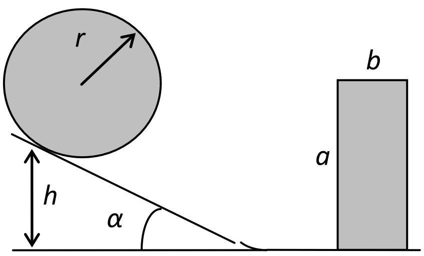
10-ASIS FIZIKOS TURNYRAS
5-oji užduotis Nr. FT10-5 / 2016 10 12 – 2016 11 08

Sąlyga / FT10-5 ▼

Ritinio smūgis tašeliui



Ant nuožulniosios plokštumos, sudarančios kampą $\alpha = 20°$ su horizontu aukštyje $h = 30$ cm padedamas ritinys, kurio spindulys $r = 5$ cm. Nuožulnioji plokštuma išlinkdama pereina į horizontalų paviršių, ant kurio pastatomas stačiakampio gretasienio formos tašelis, kurio masė lygi ritinio masei, o matmenys $a = 10$ cm, $b = 5$ cm. Ritinys paleidžiamas be pradinio greičio. Trinties koeficientas visiems paviršiams vienodas.

1) Kokiam mažiausiam trinties koeficientui esant ritinys riedės neslysdamas?
2) Koks bus ritinio greitis jam riedant horizontaliu paviršiumi (riedėjimo trintis maža)?
3) Kokie bus ritinio ir tašelio greičiai tuoj po tampraus ritinio smūgio į tašelį?

Užduotį parengė mokyklos „Fizikos olimpas" steigėjų tarybos narys, ilgametis mokyklos direktorius (11 m.) ir šio Fizikos turnyro užduočių parengimo spręsti ir jų sprendimų vertinimo komisijos pirmininkas prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2016 10 12.*

Užduoties aiškinamasis sprendimas / FT10-5 ▼

Ieškomąjį trinties koeficientą pažymime μ. Ritinio kampinis pagreitis, kurį gali suteikti trinties jėga

$$\varepsilon = \frac{M}{I}.$$

Čia ritinio inercijos momentas centro atžvilgiu

$$I = mr^2/2,$$

o maksimalus jėgos momentas

$$M = F_{tr}r = \mu mg\cos\alpha\, r.$$

$$\varepsilon = \frac{2\mu mg\cos\alpha\, r}{mr^2} = \frac{2\mu g\cos\alpha}{r}.$$

Sunkio jėga sukuria jėgos momentą

$$M' = mg\sin\alpha\, r$$

ir gali suteikti ritiniui kampinį pagreitį

$$\varepsilon' = \frac{M'}{I'}.$$

Čia I' – ritinio inercijos momentas atramos taško atžvilgiu,

$$I' = I + mr^2 = 3mr^2/2.$$

Tada

$$\varepsilon' = \frac{2mg\sin\alpha\, r}{3mr^2} = \frac{2g\sin\alpha}{3\,r}.$$

Ritinys riedės neslysdamas, jei

$$\varepsilon \geq \varepsilon',$$

$$\frac{2\mu g\cos\alpha}{r} \geq \frac{2g\sin\alpha}{3\,r};\ \mu \geq \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{3};$$

$$\mu_{min} = \frac{\mathrm{tg}\,20°}{3} = 0{,}12.$$

Panaudojame energijos tvermės dėsnį:

$$mg(h - r\cos\alpha\,) = I'\omega^2/2,$$

čia ω – ritinio kampinis greitis.

$$\omega = \frac{2}{r}\sqrt{\frac{g(h - r\cos\alpha\,)}{3}},$$

$$\omega = \frac{2}{0{,}05}\sqrt{\frac{9{,}8 \cdot (0{,}3 - 0{,}05 \cdot (1 - \cos 20°)}{3}} = 39\ \ (\mathrm{s}^{-1}).$$

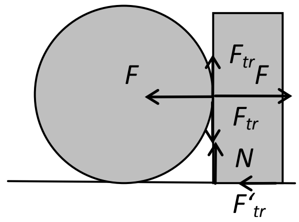
Ritinio masės centro greitis

$$v_0 = \omega r,$$

$$v_0 = 39 \cdot 0{,}05\ = 2\ (\mathrm{m/s}).$$

Laikome, kad smūgio trukmė τ yra maža, todėl į sunkio jėgą smūgio metu neatsižvelgiame. Smūgio metu ritinį ir tašelį veikia tamprios deformacijos sukurtos vienodo dilumo $F(t)$ priešingų krypčių jėgos. Kadangi ritinys sukasi, jo sąlyčio su tašeliu vietoje sukuriamos ritinį ir tašelį veikiančios priešingų krypčių trinties jėgos

$$F_{tr}(t) = \mu F(t).$$



Tašelį veikianti žemyn nukreipta trinties jėga F_{tr} sukuria priešingos krypties tašelio ir pagrindo sąveikos jėgą $N = F_{tr}$, o pastaroji – tašelį veikiančią trinties su pagrindu jėgą

$$F'_{tr} = \mu N = \mu^2 F.$$

Taigi, smūgio metu tašelis slenka veikiamas jėgos $F - F'_{tr}$ ir galėtų virsti sukdamasis apie apatinę dešinę briauną veikiamas jėgos momento tos briaunos atžvilgiu $M_1 = aF'_{tr}/2$. Tačiau tada jėgos N veikimo taškas būtų apatinė dešinė briauna, todėl atsirastų jėgos momentas $M_2 = bF_{tr}$ priešingos krypties momentui M_1. Tų momentų skirtumas

$$M_1 - M_2 = \frac{a\mu^2 F}{2} - b\mu F = \left(\frac{a\mu}{2} - b\right)\mu F,$$

$$\frac{a\mu}{2} - b = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}12}{2} - 0{,}05 = -0{,}044 < 0.$$

Taigi, $M_1 < M_2$, ir tašelis turėtų virsti į kairę pusę. Tai negalima, todėl jėgos N veikimo taškas yra tarp kairiosios ir dešiniosios briaunų (arba ta jėga pasiskirsčiusi visame tašelio atramos plote), jos sukurtas momentas kompensuoja M_1 ir M_2 skirtumą, ir tašelis smūgio metu slysta nesisukdamas ir veikiant jėgai $F'(t) = F(t) - F'_{tr}(t)$ per laiką τ įgauna greitį v':

$$v' = \frac{1}{m}\int_0^{\tau}[F(t) - F'_{tr}(t)]dt = \frac{1 - \mu^2}{m}\int_0^{\tau}F(t)dt.$$

Ritinio centro greitis kinta veikiant horizontaliai jėgai F ir vertikaliai jėgai F_{tr}, tuoj po smūgio to greičio dedamosios v_h ir v_v

$$v_h = v_0 - \frac{1}{m}\int_0^{\tau}F(t)dt,$$

$$v_v = \frac{1}{m}\int_0^{\tau}F_{tr}(t)dt = \frac{\mu}{m}\int_0^{\tau}F(t)dt\,.$$

Ritinio masės centro greitis

$$v = \sqrt{v_h^2 + v_v^2}.$$

Veikiant trinties jėgai pakinta ritinio kampinis greitis:

$$\omega' = \omega - \int_0^{\tau}\frac{aF_{tr}(t)}{2I}dt = \omega - \frac{3\mu}{ma}\int_0^{\tau}F(t)dt\,.$$

Iš energijos tvermės dėsnio besisukančiam ritiniui slystant tašeliu gauname:

$$\frac{I\omega^2}{2} = \frac{I\omega'^2}{2} + A_1.$$

Čia trinties jėgos atliktas dabas

$$A_1 = \int_0^{\tau}F_{tr}(t)\frac{a}{2}\omega''(t)dt, \qquad \omega''(t) = \omega - \int_0^{t}\varepsilon(t')dt' = \omega - \int_0^{t}F_{tr}(t')\frac{a}{2I}dt'\,,$$

$$A_1 = \int_0^\tau F_{tr}(t)\frac{a}{2}\left[\omega - \int_0^t F_{tr}(t')\frac{a}{2I}dt'\right]dt$$
$$= \frac{\mu a\omega}{2}\int_0^\tau F(t)dt - \frac{\mu^2 a^2}{4I}\int_0^\tau F(t)\int_0^t F(t')dt'\,dt,$$
$$\frac{I\omega^2}{2} = \frac{I\omega'^2}{2} + \frac{\mu a\omega}{2}\int_0^\tau F(t)dt \;- \frac{\mu^2 a^2}{4I}\int_0^\tau F(t)\int_0^t F(t')dt'\,dt\,,$$
$$\int_0^\tau F(t)\int_0^t F(t')dt'\,dt = \frac{2I\omega}{\mu a}\int_0^\tau F(t)dt - \frac{2I^2}{\mu^2 a^2}\left(\omega^2 - \omega'^2\right) =$$
$$= \frac{ma\omega}{3\mu}\int_0^\tau F(t)dt - \frac{m^2 a^2}{18\mu^2}\left(\omega^2 - \omega'^2\right).$$

Iš energijos tvermės dėsnio tašeliui slystant pagrindu gauname:

$$\frac{m{v_0}^2}{2} = \frac{m{v_h}^2}{2} + \frac{mv'^2}{2} + A_2,$$
$$A_2 = \int_0^\tau F'_{tr}(t)v"(t)dt,$$
$$v"(t) = \int_0^t a'(t')dt' = \frac{1}{m}\int_0^t [F(t') - F'_{tr}(t')]dt' = \frac{1-\mu^2}{m}\int_0^t F(t')dt'\,,$$
$$A_2 = \frac{\mu^2(1-\mu^2)}{m}\int_0^\tau F(t)\int_0^t F(t')dt'\,dt,$$
$$\frac{m{v_0}^2}{2} = \frac{m{v_h}^2}{2} + \;\frac{mv'^2}{2} + \frac{\mu^2(1-\mu^2)}{m}\int_0^\tau F(t)\int_0^t F(t')dt'\,dt,$$
$$\int_0^\tau F(t)\int_0^t F(t')dt'\,dt = \frac{m^2}{2\mu^2(1-\mu^2)}({v_0}^2 - {v_h}^2 - \;v'^2).$$

Panaudodami išraiškas, gautas iš energijos tvermės dėsnio bei iš judesio kiekio ir judesio kiekio momentų pokyčių, sudarome lygčių sistemą:

$$\begin{cases} v' = \dfrac{1-\mu^2}{m}\displaystyle\int_0^\tau F(t)dt, \\ v_h = v_0 - \dfrac{1}{m}\displaystyle\int_0^\tau F(t)dt, \\ v_v = \dfrac{\mu}{m}\displaystyle\int_0^\tau F(t)dt, \\ \omega' = \omega - \dfrac{3\mu}{ma}\displaystyle\int_0^\tau F(t)dt, \\ \dfrac{ma\omega}{3\mu}\displaystyle\int_0^\tau F(t)dt - \dfrac{m^2a^2}{18\mu^2}(\omega^2 - \omega'^2) = \dfrac{m^2}{2\mu^2(1-\mu^2)}({v_0}^2 - {v_h}^2 - \;v'^2) \end{cases}.$$

Pažymime $\frac{1}{m}\int_0^\tau F(t)dt = x$ ir įrašome ω'. v_h ir v' išraiškas per x į paskutinę lygtį ir padlinam ją iš $\frac{m^2}{\mu^2}$:

$$\frac{a\omega\mu}{3}x - \frac{a^2}{18}\left(\omega^2 - (\omega - \frac{3\mu}{a}x)^2\right) = \frac{1}{2(1-\mu^2)}\{{v_0}^2 - (v_0 - x)^2 - \;[(1-\mu^2)x]^2\},$$
$$\frac{a\omega\mu}{3}x - \frac{\mu a\omega}{3}x + \frac{\mu^2}{2}x^2 = \frac{1}{2(1-\mu^2)}[2v_0x - x^2 - (1-\mu^2)^2x^2],$$
$$\mu^2x^2 = \frac{1}{1-\mu^2}[2v_0x - (2 - 2\mu^2 + \mu^4)x^2],$$
$$[\mu^2(1-\mu^2) + (2 - 2\mu^2 + \mu^4)]x^2 = 2v_0x$$
$$x = \frac{2v_0}{2-\mu^2}.$$

Tada

$$v' = (1-\mu^2)x = \frac{2(1-\mu^2)v_0}{2-\mu^2},\;\; v' = \frac{2\cdot(1-0{,}12^2)\cdot 2}{2-0{,}12^2} = 1{,}99 \text{ (m/s)},$$

$$v_h = v_0 - x = v_0 - \frac{2v_0}{2-\mu^2} = -\frac{\mu^2 v_0}{2-\mu^2}, \ , \ v_h = -\frac{0{,}12^2 \cdot 2}{2-0{,}12^2} = -0{,}015 \text{ (m/s)},$$

$$v_v = \mu x = \mu \cdot \frac{2v_0}{2-\mu^2}, \quad v_v = 0{,}12 \cdot \frac{2 \cdot 2}{2-0{,}12^2} = 0{,}24 \text{ (m/s)},$$

$$v = \sqrt{v_h^2 + v_v^2}, \ v = \sqrt{0{,}015^2 + 0{,}24^2} = 0{,}24 \text{ (m/s)},$$

$$\omega' = \omega - \frac{3\mu}{a} x = \omega - \frac{3\mu}{a} \cdot \frac{2v_0}{2-\mu^2}, \ \omega' = 39 - \frac{3 \cdot 0{,}12}{0{,}05} \cdot \frac{2 \cdot 2}{2 - 0{,}12^2} = 24{,}5 \text{ (s}^{-1}\text{)}.$$

Taigi, tuoj po smūgio ritinys atšoka aukštyn ir atgal, jo kampinis greitis sumažėja:

$$v_v = 0{,}24 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad v_h = -0{,}015 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad v = 0{,}24 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad \omega' = 24{,}5 \text{ s}^{-1}.$$

Tašelis po smūgio pradeda slinkti greičiu

$$v' = (1-\mu^2)x = (1-\mu^2)\frac{2v_0}{2-\mu^2}, \ v' = (1 - 0{,}12^2) \cdot \frac{2 \cdot 2}{2-0{,}12^2} = 1{,}99 \text{ (m/s)}.$$

Užduoties aiškinamąjį sprendimą pateikė jos autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2020 08 20.*

Turnyro dalyvių sprendimų aptarimas / FT10-5 ▼

Pirmoje užduotyje ne visi pastebėjo, kad riedant reikia atsižvelgti į kampinius pagreičius, kuriuos suteikia sunkio jėgos momentas ir trinties jėgos momentas.

Sprendžiant antrąją užduotį ne visi nurodė riedančio ritinio kampinį greitį, net jei į jį ir atsižvelgė.

Trečioje užduotyje beveik niekas neatsižvelgė į tai, kad ritiniui sukantis tamprumo jėga sukuria trinties tarp tašelio ir rutulio jėgą, o pastaroji prispaudžia tašelį prie pagrindo, sukurdama jų trinties jėgą. Taikant energijos tvermės dėsnį būtina atsižvelgti į smūgio metu trinties jėgos atliktą darbą.

Užduoties sprendimų aptarimą parengė jos autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2020 08 20.*

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelė / FT10-5 ▼

Nr.	**Sprendimų vertinimo kriterijus, kai nustatyta:**	**Vertė balais**
1.	Mažiausias trinties koeficientas riedėjimui	2
2.	Ritinio masės centro greitis jam riedant horizontaliu paviršiumi	1
	Ritinio kampinis greitis jam riedant horizontaliu paviršiumi	1
3.	Ritinio masės centro greičio horizontalioji dedamoji tuoj po smūgio	1
4.	Ritinio masės centro greičio vertikalioji dedamoji tuoj po smūgio	1
	Ritinio masės centro greitis tuoj po smūgio	1
	Ritinio kampinis greitis tuoj po smūgio	1
	Tašelio masės centro greitis tuoj po smūgio	2
5.	Netikslumai (kiekvienam iš kriterijų Nr.1-4)	iki (-1)
Didžiausias galimas sprendimų įvertinimas		10

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelę parengė užduoties autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2020 08 20.*