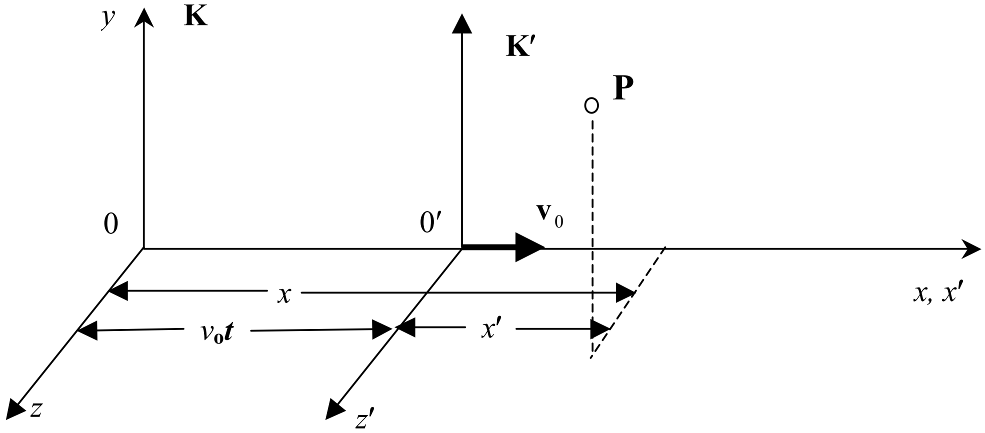
Paskaita #2

Galilėjaus reliatyvumas

Panagrinėkime dvi sistemas, judančias viena kitos atžvilgiu pastoviu greičiu $\mathbf{v}_0$.
Tarkime, kad sistema **K** yra nejudama, tada sistema **K′** judės tolyginiu tiesiaeigiu judesiui **K** sistemos atžvilgiu. Tegul **K′** juda išilgai *x*-ašies. Kitos ašys *y* ir *z* bei *y*‘ ir *z*‘ sutampa.



Tardami, kad abiejose sistemose laikai vienodi, t.y. $t = t'$, taškui **P**, kurio koordinatės sistemoje **K** x, y, z, o sistemoje **K′** x', y', z', gauname lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x = x' + v_0 t' \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases} \tag{2-1}$$

Tai Galilėjaus transformacijos.

Išdiferencijavę sistemą, gauname ryšį taško **P** greičiams abiejose sistemose:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{x}' + v_0 \\ \dot{y} = \dot{y}' \\ \dot{z} = \dot{z}' \end{cases} \quad \text{arba} \quad \begin{cases} v_x = v'_x + v_0 \\ v_y = v'_y \\ v_z = v'_z \end{cases} \tag{2-2}$$

Bendru atveju

$$\boxed{\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0} \tag{2-3}$$

Priminsime, kad mus dominantys greičiai yra labia maži, lyginant su šviesos greičiu $c = 3 \cdot 10^8\,\mathbf{m/s}$. Jei greičiai artimi *c*, Galilėjaus reliatyvumas nebetinka ir tueime taikyti specialiosios reliatyvumo teorijos formules. Vienok mūsų kurso objektas – klasikinė fizika.

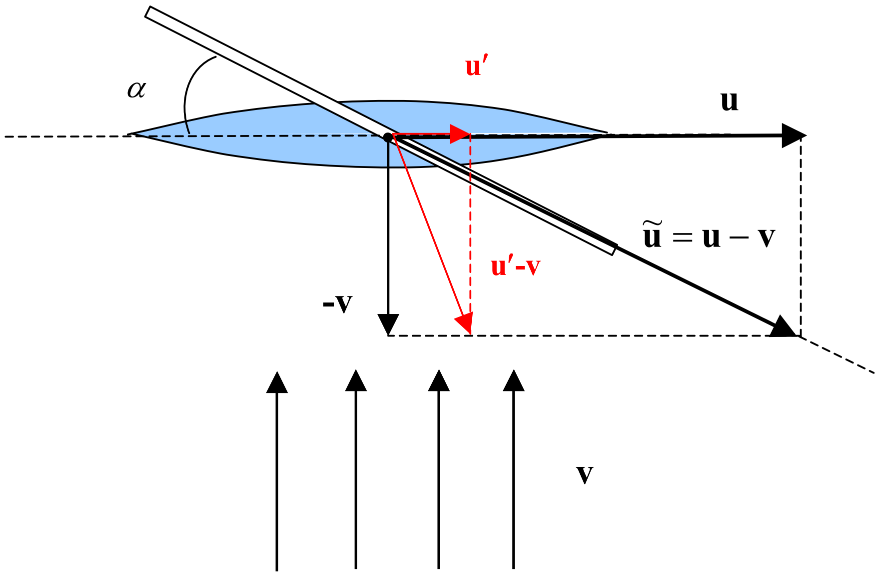
Pavyzdys 1

Burlentės burė sudaro kampą $\alpha = 30°$ su korpuso judėjimo kryptimi. Kokį maksimalų greitį gali pasiekti tokia burlente plaukiantis sportininkas, pučiant šoniniam statmenos judėjimui krypties greičio v vėjui?

$$u_{\max} = ?\left|\begin{array}{l}\alpha = 30° \\ v \\ \mathbf{v} \perp \mathbf{u}\end{array}\right.$$

Sprendimas

$$\boxed{\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0} \qquad \begin{cases}\mathbf{v} & - \quad \mathbf{u} \\ \mathbf{v}' & - \quad \tilde{\mathbf{u}} \\ \mathbf{v}_0 & - \quad \mathbf{v}\end{cases}$$

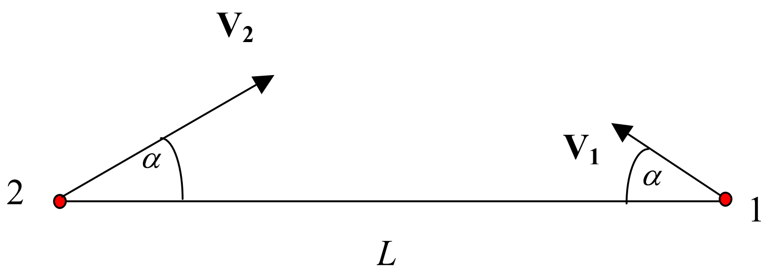


Patogu perkelti koordinačių sistemą, nejudamai surištą su judančiu oru. Tuomet burlentė šioje sistemoje juda greičiu $\tilde{\mathbf{u}} = -\mathbf{v} + \mathbf{u}$. Kol burlentės greitis **u** nedidelis (pvz., u′<u brėžinyje), burlentė oro atžvilgiu judės taip, kad oras spaus burę ir burlentė, veikiama šio spaudimo, greitės. Kuomet vektorius **u-v** bus nukreiptas išilgai burės, burlentė judės maksimaliu greičiu (jei tik greitis u taptų didesnis, burlentė būtų stabdoma, jei tik u sumažėtų, burlentė būtų greitinama). Iš brėžinio randame, kad

$$tg\alpha = \frac{v}{u_{\max}}, \text{ iš kur } u_{\max} = \frac{v}{tg\alpha} = v\sqrt{3}\,.$$

Pavyzdys 2

Dvi dalelės, tarp kurių atstumas $L = 10{,}0\,\mathbf{m}$, turi greičius $v_1 = 1{,}0\,\mathbf{m/s}$ ir $v_2 = 2{,}0\,\mathbf{m/s}$. Jų vektoriai sudaro vienodus kampus $\alpha = 30°$ su tiesės atkarpa, jungiančia daleles (žr. brėž.). Rasti minimalų atstumą, iki kurio dalelės priartėja viena prie kitos.

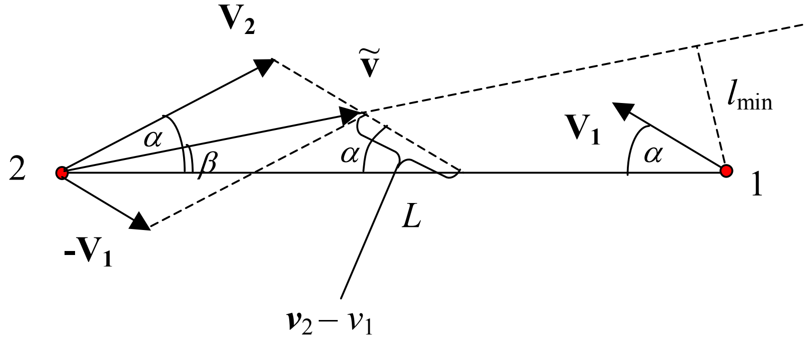


$$l_{\min} = ?\left|\begin{array}{l} L = 10{,}0\,\mathbf{m} \\ v_1 = 1{,}0\,\mathbf{m/s} \\ v_2 = 2{,}0\,\mathbf{m/s} \\ \alpha = 30° \end{array}\right.$$

Sprendinas

Persikelkime į sistemą,nejudamai surištą su pirmąja dalele ir panagrinėkime antrosios dalelės judėjimą šioje sistemoje.

$$\boxed{\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0} \qquad \begin{cases} \mathbf{v} & - \quad \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}' & - \quad \tilde{\mathbf{v}} \\ \mathbf{v}_0 & - \quad \mathbf{v}_1 \end{cases}$$



Šioje sistemoje pirmoji dalelė stovi, o antroji jos atžvilgiu juda greičiu $\tilde{\mathbf{v}}$. Tuomet minimalus atstumas tarp dalelių bus pirmosios dalelės nuotolis iki $\tilde{\mathbf{v}}$ tęsinio (žr. brėž.)

$$l_{\min} = L\sin\beta$$

Iš sinusų teoremos

$$\frac{\tilde{v}}{\sin\alpha} = \frac{v_2 - v_1}{\sin\beta} .$$

Iš kosinusų teoremos

$$\tilde{v} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos(180^\circ - 2\alpha)} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2\cos 2\alpha} .$$

Tuomet

$$l_{\min} = L\frac{v_2 - v_1}{\tilde{v}}\sin\alpha = \frac{L(v_2 - v_1)\sin\alpha}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2\cos 2\alpha}} =$$

$$= \frac{10{,}0\cdot 1\cdot 1/2}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1/2}} = \frac{5}{\sqrt{7}} \approx 1{,}89\,\mathbf{m}$$

Matavimo vienetai. Dimensijų analizė

Fizikiniai dydžiai matuojami tam tikrais vienetais, kurie turi būti visuotinai pripažinti, kad galima būtų visiems fizikams (ir ne tik) susikalbėti. Istoriškai taip susiklostė, kad įvairiose šalyse ir įvairiais istoriniais etapais buvo taikomi įvairūs vienetai. Šiuo metu visuotinai priimta **SI** vienetų sistema, kurios pagrindą sudaro

s (laikas sekundėmis)
m (ilgis metrais)
kg (masė kilogramais)
A (srovės stipris amperais)
molis (medžiagos kiekis moliais)
T (temperatūra Kelvino laipsniais)
cd (šviesos stipris žvakėmis)
Šie dydžiai apibūdinami tam tikrais etalonais.

Kiti dydžiai – išvestiniai. Pvz., jėga **SI** sistemoje matuojama niutonais: $1\mathbf{N} = 1\frac{\mathbf{kgm}}{\mathbf{s}^2}$.

Naudojami ir kiti vienetai. Pvz., bangos ilgis gali būti matuojamas:
metrais, mikronais, nanometrais, angstremais, centimetrais, be to, šviesą galima vienareikšmiai apibūdinti ir kvanto energija džauliais, elektronvoltais, arba atvirkštiniais centimetrais ir kt.

Nors **SI** sistena ir visuotinai priimta, kai kuriose šalyse populiarūs ir kiti vienetai. Pvz., anglosaksų kraštuose dominuoja svarai, coliai, pėdos, jardai, mylios ir kt. Pvz., slėgio

manometruose dažnai naudojamas vienetas PSI (arba P.S.I.). Tai „pounds per square inche“ (lb/in.^{2}). Uždavinys - rasti ryšį tarp PSI vieneto ir **SI** slėgio vieneto Pa (paskalio).
1in. = 2.540 cm
1 lb = 0,453592 kg

$$1PSI = \frac{0{,}453592\,\mathbf{kg}\cdot 9{,}81\,\mathbf{m/s}^2}{0{,}02540^2\,\mathbf{m}^2} \approx 6{,}90\cdot 10^3\,\mathbf{Pa}$$

Dimensijų analizė labai praverčia, kai reikia geitai iš principo patikrinti, ar uždavinio sprendime nepadaryta klaida. Suprantama, kad skaičiuojamas ilgis ar atsumas turi būti matuojamas, pvz., metrais ar kilometrais, laikas – sekundėmis, valandomis ar atitinkamais laiko vienetais ir t.t. Toks patikrinimas tuojau pat nustato, kad galėjo būti padaryta „žiopla“ klaida. Kartais dimensijų analizė gali praversti, kai nesate tikri, ar formulėje nesupainiojote skaitiklio su vardikliu. Pvz., gerai neprisimenate, kuri matematinės svyruoklės periodo formulė teisinga, $T = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l}}$, ar $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Įrašę (arba tai atlikę mintinai) atitinkamų dydžių matavimo vienetus (patartina vienoje sistemoje, pvz., SI), gauname, kad pirmu atveju $[T] = \sqrt{\frac{\mathbf{m/s}^2}{\mathbf{m}}} = \mathbf{s}^{-1}$, o antu atveju $[T] = \mathbf{s}$. Akivaizdu, kad teisinga antroji formulė.

Kartais kokybiškai nagrinėjant reiškinį ar uždavinį būna patogu naudotis dimensijų analize.

Pavyzdys

Masės m kūnas, esantis spyruoklės gale, svyruoja apie pusiausvyros padėtį amplitude x. Pasinaudodami dimensijų analize, nustatykite galimą svyravimo periodo priklausomybę nuo m, x ir spyruoklės standumo koeficiento k (jis apibrėžiamas iš lygties $F = -kx$, kur F – jėga, kuria spyruoklė stengiasi grąžinti sistemą į pusiausvyros padėtį, jai nukrypus nuo pusiausvyros dydžiu x).

$$T \propto ?\left|\begin{array}{l} m \\ x \\ k \end{array}\right.$$

Sprendimas

$$[T] = \mathbf{s}$$
$$[m] = \mathbf{kg}$$
$$[x] = \mathbf{m}$$
$$[k] = \left[\frac{F}{x}\right] = \frac{\mathbf{N}}{\mathbf{m}} = \frac{\mathbf{kg}}{\mathbf{s}^2}$$

Tegul $T \propto m^{\alpha} x^{\beta} k^{\gamma}$.
Sulyginę vienetus abiejose lygbės pusėse randame:

$$s^1 = \mathbf{kg}^{\alpha} \mathbf{m}^{\beta} (\mathbf{kg}/\mathbf{s}^2)^{\gamma}.$$

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ 1 = -2\gamma \end{cases}$$

Iš čia $\gamma = -1/2$, $\alpha = 1/2$, arba

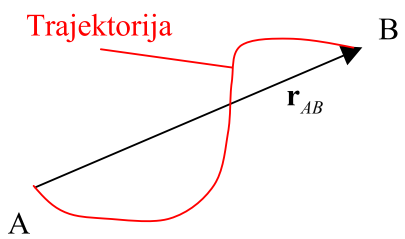
$$T \propto \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Būtina pastebėti, kad šia dimensijų analize negalima pasitikėti absoliučiai. Ji negali rasti tikslios formulės, jei figūruoja bedimensiniai koeficientai. Taigi, toliau būtina pasinaudoti gilesne fizikine reiškinio analize.

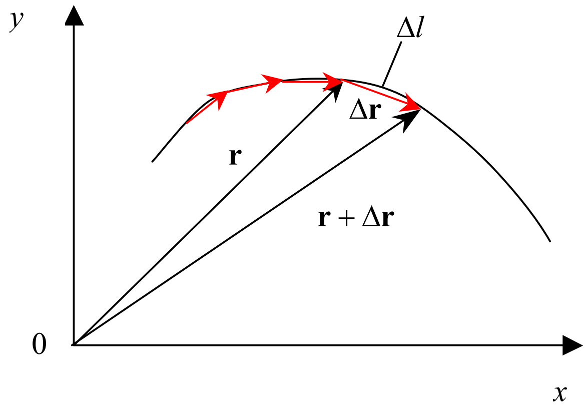
Paanalizuosime kai kuriuos **kinematikos** aspektus.

Greitis

Judėdamas materialusis taškas nubrėžia tam tikrą liniją. Ji vadinama *trajektorija*. Tai grynai klasikinės fizikos terminas, nes apskritai galioja Heizenbergo neapibrėžtumas: $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar$. Jis tampa svarbus, kai turime reikalą su labai mažais (kvantiniais) objektais.
Pagal trajektorijos formą skiriamas tiesiaeigis judėjimas, judėjimas apskritimu, kreivaeigis ir pan.
Jei materialusis taškas iš taško A pasislenka į tašką B, tai **poslinkiu** vadinamas vektoriuis $\mathbf{r}_{AB}$, jungiantis A ir B:



Taškui patenkant iš A į B galimos įvairiausios trajektorijos, tuo tarpu poslinkis tas pats. Dažnai vartojamas terminas „nueitas kelias“ *l*. Jis traktuojamas kaip skaliaras (modulis) ir dažnai jį vartoti patogu, ypač kai poslinkis sutampa su nueitu keliu. Nueito kelio ir poslinkio skirtumai išryškėja, suskaidžius trajektoriją į labai mažus intervlėlius:



Akivaizdu, kad dalelei persikeliant iš A į B

$\sum_i \Delta l_i \geq \left|\sum_i \mathbf{r}_i\right| = \left|\mathbf{r}_{AB}\right|$ arba riboje, kai sudalijimų skaičius artėja į begalybę

$$\int_A^B dl \geq \left|\int_A^B d\mathbf{r}\right| = \left|\mathbf{r}_{AB}\right|. \qquad (2\text{-}4)$$

Kasdieniame gyvenime greičiu apibūdinamas kelias, kurį įveikia dalelė (kūnas) per laiko vienetą, t.y. $v = \frac{ds}{dt}$. Fizikoje apibrėžimas griežtesnis (nors kartais gali būti tinkamas ir šis mėgėjiškas apibrįžimas). Fizikoje greitis – tai vektorinis dydis. Greitis – tai radiuso-vektoriaus išvestinė pagal laiką. Beje, anglų kalba yra net du skirtingi terminai: „speed“ – tai nueitas kelias per laiko vienetą, o „velocity“ – tai greitis kaip vektorius – radiuso-vektoriaus išvestinė pagal laiką.

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \qquad (2\text{-}5)$$

Nykstamai mažas poslinkis $d\mathbf{r}$ sutampa su trajektorijos elementu, todėl greitis kaip vektorius kryptimi sutampa su trajektorijos liestine duotame taške. Įvedus liestinės kryptimi vienetinį vektorių $\boldsymbol{\tau}$, galime užrašyti

$$\mathbf{v} = v\,\boldsymbol{\tau} \qquad (2\text{-}6)$$

Stačiakampėje Dekarto koordinačių sistemoje

$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, todėl (2-7)

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \qquad (2\text{-}8)$$

Galima samprotauti ir kitaip:

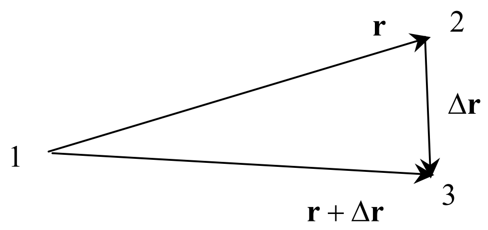
$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \text{ čia } \Delta \mathbf{r} \text{ - poslinkis.} \quad (2\text{-}9)$$

Iš $\mathbf{v}$ galima rasti ir modulį:

$$v = |\mathbf{v}| = \left| \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t}. \quad (2\text{-}10)$$

Čia būtina pabrėžti, kad bendru atveju vietoje Δr negalima rašyti $|\Delta \mathbf{r}|$, nes $|\Delta \mathbf{r}| \neq \Delta |\mathbf{r}| = \Delta r$.

Pavyzdėlis



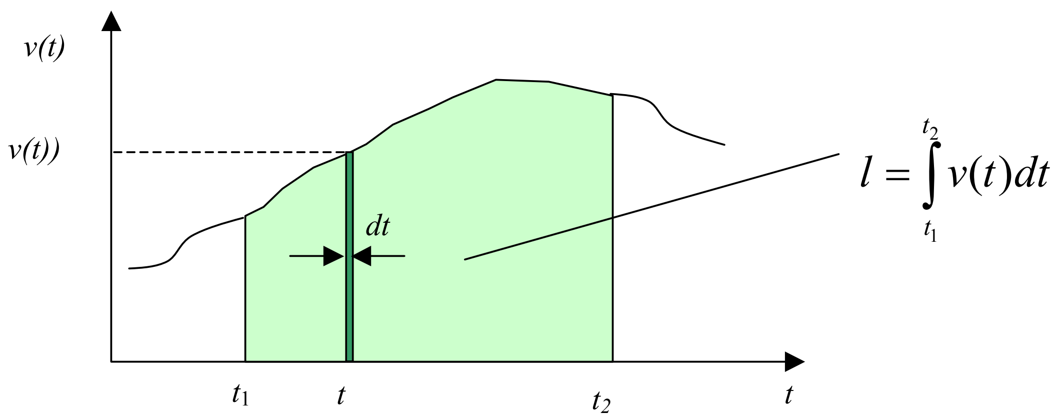
Dažnai svarbu suskaičiuoti nueitą kelią.

$$l = \sum_i \Delta l_i \approx \sum_i v_{i_i} \Delta t_i$$

Riboje

$$l = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt. \quad (2\text{-}11)$$

Prisiminę apibrėžtinio integralo geometrinę prasmę, plotą po kreive *v(t)* galime interpretuoti kaip įveiktą kelią.



Jei norime apskaičiuoti pilnutinį poslinkį, imame greitį kaip vektorių:

$$\mathbf{r}_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v}(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} d\mathbf{r} \qquad (2\text{-}12)$$

Vidutinio greičio laiko tarpu tarp t_1 ir t_2 apibrėžimas:

$$\langle v \rangle = \frac{l}{t_2 - t_1} \text{ arba} \qquad (2\text{-}13)$$

$$\langle v \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt\,. \qquad (2\text{-}14)$$

Vektoriniams dydžiams skaičiuojame panašiai:

$$\langle \mathbf{v} \rangle == \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v}(t)dt = \frac{\mathbf{r}_{12}}{t_2 - t_1}\,. \qquad (2\text{-}15)$$

Apskritai bet kokio dydžio $y(x)$ vidurkis intervale nuo x_1 iki x_2 skaičiuojamas kaip

$$\boxed{\langle y \rangle = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} y(x)dx\,.} \qquad (2\text{-}16)$$

Pagreitis

Nagrinėdami tiesiaeigį judėjimą (arba nueitą kelią), pagreitį suprantame kaip momentinę greičio modulio pokyčio per laiko vienetą vertę, t.y.

$$a = \frac{dv}{dt} \qquad (2\text{-}17)$$

Bendru atveju pagreitis – tai momentinis greičio kaip vektoriaus pokytis per laiko vienetą, t.y.

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} \qquad (2\text{-}18)$$

a atžvilgiu **v** vaidina tokį pat vaidmenį, kaip **v** atžvilgu radiusas-vektorius **r**. Stačiakampėje Dekarto koordinačių sistemoje

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} = \dot{v}_x\mathbf{i} + \dot{v}_y\mathbf{j} + \dot{v}_z\mathbf{k} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k} \qquad (2\text{-}19)$$

Imdami $\mathbf{v} = v\,\boldsymbol{\tau}$ raskime **v** išvestinę:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(v\vec{\tau})}{dt} = \dot{v}\vec{\tau} + v\dot{\vec{\tau}} \qquad (2\text{-}20)$$

Matome, kad pagreitis – tai tangentinio ir normalinio pagreičių suma, t.y.

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n \qquad (2\text{-}21)$$

tangentinis pagreitis nukreiptas trajektorijos duotame taške kryptimi ir lygus

$$\mathbf{a}_\tau = \dot{v}\vec{\tau}\,, \qquad (2\text{-}22)$$

o normalinis pagreitis statmenas τ ir lygus

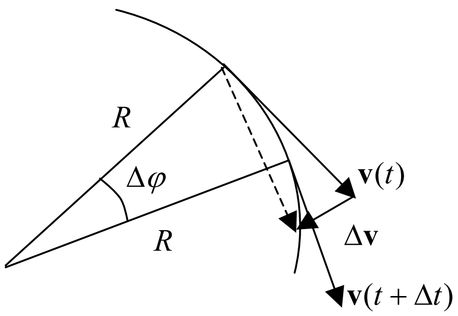
$$\mathbf{a}_n = v\dot{\vec{\tau}} \qquad (2\text{-}23)$$

Tangentinis pagreitis parodo greičio modulio kitimą, o normalinis – greičio kaip vektoriaus krypties kitimą.

Pavyzdys

Mažas kūnas juda apskritimu pastovaus modulio greičiu. Kokiu pagreičiu juda kūnas?

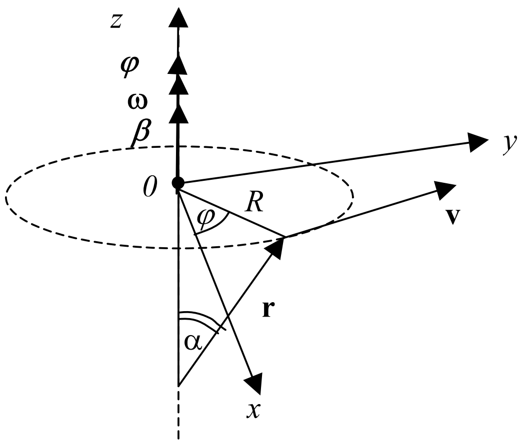
Jei modulis pastovus (laiko atžvilgiu), tai $|\mathbf{v}| = v = Const$, todėl $\dot{v} = 0$. Taigi, tangentinis pagreitis lygus 0.



$|\mathbf{a}_n| = \left|\frac{d\mathbf{v}_\tau}{dt}\right| = \lim\limits_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0}\frac{v\Delta\varphi}{R\Delta\varphi / v}\lim\frac{v\Delta\varphi}{\underset{\Delta t \to 0}{R\Delta\varphi / v}} = \frac{v^2}{R}$. Tai žinoma įcentrinio pagreičio formulė.

Sukamojo judėjimo kinematika

Sukamojo judėjimo atveju materialus taškas juda apskritimu apie tam tikrą ašį erdvėje. Apskritai ta ašis gali laikui bėgant keistis, todėl kalbama apie momentinę ašį ir momentinį apskritimo spindulį. Dažnai tokiu atveju įvedamas trajektorijos kreivumas (dydis, atvirkščias apskritimo spinduliui) su momentiniu to kreivumo centru.
Sukamojo judėjimo atveju naudojamas posūkio kampas φ analogiškai nueitam keliui slenkamajame judėjime. Bendru atveju kampas yra vektorinis dydis $\boldsymbol{\varphi}$, kurio kryptį nusako dešiniojo sraigto taisyklė – jei dešiniojo sraigto galvutė juda kampo didėjimo kryptimi, tai to sraigto slinkimo kryptis rodo vektoriaus $\boldsymbol{\varphi}$ kryptį. Pastebėsime, kad šis vektorius iš tikrųjų yra pseudovektorius, nes nepaklūsta sudėties atveju lygiagretainio taisyklei. Dažniausiai mus domins tik pseudovektorių kryptys, todėl detaliau pseudovektorių savybių nenagrinėsime.



Kampinis greitis apibrėžiamas kaip

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \qquad (2\text{-}24)$$

Tai vektorinis dydis (pseudovektorius). Jei $\boldsymbol{\varphi}$ kryptis nekinta ir φ didėja, $\boldsymbol{\omega}$ kryptis sutampa su $\boldsymbol{\varphi}$ kryptimi.

Kampinis pagreitis apibūdinamas kaip

$$\vec{\beta} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \qquad (2\text{-}25)$$

Tai taip pat vektorius (pseudovektorius), ir jei $\vec{\omega}$ kryptis nekinta ir ω didėja, $\vec{\beta}$ kryptis sutampa su $\vec{\omega}$ kryptimi.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} R \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = R \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = R \frac{d\varphi}{dt} = R\omega,$$

t.y. $v = \omega R$. (2-26)

Bendru atveju

$$\mathbf{v} = [\vec{\omega}\vec{r}] \qquad (2\text{-}27)$$

$$|\mathbf{a}_n| = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R \qquad (2\text{-}28)$$

$$|\mathbf{a}_\tau| = \left|\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}\right| = \left|\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta(\omega R)}{\Delta t}\right| = \left|\lim_{\Delta t \to 0} R \frac{\Delta \omega}{\Delta t}\right| = R\left|\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t}\right| = R\beta$$

$$|\mathbf{a}_\tau| = \beta R \qquad (2\text{-}29)$$

Kai kurios formulės, naudingos sprendžiant kinematikos uždavinius

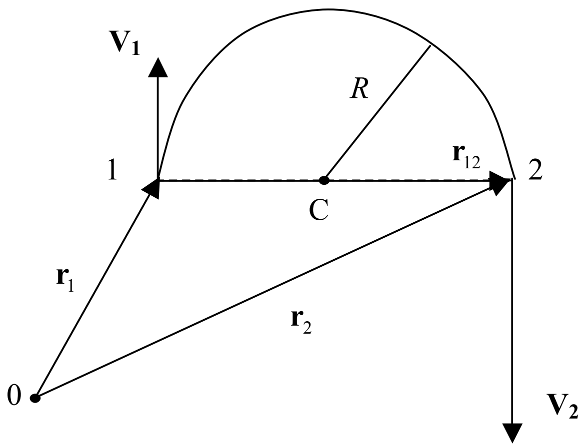
Slenkamasis judėjimas	Sukamasis judėjimas
Tolyginis judėjimas (judėjimas pastoviu greičiu) $s(t) = s_0 + v_o t$	Judėjimas pastoviu kampiniu greičiu $\varphi(t) = \varphi_0 + \omega t$
Tolygiai greitėjantis judėjimas (judėjimas pastoviu linijiniu pagreičiu) $v(t) = v_0 + at$ $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$	Tolygiai greitėjantis sukamasis judėjimas (judėjimas pastoviu kampiniu pagreičiu) $\omega(t) = \omega_0 + \beta t$ $\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\beta t^2}{2}$
Greitėjantis judėjimas (judėjimas kintančiu pagreičiu) $v(t) = v_0 + \int_0^t a(t)dt$ $s(t) = s_0 + \int_0^t v(t)dt$	Greitėjantis sukamasis judėjimas (judėjimas kintančiu kampiniu pagreičiu) $w(t) = w_0 + \int_0^t \beta(t)dt$ $\varphi(t) = \varphi_0 + \int_0^t w(t)dt$

Pavyzdys

Per laiką τ taškas įveikė pusę apskritimo, kurio spindulys R. Rasti per laiką τ:

a) vidutinę greičio modulio reikšmę;
b) vidutinio greičio kaip vektoriaus modulį;
c) vidutinio pagreičio kaip vektoriaus modulį, jei tangentinis pagreitis buvo pastovus.

Sprendimas



a) Vidutinė greičio modulio reikšmė – tai taško nueitas kelias, padalintas iš sugaišto laiko. Nueitas kelias – pusapskritimio ilgis, t.y. πR, o laikas τ. Taigi $\langle v \rangle = \frac{\pi R}{\tau}$.

b) Pagal apibrėžimą $|\langle \mathbf{v} \rangle| = \left| \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\tau} \right| = \frac{|\mathbf{r}_{12}|}{\tau} = \frac{2R}{\tau}$.

c) Pagal vidurkio apibrėžimą

$|\langle \mathbf{a} \rangle| = \left| \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{\tau} \right| = \frac{v_1 + v_2}{\tau}$. Tangentinis pagreitis rodo greičio modulio v kitimą. Jei a_τ pastovus, tai judėjimas trajektorija yra tolygiai greitėjantis. Tuomet $v_2 = v_1 + a_\tau \tau$. Tuomet $v_1 + v_2 = 2v_1 + a_\tau \tau = 2(v_1 + \frac{a_\tau \tau}{2})$. Čia pastebėsime, kad skliaustuose – vidutinė greičio modulio reikšmė. Iš tikrųjų, pagal apibrįžimą $\langle v \rangle = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau v(t)dt = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau (v_1 + a_\tau t)dt = v_1 + \frac{a_\tau \tau}{2}$. Bet iš dalies a) radome, kad $\langle v \rangle = \frac{\pi R}{\tau}$. Tuomet $|\langle \mathbf{a} \rangle| = \frac{v_1 + v_2}{\tau} = \frac{2\pi R}{\tau^2}$