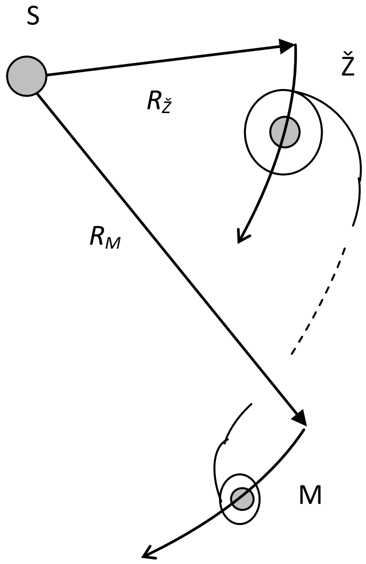
10-ASIS FIZIKOS TURNYRAS

15-oji užduotis Nr. FT10-15 / 2017 05 09 – 2017 06 06

***Sąlyga / FT10-15* ▼**

Kelionės į Marsą pasiskaičiavimai



Iš Žemės į Marsą siunčiamas zondas (zondo trajektorija schematiškai parodyta pav.: S – Saulė, Ž – Žemė, M – Marsas). Saulės masė $M_S = 2{,}0 \cdot 10^{30}$ kg, Žemės masė $M_Ž = 6{,}0 \cdot 10^{24}$ kg, spindulys $r_Ž = 6400$ km, Marso masė $M_M = 6{,}5 \cdot 10^{23}$ kg, spindulys $r_M = 3400$ km atstumai nuo Saulės $R_Ž = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ m, $R_M = 2{,}3 \cdot 10^{11}$ m (laikome, kad Žemės ir Marso orbitos – apskritimai, esantys vienoje plokštumoje). Skaičiavimui supaprastinti laikome, kad zondą Žemės ir Marso aplinkoje planetos traukos jėga veikia tik tol, kol ji didesnė už Saulės traukos jėgą, o toliau zondą veikia jau tik Saulės traukos jėga. Pradžioje zondas su paskutine raketos pakopa išvedamas į apskritą orbitą, esančią Žemės ir Marso orbitų plokštumoje $h = 200$ km aukštyje virš Žemės paviršiaus. Tam tikru momentu raketa padidina greitį iki tokio didumo, kad zondas galėtų palikti Žemės traukos sritį. Toliau raketa suteikia zondui minimalų greitį, reikalingą pasiekti Marso traukos sritį, ir zondas atskiriamas nuo raketos. Zondo visa masė (su kuro atsarga) $m = 150$ kg, jame įrengtas raketinis variklis išmeta degimo produktus $v = 3\ \mathrm{km/s}$ greičiu. Pasiekęs Marso traukos sritį zondas, kaip ir kylant iš Žemės, dviem etapais pervedamas į apskritą orbitą $h' = 100$ km aukštyje virš Marso paviršiaus.

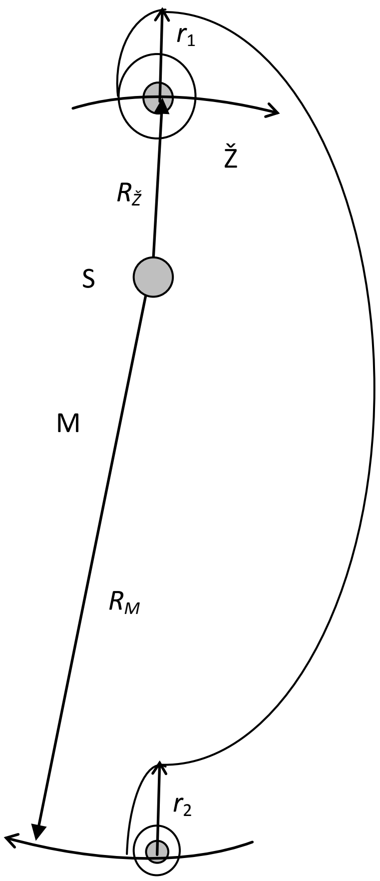
1) Kokį greitį raketa suteikia zondui, kad jis paliktų Žemės traukos sritį?
2) Kokį minimalų greitį reikia suteikti zondui, kad jis patektų į Marso traukos sritį?
3) Koks kuro kiekis bus sunaudotas zondui pereinant į apskritą orbitą apie Marsą?
4) Kiek laiko truks zondo kelionė iš Žemės į Marsą?

Užduotį parengė mokyklos „Fizikos olimpas" steigėjų tarybos narys, ilgametis mokyklos direktorius (11 m.) ir šio Fizikos turnyro užduočių parengimo spręsti ir jų sprendimų vertinimo komisijos pirmininkas prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2017 05 09.*

Užduoties aiškinamasis sprendimas / FT10-15 ▼

Zondo kelionės schema naudojant minimalius kuro kiekius pateikta paveiksle. Pradinėje orbitoje zondo su raketa greitis



$$v_1 = \sqrt{\frac{\gamma M_{Ž}}{r_{Ž}+h}}.$$

Čia $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2}$ yra gravitacinė konstanta.

$$v_1 = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6{,}0 \cdot 10^{24}}{6400000 + 200000}} = 7800\ (\mathrm{m/s}).$$

Žemės trauka tampa lygi Saulės traukai atstumu r_1 nuo Žemės centro:

$$\frac{\gamma M_{Ž}}{r_1^2} = \frac{\gamma M_S}{R_{Ž}^2},$$

$$r_1 = R_{Ž}\sqrt{\frac{M_{Ž}}{M_S}},$$

$$r_1 = 1{,}5 \cdot 10^{11}\sqrt{\frac{6{,}0 \cdot 10^{24}}{2{,}0 \cdot 10^{30}}} = 2{,}6 \cdot 10^{8}\ (\mathrm{m}).$$

Vertindami r_1 mes neatsižvelgėme į kryptį, nes jis žymiai mažesnis už $R_{Ž}$. Taigi, zondą reikia pervesti į elipsinę orbitą, kurios apogėjus r_1. Panaudojame energijos tvermės dėsnį ir judesio kiekio momento tvermės dėsnį.

$$\frac{v_1'^2}{2} - \frac{\gamma M_{Ž}}{r_{Ž}+h} = \frac{v_2^2}{2} - \frac{\gamma M_{Ž}}{r_1},$$

$$v'_1(r_{Ž}+h) = v_2 r_1,$$

$$v'_1 = \sqrt{\frac{2\gamma M_{Ž} r_1}{(r_{Ž}+h)(r_1 + r_{Ž} + h)}},$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\gamma M_{Ž}(r_{Ž}+h)}{r_1(r_1 + r_{Ž} + h)}},$$

$$v'_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6{,}0 \cdot 10^{24} \cdot 2{,}6 \cdot 10^{8}}{(6400000 + 200000)(2{,}6 \cdot 10^{8} + 6400000 + 200000)}} = 10900\ (\mathrm{m/s}),$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6{,}0 \cdot 10^{24} \cdot (6400000 + 200000)}{2{,}6 \cdot 10^{8} \cdot (2{,}6 \cdot 10^{8} + 6400000 + 200000)}} = 276\ (\mathrm{m/s}).$$

Taigi. apskritiminėje orbitoje raketa turi padidinti greitį nuo $v_1 = 7800\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ iki $v'_1 = 10900\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Tada bus pasiekta Žemės traukos srities riba turint greitį $v_2 = 276\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ Žemės atžvilgiu.

Išėjęs iš Žemės traukos srities zondas judėtų artima Žemės orbitai trajektorija, jo greitis Saulės atžvilgiu būtų

$$v'_2 = v_2 + v_{Ž} = v_2 + \sqrt{\frac{\gamma M_S}{R_{Ž}}}, \quad v'_2 = 276 + \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 2{,}0 \cdot 10^{30}}{1{,}5 \cdot 10^{11}}} = 30100 \ \text{(m/s)}.$$

Norint pasiekti Marsą reikia pereiti į elipsinę orbitą Saulės atžvilgiu (analogiškai užduočiai 1). Gauname lygtis:

$$\frac{v'^2_3}{2} - \frac{\gamma M_S}{R_M} = \frac{v_3^2}{2} - \frac{\gamma M_S}{R_{Ž}},$$

$$v'_3 R_M = v_3 R_{Ž}.$$

Tų lygčių sprendiniai

$$v_3 = \sqrt{\frac{2\gamma M_S R_M}{R_{Ž}(R_M + R_{Ž})}}, \quad v_3 = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 2{,}0 \cdot 10^{30} \cdot 2{,}3 \cdot 10^{11}}{1{,}5 \cdot 10^{11}(2{,}3 \cdot 10^{11} + 1{,}5 \cdot 10^{11})}} = 32800 \text{ (m/s)},$$

$$v'_3 = \sqrt{\frac{2\gamma M_S R_{Ž}}{R_M(R_M + R_{Ž})}}, \quad v'_3 = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 2{,}0 \cdot 10^{30} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{11}}{2{,}3 \cdot 10^{11}(2{,}3 \cdot 10^{11} + 1{,}5 \cdot 10^{11})}} = 21400 \text{ (m/s)}.$$

Taigi, norint pasiekti Marsą zondo greitį reikia padidinti nuo $v'_2 = 30100 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ iki $v_3 = 32800 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Marso traukos sritį zondas pasieks turėdamas greitį $v'_3 = 21400 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Marso orbitinis greitis

$$v_M = \sqrt{\frac{\gamma M_S}{R_M}}, \qquad v_M = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 2{,}0 \cdot 10^{30}}{2{,}3 \cdot 10^{11}}} = 24100 \ \text{(m/s)}.$$

Marso traukos srities ribą r_2 nustatome iš sąlygos

$$\frac{\gamma M_M}{r_2^2} = \frac{\gamma M_S}{R_M^2},$$

$$r_2 = R_M \sqrt{\frac{M_M}{M_S}},$$

$$r_2 = 2{,}3 \cdot 10^{11} \sqrt{\frac{6{,}5 \cdot 10^{23}}{2{,}0 \cdot 10^{30}}} = 1{,}3 \cdot 10^{8} \text{ (m)}.$$

Kad zondas pereitų į elipsinę orbitą, priartėjančią prie Marso paviršiaus atstumu $h' = 100$ km, jo greitis ties Marso traukos srities riba turėtų būti v_4, o aukštyje h' virš Marso paviršiaus v'_4. Gauname lygtis (Marso atžvilgiu):

$$\frac{v'^2_4}{2} - \frac{\gamma M_M}{r_M + h'} = \frac{v_4^2}{2} - \frac{\gamma M_M}{r_2},$$

$$v'_4(r_M + h') = v_4 r_2.$$

Tų lygčių sprendiniai

$$v'_4 = \sqrt{\frac{2\gamma M_M r_2}{(r_M + h')(r_2 + r_M + h')}},$$

$$v_4 = \sqrt{\frac{2\gamma M_M (r_M + h')}{r_2(r_2 + r_M + h')}},$$

$$v'_4 = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6{,}5 \cdot 10^{23} \cdot 1{,}3 \cdot 10^8}{(3400000 + 100000)(1{,}3 \cdot 10^8 + 3400000 + 100000)}} = 4900 \text{ (m/s)},$$

$$v_4 = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6{,}5 \cdot 10^{23} \cdot (3400000 + 100000)}{1{,}3 \cdot 10^8 \cdot (1{,}3 \cdot 10^8 + 3400000 + 100000)}} = 132 \text{ (m/s)}.$$

Taigi, pasiekus Marso traukos sritį zondo greitį reikia padidinti nuo $v'_3 = 21400\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ iki

$$v''_4 = v_M + v_4, \qquad v''_4 = 24100 + 132 = 24200 \text{ (m/s)},$$

t.y., $\Delta v = v''_4 - v'_3$, $\Delta v = 24200 - 21400 = 2800$ (m/s). laikant, kad kuro degimo laikas mažas, panaudojame judesio kiekio tvermės dėsnį:

$$(m - \Delta m)\Delta v = \Delta m v,$$

čia $m = 150$ kg yra pradinė zondo masė, Δm – sunaudoto kuro masė.

$$\Delta m = \frac{m\Delta v}{\Delta v + v}, \quad \Delta m = \frac{150 \cdot 2600}{2800 + 3000} = 72 \text{ (kg)}.$$

Zondui pasiekus $h' = 100$ km aukštį jo greitis bus $v'_4 = 4900\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. tokio aukščio apskritiminėje orbitoje zondas turėtų judėti greičiu

$$v_5 = \sqrt{\frac{\gamma M_M}{r_M + h'}}, \quad v_5 = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6{,}5 \cdot 10^{23}}{3400000 + 100000}} = 3500 \text{ (m/s)}.$$

Taigi, zondo greitį reikia sumažinti dydžiu

$$\Delta v' = v'_4 - v_5, \quad \Delta v' = 4900 - 3500 = 1400 \text{ (m/s)}.$$

tam panaudojant kuro kiekį

$$\Delta m' = \frac{(m - \Delta m)\Delta v'}{\Delta v' + v}, \quad \Delta m' = \frac{(150 - 72)1400}{1400 + 3000} = 25 \text{ (kg)}.$$

Taigi, visas panaudoto kuro kiekis

$$m' = \Delta m + \Delta m', \quad m' = 72 + 25 = 97 \text{ (kg)}.$$

Panaudojame trečią Keplerio dėsnį. Zondo trajektorija yra pusė elipsės, kurios didžioji pusašė yra Žemės ir Marso orbitų spindulių sumos pusė, o Žemės orbitos pusašė yra spindulys. Tada kelionės trukmei t gauname lygtį

$$\frac{(2t)^2}{T_{Ž}^2} = \frac{\left(\frac{R_{Ž} + R_M}{2}\right)^3}{R_{Ž}^3}.$$

Čia $T_{Ž} = 1$ metai. Tada

$$t = \frac{1 \text{ metai}}{2}\sqrt{\frac{\left(\frac{R_{Ž} + R_M}{2}\right)^3}{R_{Ž}^3}}, \quad t = \frac{1 \text{ metai}}{2}\sqrt{\left(\frac{1{,}5 \cdot 10^{11} + 2{,}3 \cdot 10^{11}}{2 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{11}}\right)^3} = 0{,}71 \text{ metų}.$$

Vertinant laiką nebuvo atsižvelgta į manevrų trukmę pereinant iš vienų orbitų į kitas.

Užduoties aiškinamąjį sprendimą pateikė jos autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2020 08 25.*

Turnyro dalyvių sprendimų aptarimas / FT10-15 ▼

Dauguma sprendusiųjų teisingai nustatė zondo greitį pradinėje orbitoje. Tačiau toliau vertino galimybę nutolti nuo Žemės kaip norima toli ir nenaudojo sąlygoje pateikto planetos traukos srities aprašymo. Tik dalis sprendusiųjų panaudojo Keplerio dėsnius.

Užduoties sprendimų aptarimą parengė jos autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2020 08 25.*

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelė / FT10-15 ▼

Nr.	**Sprendimų vertinimo kriterijus**	**Vertė balais**
1.	Zondo greitis pradinėje orbitoje	1
	Žemės traukos srities riba	1
	Greitis pradinėje orbitoje, reikalingas pasiekti traukos ribą	2
2.	Greitis, reikalingas patekti į Marso traukos sritį	2
3.	Kuro kiekis pagreitinant zondą Marso traukos srityje	2
	Kuro kiekis sulėtinant zondą apskritoje orbitoje	1
4.	Zondo kelionės trukmė	1
5.	Netikslumai (kiekvienam iš kriterijų Nr.1-4)	iki (-1)
Didžiausias galimas sprendimų įvertinimas		10

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelę parengė užduoties autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2020 08 25.*