius atimti galima naudojantis priešingu vektoriumi ir lygiagretainio taisykle.



Dauginant vektorių **a** iš skaičiaus *k* (skaliaro), gaunamas vektorius *k***a**, kurio modulis lygus $k|\mathbf{a}|$ ir vektorių **a** ir *k***a** kryptys sutampa, jei $k > 0$, ir yra priešingos, jei $k < 0$.

Vektorių, sudarančių **uždarą laužtinę**, algebrinė suma (pagal pasirinktą apėjimo kryptį) **lygi nuliui**.

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{d} - \mathbf{e} + \mathbf{f} = 0$$



Veiksmų su vektoriais dėsniai

1. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ - perstatymo (komutatyvumo) vektorių atžvilgiu dėsnis.
2. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ - jungimo (asociatyvumo) vektorių atžvilgiu dėsnis.
3. $\mathbf{a} + 0 = \mathbf{a}$ - nulinio vektoriaus egzistavimas.
4. $(k \cdot l)\mathbf{a} = k(l\mathbf{a})$ - jungimo (asociatyvumo) skaliarinių daugiklių atžvilgiu dėsnis.
5. $k\mathbf{a} = \mathbf{a}k$ - perstatymo (komutatyvumo) skaliarinio daugiklio ir vektoriaus atžvilgiu dėsnis
6. $(k + l)\mathbf{a} = k\mathbf{a} + l\mathbf{a}$ - skirstymo (distributyvumo) skaliarų sumos atžvilgiu dėsnis
7. $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$ - skirstymo (distributyvumo) vektorių sumos atžvilgiu dėsnis

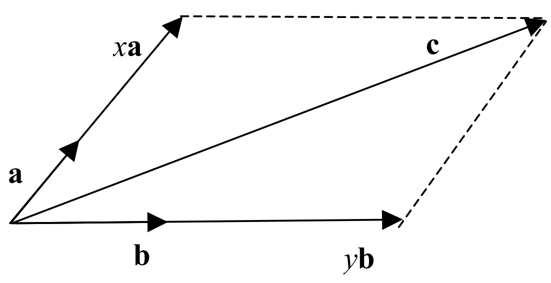
Kad du nenuliniai vektoriai **a** ir **b** būtų **kolinearūs**, būtina ir pakanka, jog egzistuotų toks skaičius $k \neq 0$, kad galiotų

$$\mathbf{b} = k\mathbf{a}$$

Jei vektoriai **a** ir **b** **nekolinearūs**, tai bet kurį nenulinį vektorių **c**, komplanarų vektoriams **a** ir **b**, vieninteliu būdu galima išreikšti kaip

$$\mathbf{c} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} \quad ,$$

kur nors vienas iš x ir y nelygus nuliui.



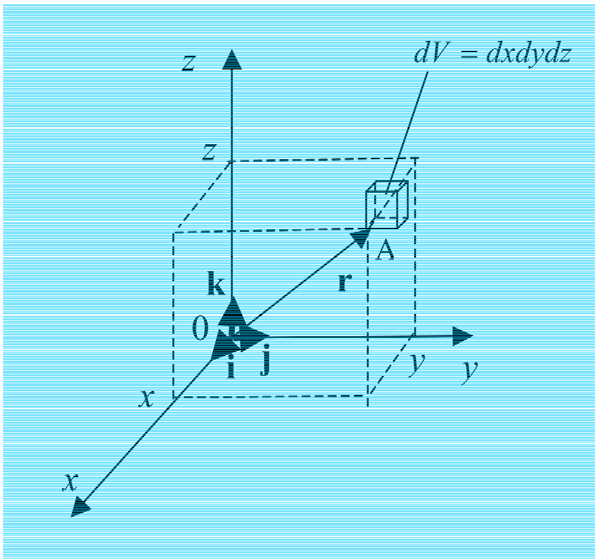
Kiekvieną nenulinį vektorių **d** galima išreikšti trijų nenulinių **nekomplanarių vektorių a, b** ir **c** suma:

$$\mathbf{d} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c} \ ,$$

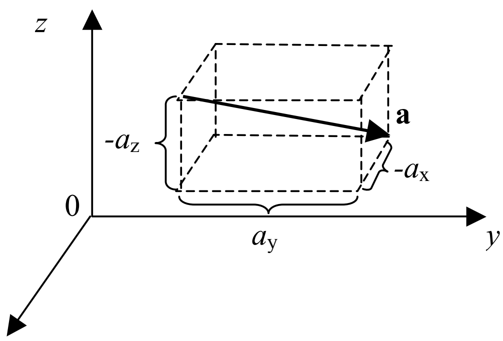
kur nors vienas iš x, y ir z nelygus nuliui.

Vektorių projekcijos. Koordinačių sistemos

Dažniausiai naudojama stačiakampė Dekarto koordinačių sistema:
Nepriklausomi kintamieji: x,y,z. Nubraižytos pusašės x, y ir z kryptimis.



$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \qquad (1\text{-}3)$$



Čia panaudoti trys ortai **i, j** ir **k**. **Ortas** (arba **koordinatinis vektorius**) – tai vienetinis vektorius, kurio kryptis sutampa su teigiamosios koordinačių pusašės kryptimi.
Erdvėje būtini trys ortai, plokštumoje – du.

Kiekvieną vektorių $\overrightarrow{OA}$, kurio pradžia yra koordinačių pradžioje, o galas taške A, galima išreikšti kaip

$$\overrightarrow{OA} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} \ \text{ erdvėje ir}$$

$$\overrightarrow{OA} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} \ \text{ plokštumoje.}$$

Skaičiai a_x, a_y ir a_z vadinami vektoriaus $\overrightarrow{OA}$ **stačiakampėmis koordinatėmis** ir žymimos $\overrightarrow{OA}(a_x; a_y; a_z)$, arba $\overrightarrow{OA}\{a_x; a_y; a_z\}$, arba kartais net $\overrightarrow{OA} = (a_x; a_y; a_z)$.
Plokštumoje nėra z-koordinatės.

Vektoriaus $\overrightarrow{AB}$, **jungiančio taškus** $A(x_1; y_1; z_1)$ ir $B(x_2; y_2; z_2)$ **koordinatės** yra

$$\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1) \ . \qquad (1\text{-}4)$$

Dviejų vektorių $\mathbf{a}(a_x;a_y;a_z)$ ir $\mathbf{b}(b_x;b_y;b_z)$ **sumos** ir **skirtumo** kaip vektoriaus koordinatės yra atitinkamai lygios jų koordinačių **sumai** ir **skirtumui**:

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\{a_x+b_x;a_y+b_y;a_z+b_z\} \qquad (1\text{-}5)$$

ir

$$(\mathbf{a}-\mathbf{b})\{a_x-b_x;a_y-b_y;a_z-b_z\} \qquad (1\text{-}6)$$

Vektorių $\mathbf{a}(a_x;a_y;a_z)$ **dauginant** iš skaičiaus *k*, reikia **padauginti** visas jo koordinates iš *k*:

$$k\mathbf{a}(ka_x;ka_y;ka_z) \qquad (1\text{-}7)$$

Vektoriaus $\mathbf{a}(a_x;a_y;a_z)$ modulis lygus

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\ . \qquad (1\text{-}8)$$

Du vektoriai $\mathbf{a}(a_x;a_y;a_z)$ ir $\mathbf{b}(b_x;b_y;b_z)$ **kolinearūs**, jei koordinatės proporcingos:

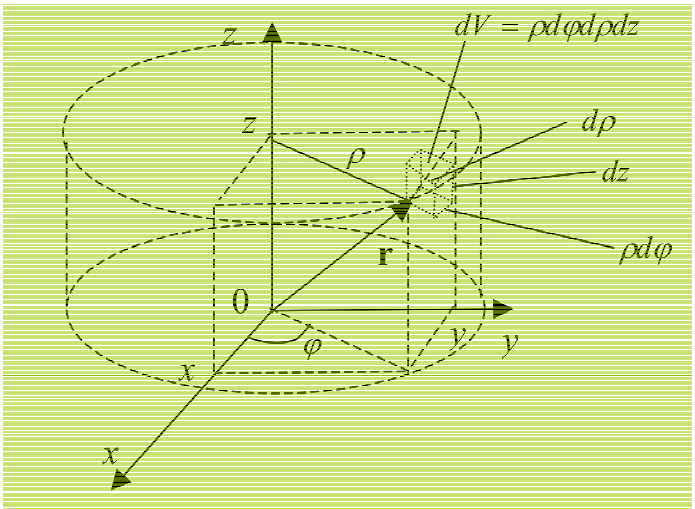
$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}=k \qquad (1\text{-}9)$$

Pravartu žinoti ir atkarpos *AB*, kur $A(x_1;y_1;z_1)$ ir $B(x_2;y_2;z_2)$, vidurio **taško koordinates,** kurios lygios

$$x_{vid}=\frac{x_1+x_2}{2};\ y_{vid}=\frac{y_1+y_2}{2};\ z_{vid}=\frac{z_1+z_2}{2}\ . \qquad (1\text{-}10)$$

Cilindrinė (ritininė) koordinačių sistema

Nepriklausomi kintamieji: ρ,φ,z



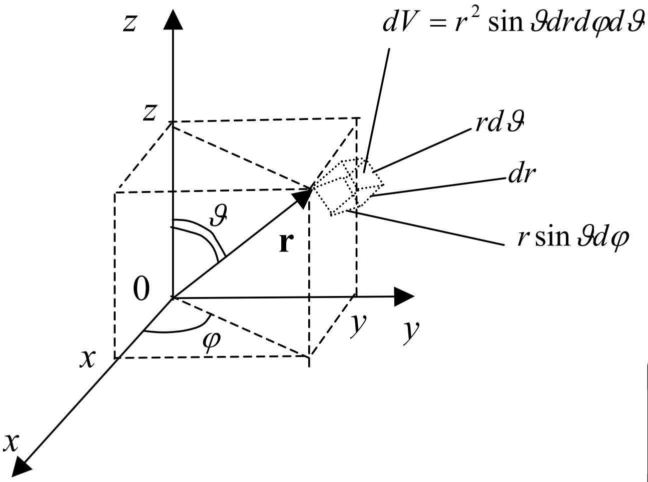
$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ z=z \end{cases} \qquad (1\text{-}11)$$

$$\begin{cases} \rho=\sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi=arctg\dfrac{y}{x} \\ z=z \end{cases} \qquad (1\text{-}12)$$

Dažnai veiksmas vyksta plokštumoje, todėl *z* būna fiksuotas. Tada turime *polinę* koordinačių sistemą su dviem kintamaisiais ρ ir φ.

Sferinė koordinačių sistema

Nepriklausomi kintamieji: r, φ, ϑ



$$\begin{cases} x = r\sin\vartheta\cos\varphi \\ y = r\sin\vartheta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \quad (1\text{-}13)$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \varphi = arctg\dfrac{y}{x} \\ \theta = arctg\dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \end{cases} \quad (1\text{-}14)$$

Vektorių skaliarinė sandauga

Dviejų vektorių **a** ir **b** skaliarinė sandauga apibrėžiama kaip skaliarinis dydis, lygus

$$(\mathbf{ab}) = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\hat{\mathbf{ab}}) \qquad (1\text{-}15)$$

Čia $(\hat{\mathbf{ab}})$ - kampas tarp **a** ir **b.**

Jei duoti vektoriai $\mathbf{a}(a_x; a_y; a_z)$ ir $\mathbf{b}(b_x; b_y; b_z)$, tai

$$(\mathbf{ab}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \qquad (1\text{-}16)$$

Iš tikrųjų, $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$. Tuomet pasinaudodami skaliarinės sandaugos apibrėžimu

$$\begin{aligned} &(a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k})(b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}) = \\ &= a_x b_x(\mathbf{ii}) + a_x b_y(\mathbf{ij}) + a_x b_z(\mathbf{ik}) + \\ &+ a_y b_x(\mathbf{ji}) + a_y b_y(\mathbf{jj}) + a_y b_z(\mathbf{jk}) + \\ &+ a_z b_x(\mathbf{ki}) + a_z b_y(\mathbf{kj}) + a_z b_z(\mathbf{kk}) = \\ &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \end{aligned}$$

Čia atsižvelgta kad **i,j** ir **k** – statmeni vienas kitam vienetiniai vektoriai.

Skaliarinė sandauga praverčia, kai reikia apskaičiuoti kampą tarp vektorių. Tuomet

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \qquad (1\text{-}17)$$

Iš čia išplaukia dviejų vektorių statmenumo ($\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$) sąlyga:
$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$

Vektorių vektorinė sandauga

Dviejų vektorių **a** ir **b** vektorinė sandauga apibrėžiama kaip vektorius **c**, lygus

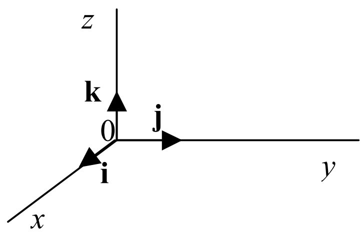
$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} \equiv [\mathbf{ab}] = \mathbf{c}. \qquad (1\text{-}18)$$

Čia vektoriaus **c** modulis $c = ab\sin(\widehat{\mathbf{ab}})$, o kryptis nusakoma **dešiniojo sraigto** taisykle: **a** sukama link **b** trumpiausiu keliu (mažiausio kampo kryptimi). Jei tai būtų dešiniojo sraigto galvutės sukimosi kryptis, tai sraigto judėjimo kryptis duotų vektoriaus **c** kryptį.
Vektorius **c** visuomet statmenas plokštumai, kurioje guli vektoriai **a** ir **b**.
Galimi ir kiti būdai, nusakantys vektoriaus **c** kryptį.
Nesunkiai galima įsitikinti, kad $[\mathbf{ab}] = -[\mathbf{ba}]$

Remiantis vektorinės sandaugos apibrėžimu, nesunku įsitikinti, kad vienetiniųš vektoriųš vektorinės sandaugos yra tokios:

$$[\mathbf{ii}] = [\mathbf{jj}] = [\mathbf{kk}] = 0, \qquad (1\text{-}19)$$

$$\begin{cases} [\mathbf{jk}] = \mathbf{i} = -[\mathbf{kj}] \\ [\mathbf{ki}] = \mathbf{j} = -[\mathbf{ik}] \\ [\mathbf{ij}] = \mathbf{k} = -[\mathbf{ji}] \end{cases} \qquad (1\text{-}20)$$



Galime išreikšti vektorių $\mathbf{a}(a_x;a_y;a_z)$ ir $\mathbf{b}(b_x;b_y;b_z)$ vektorinę sandaugą per tų vektorių prokjekcijas:

$$[\mathbf{ab}] = [(a_x;a_y;a_z)(b_x;b_y;b_z)] = a_x b_x[\mathbf{ii}] + a_y b_y[\mathbf{jj}] + a_z b_z[\mathbf{kk}] +$$
$$+ a_x b_y[\mathbf{ij}] + a_x b_z[\mathbf{ik}] + a_y b_x[\mathbf{ji}] + a_y b_z[\mathbf{jk}] + a_z b_x[\mathbf{ki}] + a_z b_y[\mathbf{kj}].$$

Atsižvelgę į (1-19) ir (1-20) gauname, kad

$$[\mathbf{ab}] = (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{k} \qquad (1\text{-}21)$$

Patogu vektoių $\mathbf{c}$ išreikšti ir determinanto forma:

$$\mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \qquad (1\text{-}22)$$

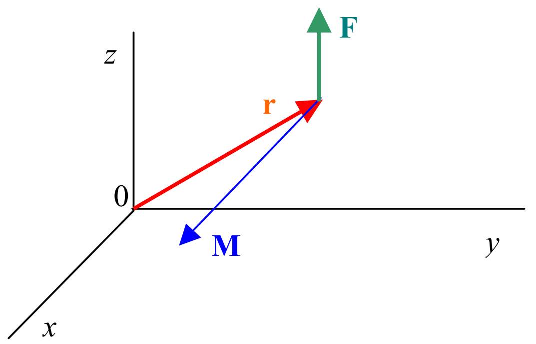
Išskleidus gautume tą pačią išraišką

$$\mathbf{c} = (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{k}.$$

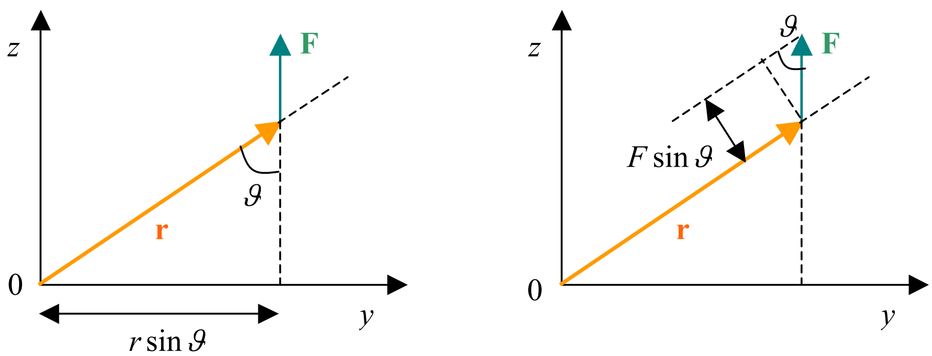
Dekarto koordinačių sistema būtinai turi būti dešininė, t. y. $\mathbf{k} = [\mathbf{ij}]$.

Fizikos kursuose vektorinė sandauga dažnai sutinkama. Pvz., jau žinomas jėgos momentas, kuris vidurinės mokyklos kurse nebuvo pabrėžtinai apibūdinamas kaip vektorius. Vienok tai vektorinis dydis (tiksliau – pseudovektorius), turintis kryptį. Nesunku įsitikinti, kad

$$\mathbf{M} = [\mathbf{rF}] \qquad (1\text{-}23)$$



Radiusas-vektorius, jėgos vektorius ir jėgos momento vektorius. $\mathbf{M}$ vektorius yra lygiagretus x-ašiai, o vektoriai $\mathbf{F}$ ir $\mathbf{r}$ yra yOz plokštumoje.



Čia parodyta, kaip galima interpretuoti $\mathbf{M} = [\mathbf{rF}]$ modulį $M = rF\sin\vartheta$.