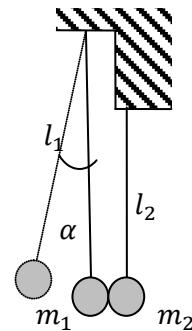


10-ASIS FIZIKOS TURNYRAS
 10-oji užduotis Nr. FT10-10 / 2017 01 23 – 2017 02 19

Sąlyga / FT10-10 ▼

Du rutuliukai

Du maži rutuliukai, kurių masės $m_1 = 2$ g ir $m_2 = 3$ g, pakabinti ant $l_1 = 65$ cm ir $l_2 = 45$ cm ilgio siūlų ir liečia vienas kitą. Pirmasis rutuliukas patraukiamas taip, kad stūlas sudarytų kampą $\alpha = 9^\circ$ su vertikale ir paleidžiamas be pradinio greičio.



- 1) Kokie bus rutuliukų greičiai po jų tampraus smūgio?
- 2) Kiek laiko praėjus po pirmojo smūgio rutuliukai vėl susidauš?
- 3) Kokie bus rutuliukų greičiai po antrojo smūgio?

Užduotį parengė mokyklos „Fizikos olimpas“ steigėjų tarybos narys, ilgametis mokyklos direktorius (11 m.) ir šio Fizikos turnyro užduočių parengimo spręsti ir jų sprendimų vertinimo komisijos pirmininkas prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2017 01 23.

Užduoties aiškinamasis sprendimas / FT10-10 ▼

Pagal energijos tvermės dėsnį prieš pat smūgį pirmojo rutuliuko greitis

$$v_0 = \sqrt{2gl_1(1 - \cos \alpha)}.$$

Rutuliukų greičius pažymime v_1 ir v_2 . Taikome judesio kiekio ir energijos tvermės dėsnius. Gauname lygčių sistemą:

$$\begin{cases} m_1 v_0 = m_2 v_2 + m_1 v_1, \\ \frac{m_1 v_0^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1(v_0 - v_1) = m_2 v_2, \\ m_1(v_0^2 - v_1^2) = m_2 v_2^2. \end{cases}$$

$$v_2 = v_0 + v_1,$$

$$m_1 v_0 = m_2(v_0 + v_1) + m_1 v_1,$$

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \sqrt{2gl_1(1 - \cos \alpha)},$$

$$v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_0 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \sqrt{2gl_1(1 - \cos \alpha)}.$$

Įrašę duomenis gauname:

$$v_1 = \frac{0,002 - 0,003}{0,002 + 0,003} \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 0,65 \cdot (1 - \cos 9^\circ)} = -0,079 \text{ (m/s)},$$

$$v_2 = \frac{2 \cdot 0,002}{0,002 + 0,003} \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 0,65 \cdot (1 - \cos 9^\circ)} = 0,32 \text{ (m/s)}.$$

Neigiama v_1 vertė reiškia, kad pirmasis rutuliukas po smūgio atšoka atgal, t.y., juda iš dešinės į kairę.

Kadangi rutuliukai ir jų atsilenkimai nuo vertikalės maži, jų atsilenkimams nuo vertikalės $\varphi_1(t)$ ir $\varphi_2(t)$ taikome matematinės švytuoklės svyravimo formulę:

$$\varphi_1(t) = \varphi_{01} \sin(\omega_1 t + \pi),$$

$$\varphi_2(t) = \varphi_{02} \sin \omega_2 t.$$

Rutuliuku svyravimo fazės skiriasi π , nes pradiniu momentu jie juda priešingomis kryptimis: pirmas – iš dešinės į kairę, antras – iš kairės į dešinę. Rutuliukų svyravimo dažniai

$$\omega_1 = \sqrt{g/l_1}, \quad \omega_1 = \sqrt{9,8/0,65} = 3,88 \text{ (1/s)}.$$

$$\omega_2 = \sqrt{g/l_2}, \quad \omega_2 = \sqrt{9,8/0,45} = 4,67 \text{ (1/s)}.$$

Rutuliukų svyravimo amplitudes nustatome iš pradinių greičių ir energijos tvermės dėsnio:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = m_1 g l_1 (1 - \cos \varphi_{01}),$$

$$\varphi_{01} = \arccos\left(1 - \frac{v_1^2}{2gl_1}\right), \quad \varphi_{01} = \arccos\left(1 - \frac{0,079^2}{2 \cdot 9,8 \cdot 0,65}\right) = 0,0313,$$

$$\varphi_{02} = \arccos\left(1 - \frac{v_2^2}{2gl_2}\right), \quad \varphi_{02} = \arccos\left(1 - \frac{0,079^2}{2 \cdot 9,8 \cdot 0,65}\right) = 0,152.$$

Antras rutuliukų smūgis įvyks praėjus laikui t' kai jų atsilenkimai bus vienodi:

$$l_1 \varphi_1(t') = l_2 \varphi_2(t'),$$

$$l_1 \varphi_{01} \sin(\omega_1 t' + \pi) = l_2 \varphi_{02} \sin \omega_2 t'.$$

Mums reikalingas sprendinys $\frac{T_1}{2} > t' > \frac{T_2}{2}$, čia $T_1 = 2\pi\sqrt{l_1/g}$, $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{0,65}{9,8}} = 1,62 \text{ (s)}$,
 $T_2 = 2\pi\sqrt{l_2/g}$, $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{0,45}{9,8}} = 1,35 \text{ (s)}$. Lygtį sprendžiame skaitmeniniu būdu.

$$0,65 \cdot 0,0313 \sin(3,88t' + \pi) = 0,45 \cdot 0,152 \sin 4,67t'.$$

$$-\sin 3,88t' = 3,36 \sin 4,67t'.$$

Sudarome funkciją

$$f(t') = \sin 3,88t' + 3,36 \sin 4,67t'$$

ir sprendžiame lygtį $f(t') = 0$ naudodami stygų metodą.

t'	0,81	0,67	0,7004	0,6919106	0,6921145	0,6921144
$f(t')$	-2,01	0,558	-0,2172	0,0053	$-4 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-11}$

Taigi, ieškomasis laikas $t' = 0,69 \text{ s}$.

Prieš pat antrąjį smūgį rutuliukų greičiai

$$v'_1(t') = l_1 \left. \frac{d\varphi_1(t)}{dt} \right|_{t=t'} = l_1 \varphi_{01} \omega_1 \cos(\omega_1 t' + \pi),$$

$$v'_1(t') = -0,65 \cdot 0,0313 \cdot 3,88 \cdot \cos(3,88 \cdot 0,69) = 0,071 \text{ m/s},$$

$$v'_2(t') = l_2 \left. \frac{d\varphi_2(t)}{dt} \right|_{t=t'} = l_2 \varphi_{02} \omega_2 \cos \omega_2 t',$$

$$v'_2(t') = 0,45 \cdot 0,152 \cdot 4,67 \cdot \cos(4,67 \cdot 0,69) = -0,318 \text{ (m/s)}.$$

Rutuliukų greičius tuoj po smūgio pažymime v'_1 ir v''_2 . Panaudodami energijos tvermės dėsnį ir judesio kiekio tvermės dėsnį po tampraus smūgio gauname:

$$\begin{cases} m_1 v'_1 + m_2 v'_2 = m_1 v''_1 + m_2 v''_2, \\ \frac{m_1 v'^2_1}{2} + \frac{m_2 v'^2_2}{2} = \frac{m_1 v''^2_1}{2} + \frac{m_2 v''^2_2}{2}. \end{cases}$$

Lygtis pertvarkome:

$$\begin{cases} m_1(v'_1 - v''_1) = m_2(v''_2 - v'_2), \\ m_1(v'^2_1 - v''^2_1) = m_2(v''^2_2 - v'^2_2). \end{cases}$$

Padalinę antrąją lygtį iš pirmosios gauname

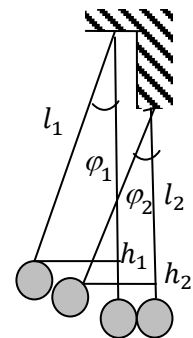
$$\begin{aligned} v'_1 + v''_1 &= v'_2 + v''_2 \\ v''_2 &= v'_1 + v''_1 - v'_2, \\ m_1 v'_1 + m_2 v'_2 &= m_1 v''_1 + m_2(v'_1 + v''_1 - v'_2), \\ v''_1 &= \frac{(m_1 - m_2)v'_1 + 2m_2 v'_2}{m_1 + m_2}, \\ v''_1 &= \frac{(0,002 - 0,003) \cdot 0,071 + 2 \cdot 0,003 \cdot (-0,318)}{0,002 + 0,003} = -0,40 \text{ (m/s)}, \\ v''_2 &= \frac{2m_1 v'_1 - (m_1 - m_2)v'_2}{m_1 + m_2}, \\ v''_2 &= \frac{2 \cdot 0,002 \cdot 0,071 - (0,002 - 0,003) \cdot (-0,318)}{0,002 + 0,003} = -0,007 \text{ (m/s)}. \end{aligned}$$

Taigi, tuoj po antrojo smūgio rutuliukų greičiai yra neigiami, t.y., nukreipti iš dešinės į kairę.

Sprendžiant nebuvo atsižvelgta į rutuliukų matmenis ir į tai, kad atlinkstant nuo vertikalės rutuliukų pakilimo aukščiai h_1 ir h_2 yra skirtingi, kaip parodyta pav.

$$\begin{aligned} h_1 &= l_1(1 - \cos \varphi_1), \\ h_1 &= 0,65(1 - \cos(3,88 \cdot 0,69)) = 0,0079 \text{ (m)}, \\ h_2 &= l_2(1 - \cos \varphi_2), \\ h_2 &= 0,45(1 - \cos(4,67 \cdot 0,69)) = 0,0013 \text{ (m)}, \end{aligned}$$

Taigi, laikome, kad $l_1, l_2 \gg r_1, r_2$, o $r_1, r_2 \gg h_1 - h_2$. Sprendinys tinka, kai $0,45 \text{ m} \gg r_1, r_2 \gg 0,0066 \text{ m}$.



Užduoties aiškinamąjį sprendimą pateikė jos autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2020 08 20.

Turnyro dalyvių sprendimų aptarimas / FT10-10 ▼

Pirmąją užduoties dalį dauguma sprendusiųjų atliko teisingai.

Sprendžiant antrąją užduoties dalį ne visi sprendusieji tinkamai panaudojo harmoninių svyravimų formulę. Neišsprendus antrosios užduoties dalies ir nežinant antrojo smūgio laiko nėra galimybės nustatyti rutuliukų greičių.

Užduoties sprendimų aptarimą parengė jos autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2020 08 20.

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelė / FT10-10 ▼

Nr.	Sprendimų vertinimo kriterijus	Vertė balais
1.	Pirmo rutuliuko greitis prieš pat smūgį	1
	Pirmo rutuliuko greitis tuoj po smūgio	2
	Antro rutuliuko greitis tuoj po smūgio	2
2.	Pirmo rutuliuko judėjimo dėsnis	1
	Antro rutuliuko judėjimo dėsnis	1
	Trukmė nuo pirmo iki antro rutuliukų smūgio	1
3.	Pirmo rutuliuko greitis po antro smūgio	1
	Antro rutuliuko greitis po antro smūgio	1
4.	Pateikta ne pagal reikalavimus	-1
5.	Netikslumai (kiekvienam iš kriterijų Nr.1-3)	iki (-1)
	Didžiausias galimas sprendimų įvertinimas	10

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelę parengė užduoties autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2020 08 20.