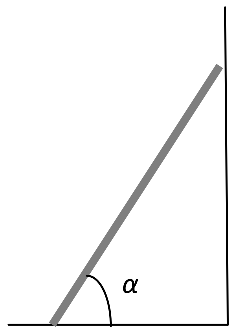
11-ASIS FIZIKOS TURNYRAS
13-oji užduotis Nr. FT11-13 / 2018 04 06 – 05 03

Sąlyga / FT11-13▼

Slystančio strypo virtimas



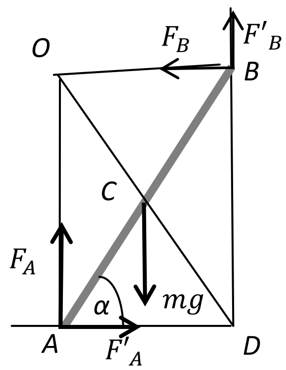
Ant grindų stovi ilgio $l = 1$ m plonas homogeninis strypas, atremtas į sieną, kaip pavaizduota paveiksle. Strypas yra plokštumoje, statmenoje sienai ir grindims.

1) Kokiam mažiausiam kampui α esant strypas nejudės, jei strypo ir sienos bei strypo ir grindų trinties koeficientas $\mu = 0{,}3$?
2) Kokiu pagreičiu pradės judėti strypo masės centras, jei strypas pastatomas kampu $\alpha' = 50°$ ir paleidžiamas be pradinio greičio, o trintis yra maža?
3) Strypo galams slystant grindimis ir siena kampas α tarp grindų ir strypo kinta. Kokiam kampui tarp strypo ir grindų plokštumos α'' esant išnyks sąlytis tarp strypo ir sienos (trintis yra maža)?
4) Koks bus strypo masės centro greitis prieš pat strypui atsitrenkiant į grindis?
5) Įvertinkite, kokiu atstumu nuo sienos atsitrenks į grindis strypo masės centras?

Užduotį parengė mokyklos „Fizikos olimpas" steigėjų tarybos narys, ilgametis mokyklos direktorius (11 m.) ir šio Fizikos turnyro užduočių parengimo spręsti ir jų sprendimų vertinimo komisijos pirmininkas prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2018 04 06.*

Užduoties aiškinamasis sprendimas / FT11-13 ▼



Strypą veikia sunkio jėga mg, grindų ir sienos reakcijos jėgos F_{A} ir F_{B} bei jų sukurtos trinties jėgos $F'_{\mathrm{A}} = \mu F_{\mathrm{A}}$ ir $F'_{\mathrm{B}} = \mu F_{\mathrm{B}}$. strypas nejudės, jei tų visų jėgų suma ir jų momentų suma bus 0. Gauname:

$$mg = F_{\mathrm{A}} + F'_{\mathrm{B}},$$

$$F'_{\mathrm{A}} = F_{\mathrm{B}}.$$

Taško *A* atžvilgiu jėgos momentai

$$mg\cos\alpha \cdot \frac{l}{2} = (F_{\mathrm{B}}\sin\alpha + F'_{\mathrm{B}}\cos\alpha)l.$$

Iš paskutinės lygties gauname

$$\cos\alpha \cdot \frac{mg}{2} = F_{\mathrm{B}}(\sin\alpha + \mu\cos\alpha).$$

Iš kitų lygčių gauname

$$mg = \frac{F_{\mathrm{B}}}{\mu} + \mu F_{\mathrm{B}}.$$

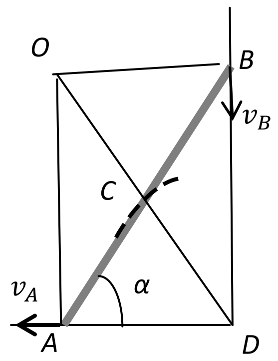
$$\cos\alpha \cdot \frac{\frac{1}{\mu} + \mu}{2} = \sin\alpha + \mu\cos\alpha,$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\frac{1}{\mu} + \mu}{2} - \mu = \frac{1 - \mu^2}{2\mu},$$

$$\alpha = \text{arctg}\frac{1-\mu^2}{2\mu}, \quad \alpha = \text{arctg}\frac{1-0{,}3^2}{2\cdot 0{,}3} = \text{arctg}\frac{1-0{,}3^2}{2\cdot 0{,}3} = 56{,}6°.$$

Strypui pajudėjus jo galai A ir B slysta grindimis ir siena greičiais v_A ir v_B, taigi, strypas suksis apie momentinį sukimosi centrą O.

Strypo masės centro C judėjimo trajektorija yra lankas apskritimo, kurio centras D. Taško O atžvilgiu strypą veiks jėgos momentas (jėgų F_A ir F_B momentai 0)



$$N' = \frac{l}{2}mg\cos\alpha'$$

ir suteiks jam kampinį pagreitį

$$\varepsilon' = \frac{N'}{I}.$$

Čia I – strypo inercijos momentas taško O atžvilgiu,

$$I = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{3}.$$

Tada strypo masės centro (taško C) pagreitis

$$a' = \frac{l}{2}\varepsilon' = \frac{l}{2}\cdot\frac{\frac{l}{2}mg\cos\alpha'}{\frac{ml^2}{3}} = \frac{3g\cos\alpha}{4},$$

$$a' = \frac{3\cdot 9{,}8\cos 50°}{4} = 4{,}72 \text{ (m/s}^2\text{)}.$$

Pagreičio kryptis statmena CD ir sudaro kampą $\beta = 90° - \alpha' = 40°$ su grindų plokštuma.

Strypo masės centro C judėjimo trajektorija yra lankas apskritimo, kurio centras D. Kai strypas sukasi kampiniu greičiu $\omega(t)$, įcentrinį pagreitį $a_{įc} = \omega(t)^2\frac{l}{2}$ jam suteikia sunkio jėgos dedamoji, nukreipta CD kryptimi, todėl mažėja prispaudimo jėga $F_{||}(t) = mg\sin\alpha(t) - m\omega(t)^2\frac{l}{2}$. Kai kampinis greitis padidėja iki ω' sunkio jėgos dedamosios nebepakanka, ir masės centro C judėjimo trajektorija pakinta, strypo galas B atitrūksta nuo sienos. Ribiniu atveju

$$m\omega'^2\frac{l}{2} = mg\sin\alpha''.$$

Kampiniam greičiui nustatyti panaudojame energijos tvermės dėsnį. Strypo sudaromam su grindimis kampui pakitus nuo α' iki α'' jo masės centro aukštis pakinta dydžiu

$$\Delta h = \frac{l}{2}(\sin\alpha' - \sin\alpha'').$$

Strypas įgauna kinetinę energiją

$$E_k = \frac{I\omega'^2}{2} = \frac{ml^2\omega'^2}{6},$$

$$\frac{ml^2\omega'^2}{6} = mg\Delta h = mg\frac{l}{2}(\sin\alpha' - \sin\alpha''),$$

$$\omega'^2 = \frac{3g}{l}(\sin\alpha' - \sin\alpha'')$$

Įrašę ω' gauname

$$m\frac{3g}{l}(\sin\alpha' - \sin\alpha'')\cdot\frac{l}{2} = mg\sin\alpha''$$

$$\sin\alpha'' = \frac{3}{5}\sin\alpha',$$

$$\alpha'' = \arcsin(\frac{3}{5}\sin\alpha'), \qquad \alpha'' = \arcsin(\frac{3}{5}\sin 50°) = 27{,}4°$$

Strypo galui B atsiskyrus nuo sienos jo kampinis greitis

$$\omega' = \sqrt{\frac{2g}{l}\sin\alpha''},$$

Strypą veikia vertikali sunkio jėga mg taške C ir vertikali grindų reakcijos jėga F_A taške A, todėl jo masės centro greičio horizontalioji dedamoji nebekinta. Ji lygi

$$v_h = \omega' \frac{l}{2} \sin \alpha'' = \frac{l}{2} \sin \alpha'' \sqrt{\frac{2g}{l} \sin \alpha''} = \sqrt{\frac{gl}{2} \sin^3 \alpha''}.$$

Strypo kampinis greitis didėja, prieš pat strypui atsitrenkiant į grindis jį pažymime ω''. Strypo masės centro greitis taip pat didėja, prieš pat strypui atsitrenkiant į grindis jį pažymime v, dedamosios v_h ir v_v,

$$v_v = \omega'' \frac{l}{2},$$

$$v = \sqrt{{v_h}^2 + {v_v}^2} = \sqrt{{v_h}^2 + \left(\omega'' \frac{l}{2}\right)^2}.$$

Pagal energijos tvermės dėsnį prieš pat strypui atsitrenkiant į grindis

$$mg \frac{l}{2} \sin \alpha' = \frac{I_C \omega''^2}{2} + \frac{mv^2}{2}.$$

Čia $I_C = \frac{ml^2}{12}$ yra strypo inercijos momentas masės centro atžvilgiu.

$$mg \frac{l}{2} \sin \alpha' = \frac{ml^2 \omega''^2}{24} + \frac{m{v_h}^2}{2} + \frac{ml^2 \omega''^2}{8} = \frac{ml^2 \omega''^2}{6} + \frac{mgl}{4} \sin^3 \alpha'',$$

$$\omega''^2 = \frac{3g}{2l} (2 \sin \alpha' - \sin^3 \alpha''),$$

$$v = \sqrt{{v_h}^2 + \left(\omega'' \frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{gl}{2} \sin^3 \alpha'' + \frac{3g}{2l} (2 \sin \alpha' - \sin^3 \alpha'') \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{gl}{8} (6 \sin \alpha' + \sin^3 \alpha'')},$$

$$v = \sqrt{\frac{9{,}8 \cdot 1}{8} (6 \sin 50° + \sin^3 27{,}4°)} = 2{,}4 \text{ (m/s)}.$$

Strypo galui *B* atsiskyrus nuo sienos jo masės centas nutolęs nuo sienos atstumu

$$s'' = \frac{l}{2} \cos \alpha''.$$

Toliau masės centras pastoviu greičiu v_h tolsta nuo sienos, ir per strypo kritimo laiką t nutolsta atstumu $s' = v_h t$. Kritimo laikas gali būti išreikštas formule

$$t = \frac{\alpha''}{\omega_{vid}},$$

čia ω_{vid} yra strypo vidutinis kampinis greitis jo sudaromam su grindimis kampui kintant nuo α'' iki 0. Apytiksliai jis lygus

$$\omega_{vid} = \frac{\omega' + \omega''}{2}.$$

Tada ieškomasis atstumas

$$s = s' + s'' = \frac{2 v_h \alpha''}{\omega' + \omega''} + \frac{l}{2} \cos \alpha'' = \frac{2\alpha'' \sqrt{\frac{gl}{2} \sin^3 \alpha''}}{\sqrt{\frac{2g}{l} \sin \alpha''} + \sqrt{\frac{3g}{2l} (2 \sin \alpha' - \sin^3 \alpha'')}} + \frac{l}{2} \cos \alpha'' =$$

$$= \frac{l \alpha'' \sqrt{2 \sin^3 \alpha''}}{\sqrt{2 \sin \alpha''} + \sqrt{3 \sin \alpha' - \frac{3}{2} \sin^3 \alpha''}} + \frac{l}{2} \cos \alpha'' =$$

$$= \frac{l\alpha'' \sin\alpha''}{1+\sqrt{2{,}5-0{,}75\sin^2\alpha''}} + \frac{l}{2}\cos\alpha'',$$

$$s = \frac{1\cdot 0{,}478\sin 27{,}4°}{1+\sqrt{2{,}5-0{,}75\sin^2 27{,}4°}} + \frac{l}{2}\cos 27{,}4° = 0{,}511\ (\mathrm{m}).$$

Tiksliau ω_{vid} galime apskaičiuoti nustatę kampinio greičio kitimo matematinę išraišką. Strypui atsiskyrus nuo sienos jis sukasi apie tašką A veikiamas jėgos momento $N = mgl/2\cos\alpha$, o inercijos momentas $I = \frac{ml^2}{3}$, todėl jo kampinis pagreitis

$$\varepsilon(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{N(t)}{I} = \frac{\frac{l}{2}mg\cos\alpha(t)}{\frac{ml^2}{3}} = \frac{3g\cos\alpha(t)}{2l}$$

Panaudoję išraišką $-\frac{d\alpha}{dt} = \omega$ pakeičiame:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{d\omega}{d\alpha}\omega,$$

$$\frac{d\omega}{d\alpha}\omega = -\frac{3g\cos\alpha}{2l},$$

$$\omega d\omega = -\frac{3g\cos\alpha}{2l}d\alpha,$$

$$\int \omega d\omega = -\int \frac{3g\cos\alpha}{2l}d\alpha,$$

$$\frac{\omega^2}{2} = -\frac{3g\sin\alpha}{2l} + C.$$

Integravimo konstantą C nustatom iš sąlygos

$$\omega(\alpha'') = \sqrt{\frac{2g}{l}\sin\alpha''}$$

$$C = \frac{g}{l}\sin\alpha'' + \frac{3g\sin\alpha''}{2l} = \frac{5g\sin\alpha''}{2l},$$

$$\omega^2 = -\frac{3g\sin\alpha}{l} + \frac{5g\sin\alpha''}{l} = \frac{g}{l}(5\sin\alpha'' - 3\sin\alpha),$$

$$\omega(\alpha) = \sqrt{\frac{g}{l}(5\sin\alpha'' - 3\sin\alpha)} = \sqrt{\frac{3g}{l}(\sin\alpha' - \sin\alpha)}.$$

Ieškomąjį laiką galime išreikšti taip:

$$t = \int_0^{\alpha''} \frac{d\alpha}{\omega(\alpha)}.$$

Įrašius $\omega(\alpha)$ gautas integralas nėra išreiškiamas elementariosiomis funkcijomis. Apytikriai gauname $t = 0{,}125$ s. imant $t = \frac{2\alpha''}{\omega' + \omega''}$ gauname $t = 0{,}123$ s.

Užduoties aiškinamąjį sprendimą pateikė jos autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt *nuolat skelbiamas nuo 2020 07 28.*

Turnyro dalyvių sprendimų aptarimas / FT11-13 ▼

Vertinant strypo atsiskyrimą nuo sienos daugelis naudojo sąlygą – lygi 0 prie sienos esančio strypo galo pagreičio horizontalioji dedamoji. Tai netikslu, reikia imti masės centro pagreitį. Arba naudoti įcentrinį pagreitį. Vertinant atstumą nuo sienos panaudotas horizontaliai mesto kūno judėjimas. Tik tada reikėtų imti ne laisvojo kritimo pagreitį, o masės centro pagreičio vertikaliąją dedamąją.

Užduoties sprendimų aptarimą parengė jos autorius prof. habil. dr. Antanas Rinvidas Bandzaitis .

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2020 07 28.*

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelė / FT11-13 ▼

Nr.	**Sprendimų vertinimo kriterijus**	**Vertė balais**
1.	Nustatytas kampas, kuriam esant strypas nejuda	2
2.	Nustatytas masės centro pagreitis	2
3.	Nustatyta, kokiam kampui tarp strypo ir grindų plokštumos esant išnyks sąlytis tarp strypo ir sienos	2
4.	Nustatytas strypo masės centro greitis prieš pat strypui atsitrenkiant į grindis	2
5.	Nustatytas strypo masės centro atstumas nuo sienos strypui atsitrenkiant į grindis	2
5.	Netikslumai (p. 1-5)	Iki (-2)
Didžiausias galimas sprendimų įvertinimas		10

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelę parengė užduoties autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2020 07 28.*