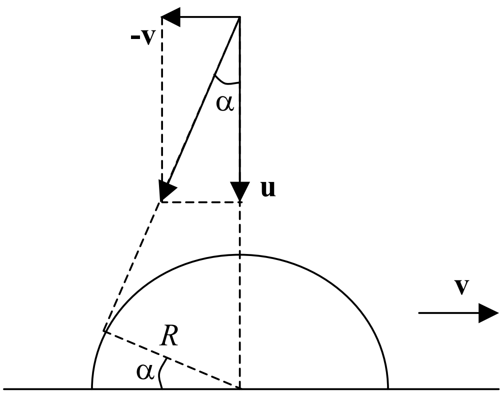
Kinematikos uždaviniai 2007 m.

Katerio viršutinė kabinos dalis turi spindulio R pussferės formą. Kateris juda greičiu v lietui lyjant. Į kokį kupolo paviršių pataiko lietaus lašai, jei šie krinta greičiu u vertikaliai žemyn?

Ats.: $S = 2\pi R^2\left(1 - \dfrac{arctg\dfrac{v}{u}}{\pi}\right)$.

Sprendimas

Persikėlus į sistemą, nejudamai surištą su kateriu, atrodys, kad lietaus lašai krinta kampu α į vertikalę:



Kampą α randame iš greičių:

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{v}{u}$$

Sausos pussferės dalies plotas lygus

$$S_{saus} = \frac{2\pi R^2}{\pi}.$$

Taigi

$$S = 2\pi R^2 - S_{saus} = 2\pi R^2\left(1 - \frac{\tan^{-1}\frac{v}{u}}{\pi}\right).$$

Automobilis iš vieno miesto į kitą trečdalį laiko važiavo greičiu v_0, po to trečdalį likusio kelio greičiu v_1, o paskutinę kelio atkarpą – greičiu v_2. Kokiu vidutiniu greičiu automobilis važiavo iš vieno miesto į kitą?

Ats.: $\bar{v} = \dfrac{s_1 + s_2}{t} = \dfrac{v_0}{3} + \dfrac{2v_1 v_2}{2v_1 + v_2} = \dfrac{2v_0 v_1 + v_0 v_1 + 6v_1 v_2}{3(2v_1 + v_2)}$.

Sprendimas

$$\bar{v} = \frac{s_1 + s_2}{t}.$$

$$s_1 = \frac{v_0 t}{3}.$$

$$\frac{s_2}{3v_1} + \frac{2s_2}{3v_2} = \frac{2}{3}t.$$

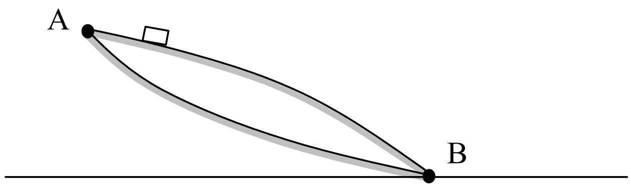
Iš čia

$$s_2 = \frac{2tv_1 v_2}{2v_1 + v_2}.$$

Tada

$$\bar{v} = \frac{s_1 + s_2}{t} = \frac{v_0}{3} + \frac{2v_1 v_2}{2v_1 + v_2} = \frac{2v_0 v_1 + v_0 v_2 + 6v_1 v_2}{3(2v_1 + v_2)}.$$

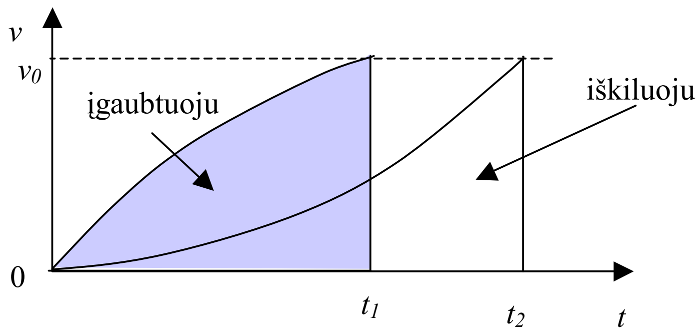
Mažas kūnas iš taško A į tašką B gali judėti dviem kreivais paviršiais, kurių vienas įgaubtas, o kitas – iškilas. Kuriuo paviršiumi judėdamas kūnas papėdę pasieks greičiau?



Ats.: Įgaubtuoju.

Sprendimas

Iš brėžinio aušku, kad kūnas abiem atvejais įveikia tokį pat atstumą, o taške B greitis vienodas. Įgaubtuoju paviršiumi greitis didėja sparčiau, nes sparčiau praranda potencinę energiją. Tuomet greičio grafikai turi atrodyti maždaug taip:



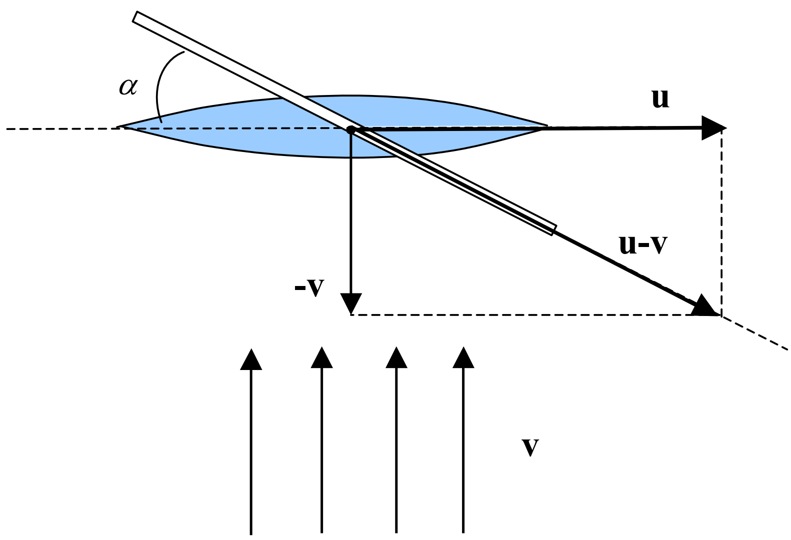
Plotai po kreivėmis lygūs įveiktiems atstumams, kurie, kaip minėta, lygūs. Todėl $t_1 < t_2$, taigi, įgaubtuoju paviršiumu kūnas papėdę pasieks greičiau.

Burlentės burė sudaro kampą $\alpha = 30°$ su korpuso judėjimo kryptimi. Kokį maksimalų greitį gali pasiekti tokia burlente plaukiantis sportininkas, pučiant šoniniam statmenos judėjimui krypties greičio v vėjui?

Ats.: $u_{\max} = \dfrac{v}{tg\alpha} = v\sqrt{3}$.

$$u_{\max} = ?\left|\begin{array}{l}\alpha = 30° \\ v \\ \mathbf{v} \perp \mathbf{u}\end{array}\right.$$

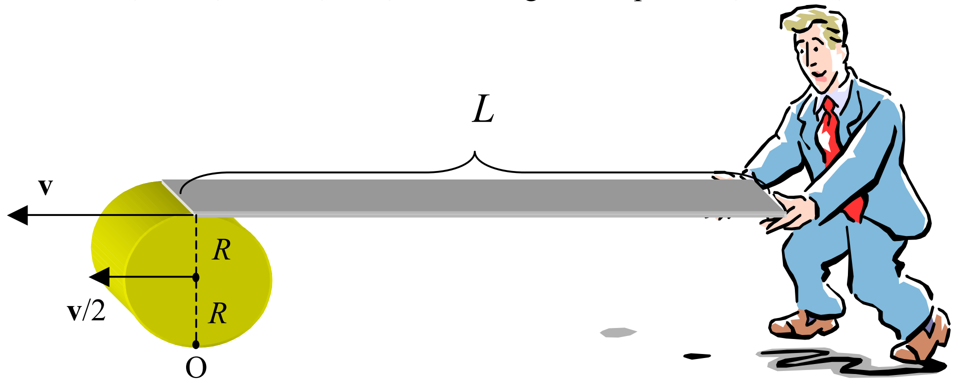
Sprendimas



Patogu perkelti koordinačių sistemą, nejudamai surištą su judančiu oru. Tuomet burlentė šioje sistemoje juda greičiu **–v+u**. Kuomet šis vektorius bus nukreiptas išilgai burės, burlentė judės maksimaliu greičiu (jei tik greitis u taptų didesnis, burlentė būtų stabdoma, jei tik u sumažėtų, burlentė būtų greitinama). Iš brėžinio randame, kad

$$tg\alpha = \frac{v}{u_{\max}}, \text{ iš kur } u_{\max} = \frac{v}{tg\alpha} = v\sqrt{3} .$$

Žmogus vieną lentos galą laiko rankose, o kitas jos galas guli ant cilindro. Lenta horizontali, jos ilgis *L*. Žmogus pradeda judėti pirmyn su lenta, dėl ko cilindras rieda horizontalia plokštuma. Lenta nepraslysta nei žeme, nei cilindru. Per kiek laiko žmogus pasieks cilindrą? Kokį nuotolį turi įveikti žmogus, kad pasiektų cilindrą?



Ats.: $t = \frac{2L}{v}$; $x = 2L$.

Sprendimas

Cilindro centras juda dvigubai mažesniu greičiu nei lenta (kartu su žmogumi). Jei lentos su žmogumi greitis *v*, tai cilindro centro linijinis greitis *v*/2. Iš tikrųjų, galime tarti, kad cilindras sukasi apie momentinį sukumosi centrą O tam tikru kampiniu greičiu ω. Tada viršutinio jo taško linijinis greitis $v = \omega \cdot 2R$, o cilindro centro linijinis greitis $v_C = \omega R$. Iš čia matome, kad $v_C = \frac{v}{2}$. Taigi lentos atžvilgiu cilindras juda greičiu $v - \frac{v}{2} = \frac{v}{2}$. Žmogus pasieks cilindrą, kai šis nueis lentos atžvilgiu ilgį *L*. Tai laikas $t = \frac{2L}{v}$. Per tą laiką žmogus įveikia atstumą $x = tv = 2L$.

Tam tikru laiko momentu t greitis **v** turi komponentes (2, -3, 4) m/s , o pagreitsi **a** – (-3, 4, 2) m/s^2. Rasti:

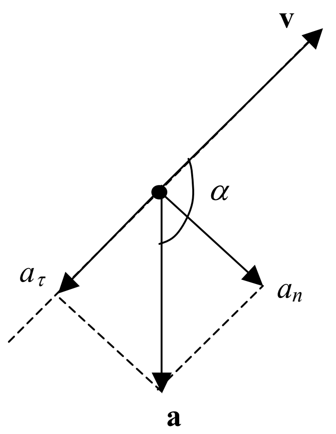
a) $\dfrac{dv}{dt}$ vertę laiko momentu *t*.

b) Trajektorijos kreivumo spindulį R taške, kuriame yra dalelė laiko momentu *t*.

Ats.: $\dfrac{dv}{dt} = -1{,}86\mathbf{m}/\mathbf{s}^2$, $R = 5{,}74\mathbf{m}$.

Sprendimas

$$\mathbf{v} = v(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k})$$
$$\mathbf{a} = a(-3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$$



$$\cos\alpha = \frac{-3+4-3}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}\sqrt{3^2+4_2+2^2}} = -0{,}345\,.$$

$$\frac{dv}{dt} = a_\tau = a\cos\alpha = \sqrt{3^2+4^2+2^2}\cdot(-0{,}345) = -1{,}86\mathbf{m}/\mathbf{s}^2\,\mathbf{.}$$

$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v^2}{a\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \frac{(2^2+3^2+4^2)}{\sqrt{3^2+4^2+2^2}\sqrt{1-0{,}345^2}} = 5{,}74\mathbf{m}\,\mathbf{.}$$

Vektoriaus **a** kryptis pakeista priešinga. Rasti: $\Delta\mathbf{a}$, $|\Delta\mathbf{a}|$ ir Δa.

Ats.: $\Delta\mathbf{a} = -2\mathbf{a}$, $|\Delta\mathbf{a}| = 2a$, 0.

Sprendimas

1) $\Delta\mathbf{a} = (-\mathbf{a}) - \mathbf{a} = -2\mathbf{a}$;

2) $|\Delta\mathbf{a}| = |-2\mathbf{a}| = 2a$;

3) $\Delta a = |-\mathbf{a}| - |\mathbf{a}| = 0$

Pradinis dalelės greitis yra $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, o galutinis greitis $\mathbf{v}_2 = 5\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. Rasti: a) $\Delta\mathbf{v}$; b) $|\Delta\mathbf{v}|$; c) Δv.

Ats.: a) $\Delta\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$; b) $|\Delta\mathbf{v}| = 3{,}74\,\mathbf{m/s}$; c) $\Delta v = -0{,}46\,\mathbf{m/s}$.

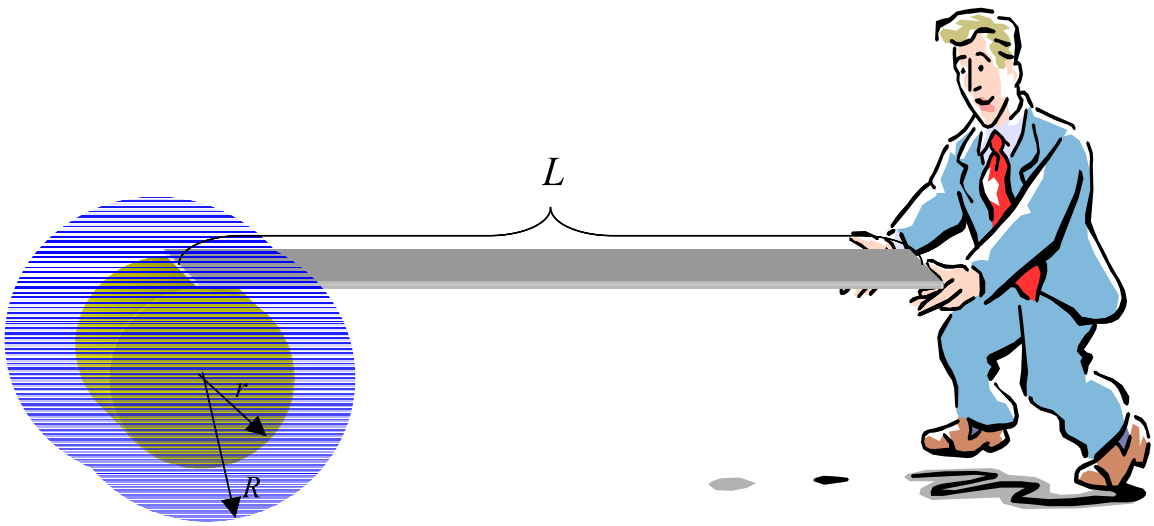
Sprendimas

a) $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = (5-2)\mathbf{i} + (6-7)\mathbf{j} + (3-5)\mathbf{k} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

b) $|\Delta\mathbf{v}| = \sqrt{\Delta v_x^2 + \Delta v_y^2 + \Delta v_z^2} = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = 3{,}74\,\mathbf{m/s}$.

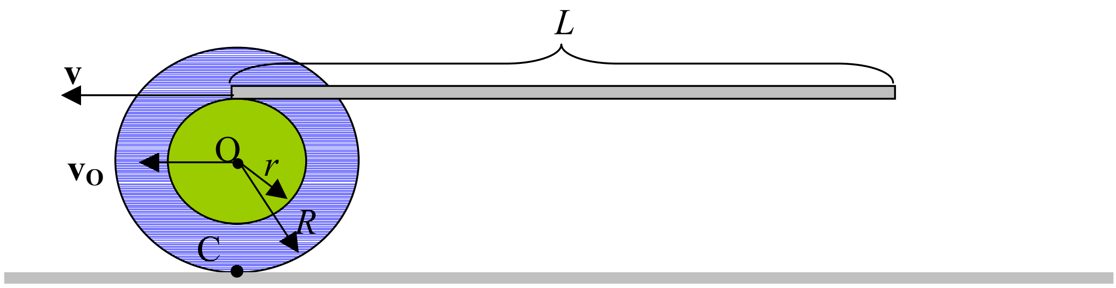
c) $\Delta v = \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2 + v_{2z}^2} - \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2 + v_{1z}^2} = \sqrt{5^2 + 6^2 + 3^2} - \sqrt{2^2 + 7^2 + 5^2} =$
$= -0{,}46\,\mathbf{m/s}$

Žmogus vieną lentos galą laiko rankose, o kitas jos galas guli ant didelės špūlės vidinės spindulio r dalies. Lenta horizontali, jos ilgis L, o špūlės išorinis spindulys R. Žmogus pradeda judėti pirmyn su lenta, dėl ko špūlė rieda horizontalia plokštuma. Lenta nepraslysta nei žeme, nei špūlės vidine dalimi. Per kiek laiko žmogus pasiekia špūlę? Kokį nuotolį turi įveikti žmogus, kad pasiektų špūlę?



Ats.: $t = \dfrac{L(R+r)}{vr}$; $x = \dfrac{L(R+r)}{r}$.

Sprendimas



Špūlės centras O juda mažesniu greičiu nei lenta (kartu su žmogumi). Galime įsivaizduoti, kad špūlė tam tikru momentu sukasi apie nejudantį tašką C, kuris yra bendras žemės ir špūlės taškas. Jei lentos su žmogumi greitis v, o špūlės centro linijinis greitis v_O, tai jų ryšį galima rasti iš lygčių:

$$v = \omega(R+r)$$

$$v_0 = \omega R = v\frac{R}{R+r}$$

Čia ω - kampinis špūlės sukimosi greitis. Tuomet špūlė artėja prie žmogaus greičiu

$$\Delta v = v - v_0 = v\frac{r}{R+r}.$$

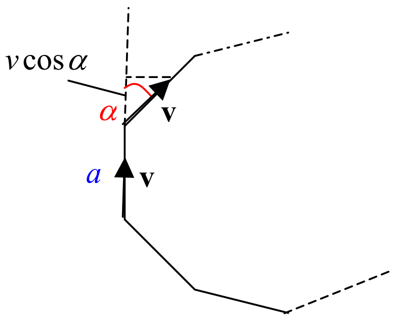
Žmogus pasieks špūlę, kai ši įveiks lentos atžvilgiu ilgį L. Tai laikas $t = \frac{L}{\Delta v} = \frac{L(R+r)}{vr}$.

Per tą laiką žmogus įveikia atstumą $x = tv = \frac{L(R+r)}{r}$.

n tarakonų (*Blatta orientalis*) išsidėstę taisyklingo n-kampio su kraštine a viršūnėse. Tarakonai pradeda vienu metu greičiu v rėplioti į artimiausią kaimyną (1-asis į 2-ąjį, 2-asis į 3-ąjį ir t.t.). Per kiek laiko tie šlykštūs padarai susitiks viename taške?

Ats.: $t_n = \dfrac{a}{v\left(1-\cos\dfrac{360°}{n}\right)}$.

Sprendimas



n-kampiui $\alpha = 180° - \frac{180°(n-2)}{n} = \frac{360°}{n}$.

Tarakonai vienas į kitą artėja greičiu $u = v(1-\cos\alpha) = v\left(1-\cos\frac{360°}{n}\right)$.

Tuomet laikas iki jų susitikimo

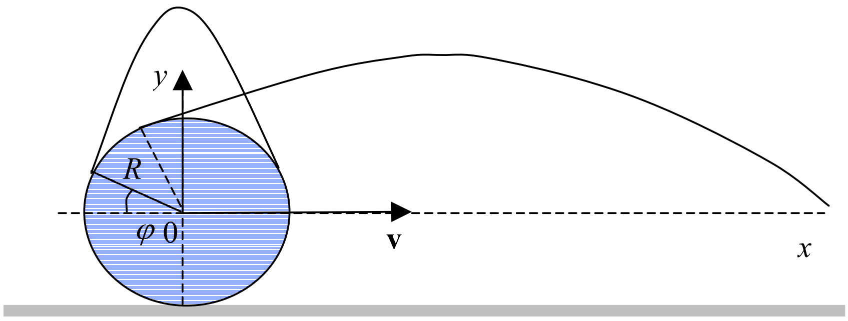
$$t_n = \frac{a}{v\left(1-\cos\dfrac{360°}{n}\right)}.$$

Pažymėtina, kad $n = 3,4,5$ ir t.t., taigi, kai turime lygiakraštį trikampį, $\alpha > 90°$ ir $\cos\alpha < 0$. Kvadrato atveju $\alpha = 90°$. Atsakymas teisingas visais atvejais.

Vežimas greičiu v važiuoja horizontaliu šlapiu keliu. Į kokį didžiausią aukštį gali pakilti atitrūkęs nuo vežimo rato vandens lašas, jei rato spindulys R? Kur šio didžiausio pakilimo metu yra lašas rato atžvilgiu?

Ats.: $h_{\max} = \dfrac{gR^2}{2v^2} + \dfrac{v^2}{2g}$. Lašas yra virš rato ašies.

Sprendimas



Ratas sukasi kampiniu greičiu ω (tiek ašies atžvilgiu judančio rato sistemoje, tiek apie momentinę sukimosi ašį, einančią per tašką C).

$$\omega R = v$$

Įvedame koordinačių sistemą $x0y$, kuri surišta su rato ašimi. $x0y$ greitis v.
Tuomet šios sistemos atžvilgiu atitrūkstančiam lašui

$$\begin{cases} x(t) = -R\cos\varphi + \omega Rt\sin\varphi \\ y(t) = R\sin\varphi + \omega Rt\cos\varphi - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases}.$$

Viršutiniame lašo pakilimo taške $y'(t) = 0$, taigi lašo pakilimo laiką galime rasti iš lygties

$$y'(t_1) = v\cos\varphi - gt_1 = 0$$. Taigi

$$t_1 = \frac{v\cos\varphi}{g}.$$

Tuomet maksimalus aukštis

$$h_{\max} = y(t_1) = R\sin\varphi + v\cos\varphi\frac{v\cos\varphi}{g} - \frac{g}{2}\frac{v^2\cos^2\varphi}{g^2}.$$

$$h_{\max} = -\frac{v^2}{2g}\sin^2\varphi + R\sin\varphi + \frac{v^2}{2g}.$$

$h_{\max}$ išvestinė atžvilgiu $\sin\varphi$ turi būti lygi 0, kai φ atitiks atitrūkstančio lašo, pasiekiančio didžiausią aukštį, padėtį.

$\frac{d(h_{\max})}{d(\sin\varphi)} = -\frac{v^2}{2g}\cdot 2\sin\varphi + R = 0$, kai $\sin\varphi = \frac{gR}{v^2}$. Čia $gR \le v^2$, antraip nėra sprendinio.

Dabar galime surasti $h_{\max}$:

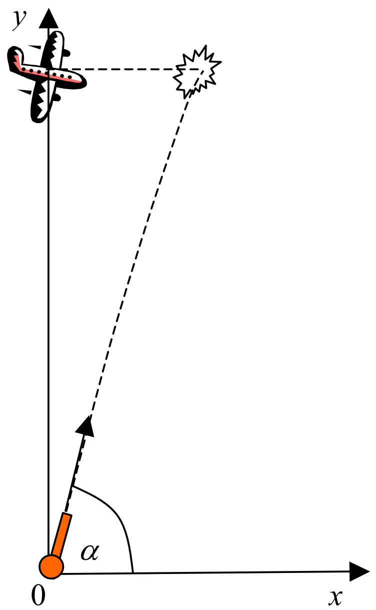
$$h_{\max} = \frac{gR^2}{2v^2} + \frac{v^2}{2g}.$$

Jei $gR > v^2$, lašas nepakils virš rato.

Randame x koordinatę laiko momentu t_1.

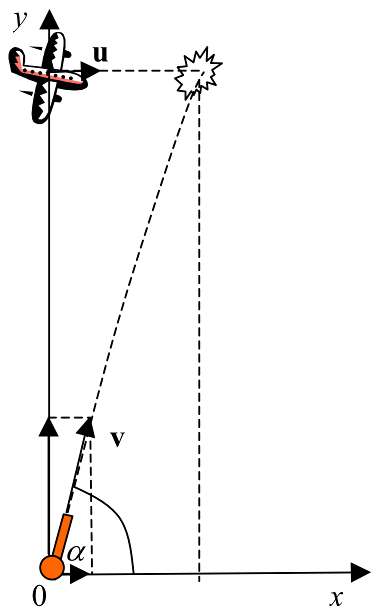
$$x(t_1) = -R\cos\varphi + vt_1\sin\varphi = -R\cos\varphi + v\frac{gR}{v^2}\cdot\frac{v\cos\varphi}{g} = 0.$$

Taigi, lašas tuo metu yra tiesiai virš rato ašies.



$h = 4000\mathbf{m}$ aukštyje tiesia horizontalia trajektorija greičiu $u = 600\mathbf{km/h}$ skrenda lėktuvas. Tuo metu, kai lėktuvas yra tiesiai virš zenitinio pabūklo, jis iššauna. Pradinis sviedinio greitis $v = 600\mathbf{m/s}$. Nekreipdami dėmesio į oro pasipriešinimą, apskaičiuokite:

a) kokiu kampu į horizontą α turi būti nukreiptas pabūklo vamzdis, kad sviedinys pataikytų į lėktuvą;
b) kokiam laiko intervalui t turi būti nustatytas sprogdiklis, kad sviedinys sprogtų susidūrimo su lėktuvu metu;
c) kokiu atstumu s horizontalia kryptimi nuo zenitinio pabūklo sviedinys susidurs su lėktuvu.



Sprendimas

a) Horizontalia kryptimi tiek sviedinys, tiek lėktuvas juda pastoviu greičiu. Taigi kad jie susitiktų, būtina, kad

$vt\cos\alpha = ut$, iš kur

$$\alpha = \arccos\frac{u}{v} = \arccos\frac{600}{600\cdot 3{,}6} = 73{,}9^\circ .$$

b) Randame x ir y koordinates kaip funkcijas nuo laiko:

$$\begin{cases} x = vt\cos\alpha \\ y = vt\sin\alpha - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases} .$$

Mus dominančiu laiko momentu $y = h$. Tuomet gauname

$$\frac{gt^2}{2} - vt\sin\alpha + h = 0 .$$

Šios lygties sprendinys (mažesnysis)

$$t = \frac{v\sin\alpha - \sqrt{v^2\sin^2\alpha - 2gh}}{g} =$$

$$= \frac{v}{g}\left[\sqrt{1-\frac{u^2}{v^2}} - \sqrt{1-\frac{u^2+2gh}{v^2}}\right] = 7{,}42\mathbf{s}$$

c) $l = ut = \dfrac{600}{3{,}6}7{,}42 = 1{,}23\mathbf{km}$.

Vieno vektoriaus komponentės (-2; 5; 7), o kito – (3; -4; 0). Rasti kampą tarp vektorių.

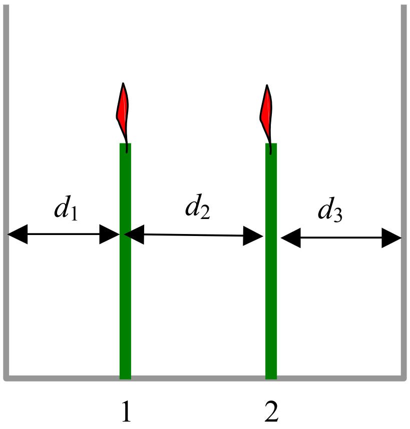
Sprendimas

Iš skaliarinės vektorių sandaugos seka, kad

$\cos\alpha = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$. Tuo būdu,

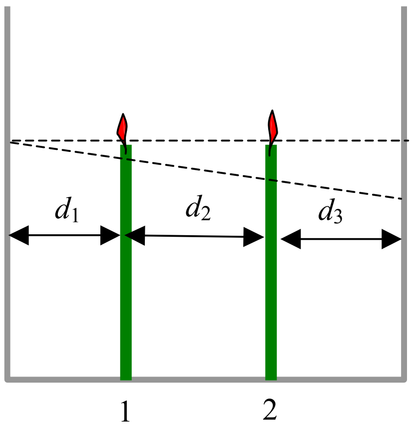
$$\cos\alpha = \frac{(-2)\cdot 3 + 5\cdot(-4) + 7\cdot 0}{\sqrt{(-2)^2 + 5^2 + 7^2}\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2}} = -0{,}589$$

$\alpha = 126°$.



Dvi vienodo ilgio l žvakės išdėstytos vienoje tiesėje kambaryje taip, kaip parodyta brėžinyje. Uždegus žvakes vienu metu, šešėlis ant kairės sienos nuo 1-os žvakės išlieka nejudantis, o šešėlis ant dešinės sienos nuo 2-os žvakės juda greičiu v. Per kiek laiko užges viena žvalė, o per kiek – kita?

Sprendimas



Tegul 1-oji žvakė dega greičiu v_1, o 2-oji – greičiu v_2. Praėjus laikui Δt, žvakių aukščiai turi pasikeisti taip, kaip parodyta brėžinyje. Tuomet iš trikampių panašumo

$$\frac{v_1 \Delta t}{d_1} = \frac{v_2}{d_1 + d_2}$$

ir

$$\frac{v_1}{d_1} = \frac{v}{d_1 + d_2 + d_3}$$

Iš lygčių ganame $v_1 = \frac{d_1}{d_1 + d_2 + d_3} v$, $v_2 = \frac{d_1 + d_2}{d_1} v_1 = \frac{d_1 + d_2}{d_1 + d_2 + d_3} v$.

Tuomet $t_2 = \frac{l}{v_2} = \frac{l}{v} \cdot \frac{d_1 + d_2 + d_3}{d_1 + d_2}$

$$t_1 = \frac{l}{v_1} = \frac{l}{v} \cdot \frac{d_1 + d_2 + d_3}{d_1}. \qquad t_2 < t_1 .$$

Nuo skardžio mestas akmuo greičiu v = 15,0 m/s horizontalia kryptimi. Per kiek laiko jo greitis pasidarys 4 kartus didesnis už pradinį. Oro pasipriešinimo nepaisyti.

Ats.: $t = \frac{v}{g}\sqrt{n^2 - 1} = 5{,}92\mathbf{s}$.

Sprendimas

Užrašome greičio lygtis vertikalia (y) ir horizontalia (x) kryptimi:

$$v_y = gt \text{ ir } v_x = v \ .$$

Tuomet atstojamasis greitis $u = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v^2 + g^2t^2}$. Jei $\frac{u}{v} = n$, tai

$$t = \frac{v}{g}\sqrt{n^2 - 1} = 5{,}92\mathbf{s}.$$

Iš esančios ant žemės žarnos veržiasi kampu $\alpha = 30°$ į horizontą vandens čiurkšlė, kurios greitis $v = 12{,}0\mathbf{m/s}$. Žarnos skerspjūvis $S = 8{,}0\mathbf{cm}^2$. Apskaičiuoti vandens, esančio ore, masę.

Ats.: $m = \frac{2\rho v^2 S \sin\alpha}{g} = 11{,}5\mathbf{kg}$.

Sprendimas

Užrašome vandens dalelės koordinatės priklausomybę nuo laiko vertikaliąja kryptimi:

$$y = v\sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

$y = 0$ pradiniu laiko momentu ($t = 0$) ir išskirtos vandens dalelės kritimo ant žemės momentu t. Jį surandame iš užrašytos lygybės:

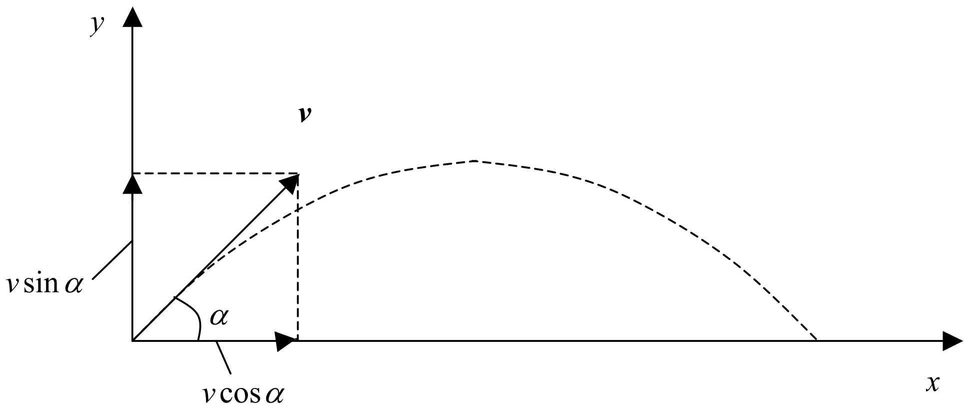
$$t = \frac{2v\sin\alpha}{g}.$$

Per šį laiką ištekėjęs iš žarnos vanduo ir bus ore, taigi

$$m = \rho Svt = \frac{2\rho v^2 S\sin\alpha}{g} = 11{,}5\mathbf{kg}.$$

Įrodyti, kad akmuo, mestas kampu į horizontą, nulėks toliausiai, jei kampas lygus $45°$. Į oro pasipriešinimą neatsižvelgiama.

Sprendimas



Užrašome y ir x coordinates bet kuriuo laiko momentu:

$$y = v\sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

$$x = v\cos\alpha \cdot t$$

Iš 1-os lygties akmuo nukris ant žemės, kai $y = 0$, t.y. laiko momentu

$t = \frac{2v\sin\alpha}{g}$. Įrašome šį laiką į 2-ą lygtį:

$$x = \frac{2v^2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{g} = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

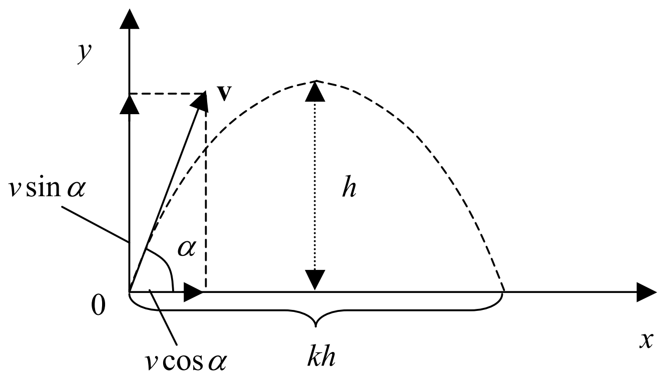
x bus didžiausias, kai $\frac{dx}{d\alpha} = 0$, t.y.

$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{2v^2}{g}\cos 2\alpha = 0$, kai $2\alpha = 90°$, taigi $\alpha = 45°$.

Kokiu kampu į horizontą reikia mesti kūną, kad jo lėkimo nuotolis būtų k kartų didesnis už jo pakilimo aukštį?

Ats.: $\alpha = arctg\frac{4}{k}$.

Sprendimas



y-koordinatė bet kuriuo laiko momentu lygi

$y = v\sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$. Iš čia visas kūno lėkimo laikas lygus

$t = \frac{2v\sin\alpha}{g}$.

Maksimalus kūno pakilimo aukštis gali būti surastas iš lygties

$v\sin\alpha = \sqrt{2gh}$, iš čia

$h = \frac{v^2\sin^2\alpha}{2g}$.

Antra vertus, horizontalus kūno įveiktas kelias lygus:

$kh = v\cos\alpha \cdot t$

Įrašę t ir h išraiškas gauname

$k\frac{v^2\sin^2\alpha}{2g} = v\cos\alpha \cdot \frac{2v\sin\alpha}{g}$. Iš čia

$\alpha = arctg\frac{4}{k}$.

Iš Vilniaus į Kauną išvyksta du traukianiai su $\Delta t_1 = 15$ min. intervalu. Traukinių greitis vienodas ir lygus $v = 42$ km/val. Kokiu greičiu juda traukinys, vykstantis iš į Vilnių iš Kauno, jei jis susitiko minėtus traukinius vieną po kito su $\Delta t_2 = 6$ min. ?

$$\text{Ats.}: u = \frac{\Delta t_1 - \Delta t_2}{\Delta t_2} v = 63 \text{ km/val.}$$

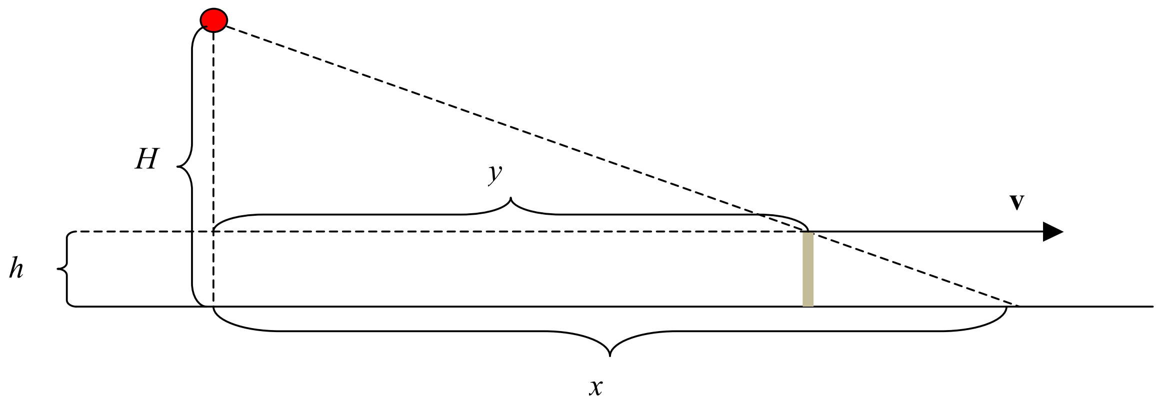
Sprendimas

$$\frac{v\Delta t_1}{v+u} = \Delta t_2 \text{ ,iš čia } u = \frac{\Delta t_1 - \Delta t_2}{\Delta t_2} v = 63 \text{ km/val.}$$

Žmogus, kurio ūgis h, eina pastoviu greičiu v po žibintu, kybančiu aukštyje H virš žemės. Kokiu greičiu žemės paviršiumi bėga šešėlis, kurį meta einančio žmogaus galva.

$$\text{Ats.}: u = \frac{H}{H-h} v\ .$$

Sprendimas



Iš trikampių panašumo

$$\frac{x}{y} = \frac{H}{H-h} \quad \rightarrow x = \frac{H}{H-h} y \text{ .Imdmi išvestinę pagal laiką, gauname } \dot{x} = \frac{H}{H-h} \dot{y} \text{ arba}$$

$$u = \frac{H}{H-h} v\ .$$

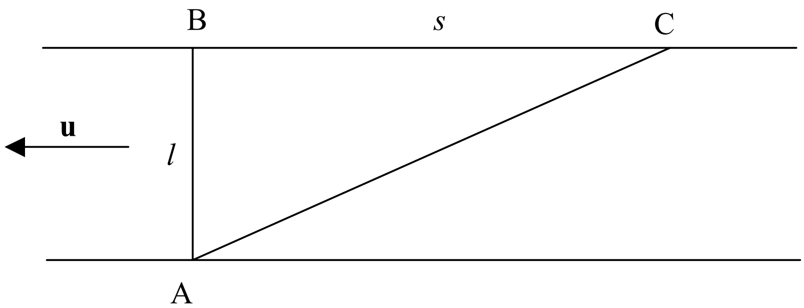
Motorinė valtis plaukia žemyn upe ir paveja plaustą. Po $t_1 = 1$ val., kai valtis pralenkė plaustą, sugedo jos variklis. Jo remontas užtruko $t_2 = 30$ min., ir visą tą laiką valtis plaukė nešama upės srovės. Suremontavus variklį, valtis pasuko prieš srovę ir plaukė tokiu pačiu greičiu vandens atžvilgiu kaip kelionės pradžioje. Valtis susitiko su anksčiau aplenktu plaustu, kai šis buvo *L* = 7,5 km nuo jų pradinio susitikimo vietos. Rasti upės tėkmės greitį.

$\text{Ats.}: u = \dfrac{L}{2t_1 + t_2} = 3{,}0\,\dfrac{\text{km}}{\text{val}}.$

Sprendimas

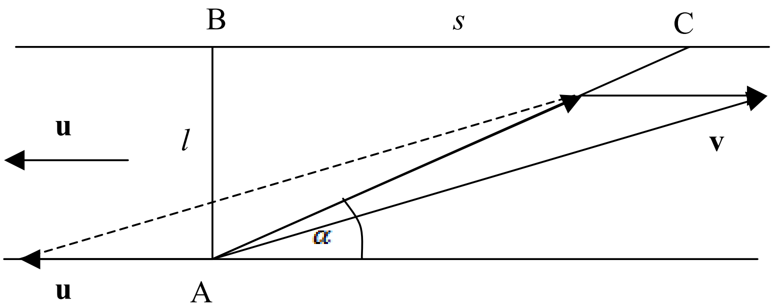
$u(t_1 + t_2 + t_1) = L$ .Iš čia $u = \dfrac{L}{2t_1 + t_2} = 3{,}0\,\dfrac{\text{km}}{\text{val}}.$

Iš taško A, esančio viename upės krante, valtimi reikia persikelti į punktą C, esantį kitame krante, judant tiesės atkarpa AC. Upės plotis AB = l = 1,0 km, o atstumas BC = s = 2,0 km, upės tėkmės greitis u = 2,0 km/val., o valties greitis stovinčio vandens atžvilgiu v = 5,0 km/val. Per kiek laiko bus nuplaukta į tašką C?



$$\text{Ats.}: t = \frac{su + \sqrt{v^2s^2 + v^2l^2 - u^2l^2}}{v^2 - u^2}.$$

Sprendimas



Tegul kampas α, o valties kelionės laikas t. Tada išilgai ir skersai upės galime užrašyti lygtis:

$$\begin{cases} t(v\cos\alpha - u) = s \\ tv\sin\alpha = l \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\alpha = \left(\frac{s}{t} + u\right) = s \\ \sin\alpha = \frac{l}{tv} \end{cases}$$

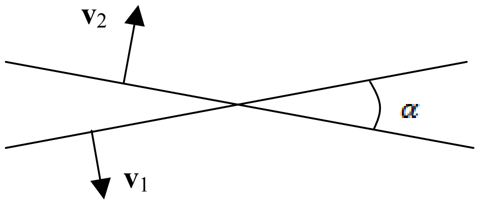
Pakėlę lygtis kvadratu ir sudėję, gauname lugtį t atžvilgiu:

$$(v^2 - u^2)t^2 - 2sut - (s^2 + l^2) = 0.$$

Išsprendę lygtį, gauname:

$$t = \frac{su + \sqrt{v^2s^2 + v^2l^2 - u^2l^2}}{v^2 - u^2}.$$

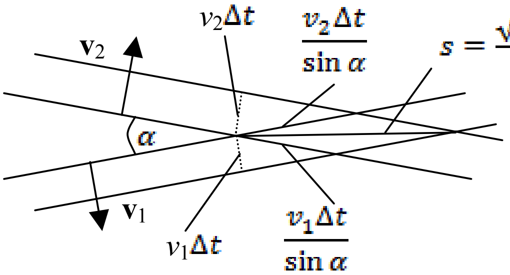
Dvi tiesės susikerta kampu α. Tiesės juda statmenomis sau kryptimis atitnkamai grečiais v_1 ir v_2. Rasti susikirtimo taško greitį.



Ats.: $v_s = \dfrac{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos\alpha}}{\sin\alpha}$.

Sprendimas

Tegul praeina nedidelis laiko tarpas Δt. Tuomet tiesės atrodo taip:



$$s = \frac{\sqrt{(v_1\Delta t)^2 + (v_2\Delta t)^2 - 2v_1\Delta t v_2\Delta t\cos(180° - \alpha)}}{\sin\alpha}$$

Pritaikę kosinusų teoremą, gauname

$$v_s = \frac{s}{\Delta t} = \frac{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos\alpha}}{\sin\alpha}.$$

Kiek apsisukimų padarė automobilio ratai iki visiško sustojimo, įjungus stabdžius, jei stabdymo pradžioje automobilis turėjo greitį v_0 = 60 km/val. ir sustojo po t = 3,0 s. Ratų skersmuo D = 0,70 m. Kam lygus kampinis ratų pagreitis tarus, kad ratai nepraslysta ir automobilis juda tolygiai lėtėjančiai.

$\text{Ats.}: n = \frac{v_0 t}{2\pi D} = 11\ ;\ \beta = \frac{2v_0}{Dt} = 15{,}9\ \text{s}^{-2}$.

Sprendimas

Užrašome nueito kelio ir greičio lygtis automobiliui:

$$\begin{cases} s = v_0 t - \dfrac{at^2}{2} \\ 0 = v_0 - at \end{cases}$$

Iš antros lygties randame t ir įrašome į pirmąją:

$$s = \frac{v_0 t}{2}.$$

Bet nueitas kelias gali būti susietas su ratų apsisukimų skaičiumi: $n\pi D = s$.

Taigi,

$$n = \frac{v_0 t}{2\pi D} = 11\ .$$

Kampinį pagreitį randame iš lygčių sistemos antrosios lygties ir pasinaudodami kampinio ir linijinio greičių ir pagreičių sąryšiais, atitinkamai $\frac{\omega D}{2} = v$ ir $\frac{\beta D}{2} = a$:

$$\beta = \frac{\omega_0}{t} = \frac{2v_0}{Dt} = 15{,}9\ \text{s}^{-2}\ .$$

Nufilmavus riedantį vežimą kinokamera, kuri fiksuoja 24 kadrus per sekundę, peržiūrint filmą atrodo, kad ratai nesisuka. Kokiu greičiu juda vežimas, jei kiekvienas ratas turi 12 stipinų, o jų spindulys 0,5 m?

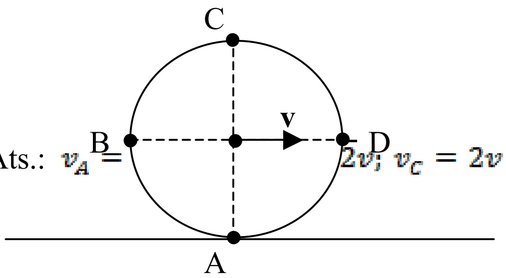
$\text{Ats.}: v = 2\pi n = 22{,}6n\ \frac{\text{km}}{\text{val.}}$, kur n – sveikas skaičius. Vežimui, matyt, $n = 1$.

Sprendimas

Laikas tarp dviejų kadrų lygus τ = 1/24 s^{-1}. Jei per šį laiką ratas pasisuka kampu, kartotiniu kampui tarp dviejų stipinų, žiūrint tokį filmą atrodys,kad judančio vežimo ratai nesisuka. Taigi,

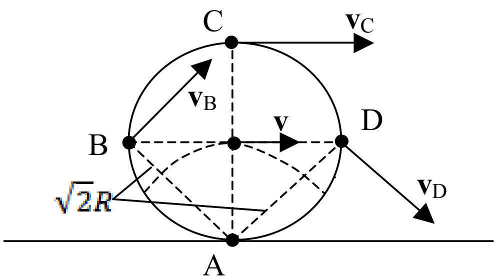
$$v = \frac{n\alpha}{\tau} R = \frac{n}{\tau}\frac{2\pi}{12} R = 2\pi n = 22{,}6\frac{\text{km}}{\text{val.}}\ .$$

Ritinys, kurio spindulys *R*, rieda nepraslysdamas horizontalia plokštuma greičiu *v*. Rasti greičių modulius ir kryptis taškams A, B, C, ir D nejudamos sistemos atžvilgiu. Kokie ritinio taškai turi to paties modulio greičius kaip ritinio centras?



Ats.: $v_A =$ … $2v; \; v_C = 2v$.

Sprendimas



Galime įsivaizduoti, kad ritinys sukasi apie tašką A kampiniu greičiu, kuris siejasi su linijiniu centro greičiu kaip $v = \omega R$. Tuomet iš brėžinio matyti, kad

$v_A = 0; \; v_B = v_D = \sqrt{2}v; \; v_C = 2v$.

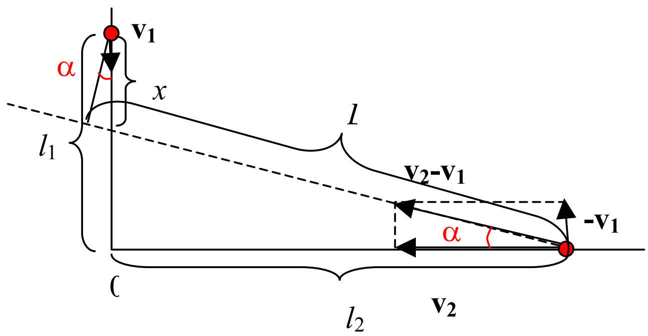
Modulio *v* greičius turi ritinio taškai, kurie nutolę nuo taško A vienodu atstumu *R* (brėžinyje parodyta punktyriniu spindulio *R* lanku).

1. Dvi dalelės juda pastoviais greičiais v_1 ir v_2 dviem viena kitai statmenom tiesėm jų susikirtimo taško O kryptimi. Laiko momentu $t = 0$ jų atstumai iki taško O buvo l_1 ir l_2. Per kiek laiko atstumas tarp dalelių bus mažiausias? Koks šis atstumas?

Ats.: $t_{\min} = \dfrac{v_1 l_1 + v_2 l_2}{v_1^2 + v_2^2}$; $l_{\min} = \dfrac{|l_1 v_2 - l_2 v_1|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$.

Sprendimas

Persikelkime į atskaitos sistemą, nejudamai surištą su viena iš dalelių, tarkime su 1-ąja dalele. Šioje sistemoje 2-oji dalelė judės greičiu $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$.



Laikas iki stamens (minimalaus atstumo tarp dalelių) $t = \dfrac{L}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$.

Iš brėžinio

$$L = \frac{l_2}{\cos\alpha} + x\sin\alpha. \text{ Čia } x = l_1 - l_2 tg\alpha.$$

$\cos\alpha = \dfrac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$, $tg\alpha = \frac{v_1}{v_2}$. Tuomet

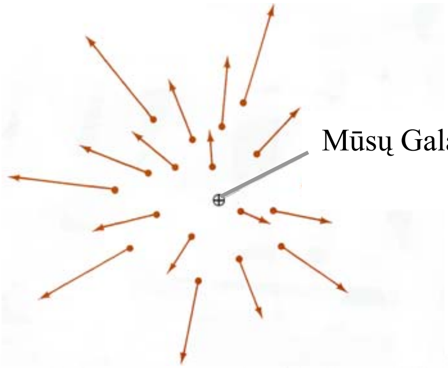
$$L = \frac{l_2\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}{v_2} + \left(l_1 - l_2\frac{v_1}{v_2}\right)\frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}, \qquad \text{taigi}$$

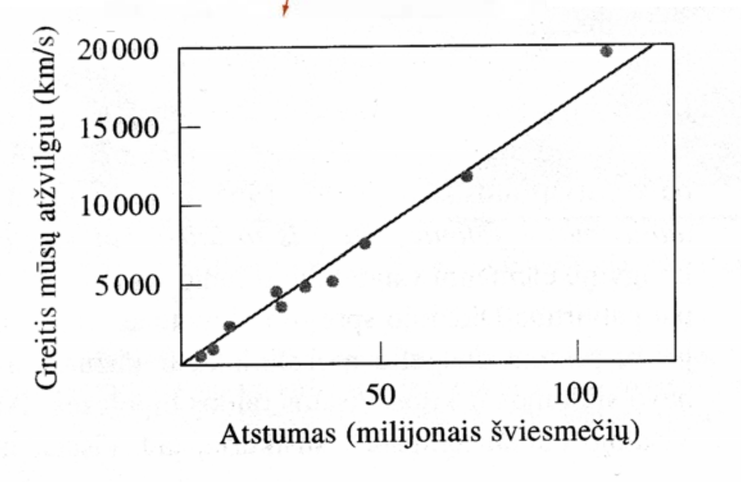
$L = \dfrac{l_1 v_1 + l_2 v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$. Tada laikas $t = \dfrac{l_1 v_1 + l_2 v_2}{v_1^2 + v_2^2}$.

Minimalus atstumas $l_{\min} = x\cos\alpha = (l_1 - l_2 tg\alpha)\dfrac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = \dfrac{l_1 v_2 - l_2 v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$. Čia galimas ir „-„ ženklas, reškiantis dalelių prasilenkimą iš kitos pusės (tai priklauso nuo atstumų iki O taško ir greičių verčių).

Astronominiais stebėjimais ir matavimais nustatyta, kad tolimos galaktikos nuo mūsų tolsta, o jų tolimo greitis proporcingas atsumui iki jų. Tai Hablo dėsnis. Iš čia kilo Didžiojo sprogimo idėja.

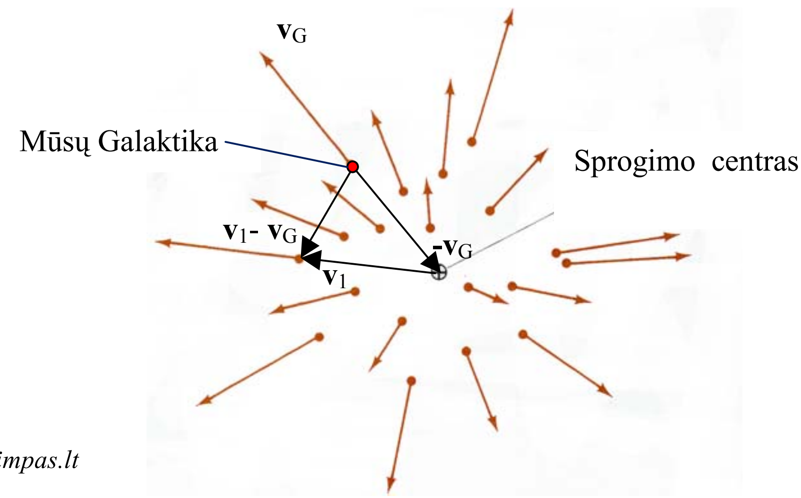
1) Ar tai reiškia, kad mūsų Galaktika buvo to sprogimo centre ?
2) Pasinaudodami kiekybiniu grafiku (tai originalus Hablo ir jo bendradarbių paveikslėlis), apskaičiuokite, prieš kiek laiko įvyko sprogimas.





Sprendimas

1) Po sprogimo atskiros dalys išsilakstė skirtingais greičiais – brėžinyje greičių moduliai proporcingi atstumui iki sprogimo centro.Tegul mūsų Galaktika ne sprogimo centre. Persikėlę į sistemą, nejudamai surištą su mūsų Galaktika, turime :



Pritaikę Galilėjaus reliatyvumo principą, privalome prie visų kitų galaktikų greičių (centro atžvilgiu) pridėti $-\mathbf{v}_G$, ir gausime jų greitį mūsų Galaktikos atžvilgiu. Matome, kad šių galaktikų greičiai nukreipti iš mūsų Galaktikos, o jų dydis proporcingas atstumui nuo mūsų Galaktikos iki kitų galaktikų – tai ir stebima eksperimentuose. Taigi, mūsų Galaktika nebūtinai yra Visatos centre.

2) Hablo dėsnis gali būti išreikštas formule

$$v = H_0 r$$

Čia iš esmės yra tiesės pateiktame grafike lygtis. Iš šio grafiko galime įvertinti šią Hablo konstantą :

$$H_0 = \frac{\Delta v}{\Delta l} = \frac{2 \cdot 10^7\,\mathbf{m/s}}{115\,\mathbf{mln.šviesm.}} \approx 1{,}7 \cdot 10^5\,\mathbf{m/s/mln.šviesm.}$$

Tuomet plėtimosi laikas gali būti apskaičiuotas kaip

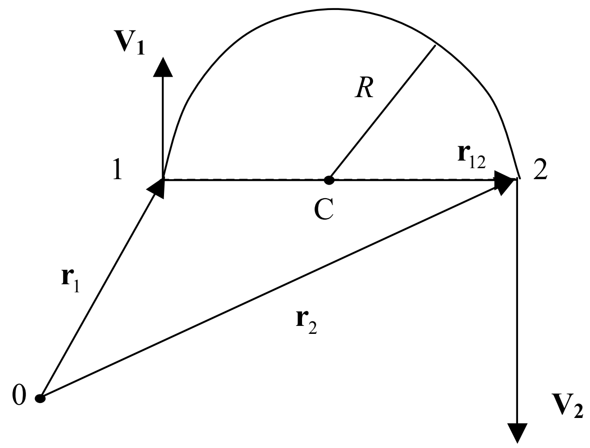
$$t = \frac{r}{v} = \frac{r}{H_0 r} = \frac{1}{H_0} = \frac{1}{1{,}7 \cdot 10^5} \frac{9{,}5 \cdot 10^{21}\,\mathbf{m}}{\mathbf{m/s}} = 1{,}8 \cdot 10^9\,\mathbf{metų}\,.$$

Tai nėra tikslus rezultatas, gautas iš pirmųjų matavimų (1929 m.). Dabar atlikti žymiai tikslesni matavimai ir manoma, kad Didysis sprogimas įvyko maždaug 10 kartų anksčiau.

Per laiką τ taškas įveikė pusę apskritimo, kurio spindulys R. Rasti per laiką τ:

a) vidutinę greičio modulio reikšmę;
b) vidutinio greičio kaip vektoriaus modulį;
c) vidutinio pagreičio kaip vektoriaus modulį, jei tangentinis pagreitis buvo pastovus.

Sprendimas



a) Vidutinė greičio modulio reikšmė – tai taško nueitas kelias, padalintas iš sugaišto laiko. Nueitas kelias – pusapskritimio ilgis, t.y. πR, o laikas τ. Taigi $\langle v \rangle = \dfrac{\pi R}{\tau}$.

b) Pagal vidutinio dydžio apibrėžimą $|\langle \mathbf{v} \rangle| = \left|\dfrac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\tau}\right| = \dfrac{|\mathbf{r}_{12}|}{\tau} = \dfrac{2R}{\tau}$.

c) Pagal vidurkio apibrėžimą

$|\langle \mathbf{a} \rangle| = \left|\dfrac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{\tau}\right| = \dfrac{v_1 + v_2}{\tau}$. Tangentinis pagreitis rodo greičio modulio v kitimą. Jei a_τ pastovus, tai judėjimas trajektorija yra tolygiai greitėjantis. Tuomet $v_2 = v_1 + a_\tau \tau$. Tuomet $v_1 + v_2 = 2v_1 + a_\tau \tau = 2(v_1 + \dfrac{a_\tau \tau}{2})$. Čia pastebėsime, kad skliaustuose – vidutinė greičio modulio reikšmė. Iš tikrųjų, pagal apibrįžimą $\langle v \rangle = \dfrac{1}{\tau}\int_0^\tau v(t)dt = \dfrac{1}{\tau}\int_0^\tau (v_1 + a_\tau t)dt = v_1 + \dfrac{a_\tau \tau}{2}$. Bet iš dalies a) radome, kad $\langle v \rangle = \dfrac{\pi R}{\tau}$. Tuomet $|\langle \mathbf{a} \rangle| = \dfrac{v_1 + v_2}{\tau} = \dfrac{2\pi R}{\tau^2}$