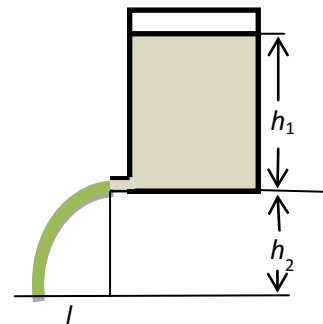


**Sąlyga / FT11-11 ▼**

**Tekančio vandens tyrimas**

Į ritinio formos indą įpilama  $V = 0,5$  l vandens. Prie indo pritaistas vamzdelis, kurio skerspjūvio plotas  $S = 2 \text{ mm}^2$ . Vamzdelio galas nukreiptas horizontaliai, kaip pateikta pav. Pradžioje vamzdelis uždarytas. Vandens lygis inde  $h_1 = 50 \text{ cm}$ , o indas įtvirtintas taip, kad jo dugnas yra aukštyje  $h_2 = 20 \text{ cm}$  virš horizontalaus paviršiaus. Vamzdelį atidarius vanduo pradeda trykšti, ir pradiniu momentu čiurkšlė ant horizontalaus paviršiaus krinta atstumu  $l = 55 \text{ cm}$ . Tekantį vamzdeliu vandenį veikia vandens klampumo sąlygota trinties jėga, proporcinga vandens tekėjimo greičiui. Į čiurkšlės matmenis neatsižvelgiame.



- 1) Kokio didumo trinties jėga veikia tekantį vandenį pradėjus jam tekėti?
- 2) Per kiek laiko iš indo ištekės pusė įpilto vandens?
- 3) Kokiame aukštyje pritaistius horizontalų vamzdelį čiurkšlė pradiniu momentu kris didžiausiu atstumu?
- 4) Koks tas atstumas?

*Užduotį parengė mokyklos „Fizikos olimpas“ steigėjų tarybos narys, ilgametis mokyklos direktorius (11 m.) ir šio Fizikos turnyro užduočių parengimo spręsti ir jų sprendimų vertinimo komisijos pirmininkas prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.*

▲ Šis tekstas svetainėje [www.olimpas.lt](http://www.olimpas.lt) nuolat skelbiamas nuo 2018 02 19.

**Užduoties aiškinamasis sprendimas / FT11-11 ▼**

Pažymime ieškomąją trinties jėgą  $F$ , vandens tekėjimo iš vamzdelio greitį pradiniu momentu  $v$ , vandens paviršiaus leidimosi greitį vandeniui tekant iš indo  $u$ , indo skerspjūvio plotą  $S'$ .

$$S' = \frac{V}{h_1}, \quad V = 0,5 \text{ l} = 0,0005 \text{ m}^3, \quad S' = \frac{0,0005}{0,5} = 0,001 \text{ m}^2,$$

$$u = \frac{S}{S'} v.$$

Kadangi  $\frac{S}{S'} = \frac{2 \cdot 10^{-6}}{0,001} = 2 \cdot 10^{-3}$  yra mažas skaičius, laikome  $u = 0$ . Pradiniu momentu vandens tekėjimo iš vamzdelio greitis pagal horizontaliai mesto kūno judėjimo dėsnį

$$v = l\sqrt{g/2h_2}.$$

Trinties jėga  $F$  sukuria tekančiam vamzdeliu vandeniui slėgį  $p' = F/S$ . Taikome Bernulio lygtį vandens paviršiui inde ir ištekimui į vamzdelį vietai

$$0 = \frac{\rho v^2}{2} - \rho g h_1 + \frac{F}{S},$$

$$F = \rho S (gh_1 - v^2/2) = \rho S g \left( h_1 - \frac{l^2}{4h_2} \right),$$

$$F = 1000 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot 9,8 \left( 0,5 - \frac{0,55^2}{4 \cdot 0,2} \right) = 0,0024 \text{ (N)}.$$

Trinties jėga  $F$  proporcinga vandens tekėjimo greičiui,  $F'(t) = kv'(t)$ . Pradiniu momentu

$$F = kv,$$

$$k = \frac{F}{v} = \frac{\rho S g \left( h_1 - \frac{l^2}{4h_2} \right)}{\left( l \sqrt{\frac{g}{2h_2}} \right)} = \rho S \left( \frac{2h_1 h_2}{l} - \frac{l}{2} \right) \sqrt{\frac{g}{2h_2}},$$

$$k = 1000 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \left( \frac{2 \cdot 0,5 \cdot 0,2}{0,55} - \frac{0,55}{2} \right) \sqrt{\frac{9,8}{2 \cdot 0,2}} = 0,00088 \text{ (kg/s)}.$$

Tekant vandeniui jo lygis inde  $h'(t)$  mažėja, todėl mažėja tekėjimo greitis  $v'(t)$  ir trinties jėga  $F'(t)$ . Vėl taikome Bernulio lygtį vandens paviršiu inde ir ištekejimo į vamzdelį vietai

$$\frac{\rho v'(t)^2}{2} - \rho g h'(t) + \frac{F'(t)}{S} = 0,$$

$$\frac{\rho v'(t)^2}{2} - \rho g h'(t) + \frac{kv'(t)}{S} = 0,$$

$$h'(t) = \frac{1}{g} \left( \frac{v'(t)^2}{2} + \frac{kv'(t)}{\rho S} \right),$$

$$dh' = \frac{dv'}{g} \left( v' + \frac{k}{\rho S} \right).$$

Bet

$$dh' = -\frac{S}{S'} v' dt,$$

$$\frac{S}{S'} v' dt = -\frac{dv'}{g} \left( v' + \frac{k}{\rho S} \right),$$

$$\frac{S}{S'} dt = -\frac{dv'}{g} \left( 1 + \frac{k}{v' \rho S} \right),$$

$$\int \frac{S}{S'} dt = -\int \frac{1}{g} \left( 1 + \frac{k}{v' \rho S} \right) dv'$$

$$\frac{S}{S'} t = -\frac{1}{g} \left( v'(t) + \frac{k}{\rho S} \ln v'(t) \right) + C,$$

Integravimo konstantą  $C$  nustatome iš sąlygos  $v'(0) = v$ :

$$C = \frac{1}{g} \left( v + \frac{k}{\rho S} \ln v \right),$$

$$t = \frac{S'}{S} \frac{1}{g} \left( v - v'(t) + \frac{k}{\rho S} \ln \frac{v}{v'(t)} \right),$$

$$v'^2 + 2 \frac{k}{\rho S} v' - 2gh' = 0,$$

$$v' = -\frac{k}{\rho S} + \sqrt{\left(\frac{k}{\rho S}\right)^2 + 2gh'}$$

Kai išteka pusė vandens

$$h' = h_1/2,$$

$$v' = -\frac{k}{\rho S} + \sqrt{\left(\frac{k}{\rho S}\right)^2 + gh_1}.$$

Išraiškos griozdiškos, todėl įrašome skaičius.

$$v = l\sqrt{g/2h_2} = 0,55 \sqrt{\frac{9,8}{2 \cdot 0,2}} = 2,72 \text{ (m/s)},$$

$$\frac{k}{\rho S} = \frac{0,00088}{1000 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} = 0,44 \text{ (m/s)},$$

$$v' = -0,44 + \sqrt{(0,44)^2 + 9,8 \cdot 0,5} = 1,82 \text{ (m/s)},$$

$$t = \frac{0,001}{2 \cdot 10^{-6}} \frac{1}{9,8} \left( 2,72 - 1,82 + 0,44 \ln \frac{2,72}{1,82} \right) = 55 \text{ (s)}.$$

Kai vamzdelis yra aukštyje  $h''$  virš indo dugno čiurkšlė išteka greičiu

$$v'' = -\frac{k}{\rho S} + \sqrt{\left(\frac{k}{\rho S}\right)^2 + 2g(h_1 - h'')}$$

ir krinta ant horizontalaus paviršiaus atstumu

$$l'' = \left( -\frac{k}{\rho S} + \sqrt{\left(\frac{k}{\rho S}\right)^2 + 2g(h_1 - h'')} \right) \sqrt{\frac{2(h_2 + h'')}{g}}.$$

Randame funkcijos  $l'' = f(h'')$  maksimumą.

$$\begin{aligned} f(h'') &= \left( -0,44 + \sqrt{10 - 19,6h''} \right) \sqrt{0,0408 + 0,204h''} \\ &= 2 \left( -0,1 + \sqrt{0,51 - h''} \right) \sqrt{0,2 + h''}, \end{aligned}$$

$$\frac{df(h'')}{dh''} = 0,$$

$$\frac{-0,2 - h'' + (-0,1 + \sqrt{0,51 - h''})\sqrt{0,51 - h''}}{\sqrt{0,51 - h''}\sqrt{0,2 + h''}} = 0,$$

$$0.31 - 2h'' = 0,1\sqrt{0,51 - h''},$$

$$4h''^2 - 1,23h'' + 0.091 = 0$$

$$h'' = \frac{1.23 \pm \sqrt{1.23^2 - 4 \cdot 4 \cdot 0.091}}{2 \cdot 4}, \quad h'' = 0.18\text{m}, \quad h'' = 0,12\text{ m}.$$

Imdami tas  $h''$  vertes gauname  $l'' = 0,58\text{ m}$  ir  $l'' = 0,59\text{ m}$ .

Ieškomasis atstumas atitinka  $h'' = 0,12\text{ m}$  ir lygus

$$l'' = 2 \left( -0,1 + \sqrt{0,51 - 0,12} \right) \sqrt{0,2 + 0,12} = 0,59\text{ (m)}.$$

*Užduoties aiškinamąjį sprendimą pateikė jos autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.*

▲ Šis tekstas svetainėje [www.olimpas.lt](http://www.olimpas.lt) nuolat skelbiamas nuo 2020 07 28.

#### **Turnyro dalyvių sprendimų aptarimas / FT11-11 ▼**

Dauguma sprendusiųjų su užduotim susitvarkė.

*Užduoties sprendimų aptarimą parengė jos autorius prof. habil. dr. Antanas Rinvidas Bandzaitis .*

▲ Šis tekstas svetainėje [www.olimpas.lt](http://www.olimpas.lt) nuolat skelbiamas nuo 2020 07 28.

#### **Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelė / FT11-11 ▼**

<b>Nr.</b>	<b>Sprendimų vertinimo kriterijus</b>	<b>Vertė balais</b>
1.	Nustatyta trinties jėga	2
2.	Nustatyta, per kiek laiko iš indo ištekės pusė įpildo vandens	3
3.	Nustatyta, kokiam aukštyje pritačius horizontalų vamzdelį čiurkšlė pradiniu momentu kris didžiausiu atstumu	3
4.	Nustatytas čiurkšlės kritimo atstumas	2
5.	Netikslumai (p. 1-4)	Iki (-2)
Didžiausias galimas sprendimų įvertinimas		10

*Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelę parengė užduoties autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.*

▲ Šis tekstas svetainėje [www.olimpas.lt](http://www.olimpas.lt) nuolat skelbiamas nuo 2020 07 28.