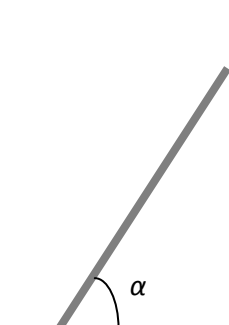


Sąlyga / FT11-14 ▼

Nenustovintis atremtas strypas

Ant grindų stovi ilgio $l = 1$ m plonas homogeninis strypas, atremtas į sieną, kaip parodyta pav. Strypas yra plokštumoje, statmenoje sienai ir grindims. Strypo ir sienos bei strypo ir grindų trinties koeficientas $\mu = 0,3$.



- 1) Kokiu pagreičiu pradės judėti strypo masės centras, jei strypas pastatomas kampu $\alpha' = 50^\circ$ ir paleidžiamas be pradinio greičio?
- 2) Strypo padėtį jo galams slystant grindimis ir siena apibūdina kampas α . Parašykite strypo judėjimo lygtį.
- 3) Strypo galams slystant grindimis ir siena strypo kampinis greitis nuo kampo α priklauso taip (kampai išreikšti radianais):

$$\omega(\alpha)^2 = \frac{3}{1 + \left(\frac{3\mu}{2}\right)^2} \frac{g}{l} \left[e^{\frac{3\mu(\alpha' - \alpha)}{2}} \left((1 - 3\mu^2) \sin \alpha' + \frac{7\mu}{2} \cos \alpha' \right) - \left((1 - 3\mu^2) \sin \alpha + \frac{7\mu}{2} \cos \alpha \right) \right].$$

Kokiam kampui tarp strypo ir grindų plokštumos α'' esant išnyks sąlytis tarp strypo ir sienos?

- 4) Koks bus strypo masės centro greitis?

Užduotį parengė mokyklos „Fizikos olimpas“ steigėjų tarybos narys, ilgametis mokyklos direktorius (11 m.) ir šio Fizikos turnyro užduočių parengimo spęsti ir jų sprendimų vertinimo komisijos pirmininkas prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2018 04 23.

Užduoties aiškinamasis sprendimas / FT11-14 ▼

Strypo galams A ir B slystant grindimis ir siena strypas suksis apie momentinį sukimosi centrą O , o jo masės centras C judės apskritimo lanku apie tašką D . Strypą veikia sunkio jėga mg , grindų ir sienos reakcijos jėgos N_A ir N_B bei trinties jėgos $F_A = \mu N_A$ ir $F_B = \mu N_B$. Panaudojam koordinatės x ir y . Strypo masės centro pagreičio a horizontaliąją ir vertikaliją dedamąsias pažymime a_x ir a_y .

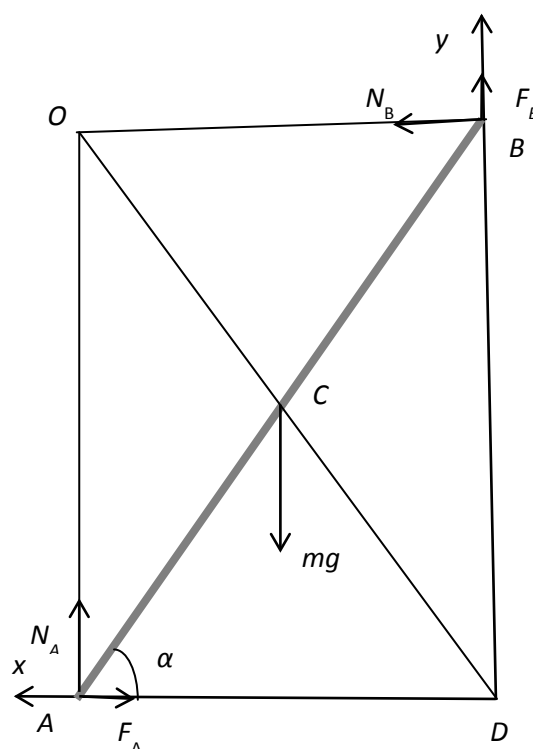
$$a_x = a \sin \alpha = \frac{N_B - F_A}{m},$$

$$a_y = a \cos \alpha = \frac{mg - N_A - F_B}{m}.$$

Strypui pradedant slysti jo kampinis pagreitis ir masės centro pagreitis susieti sąryšiu

$$a = \frac{\varepsilon l}{2}.$$

Kampinį pagreitį nustatome pagal sukimosi



dinamikos lygtį taško D atžvilgiu:

$$\varepsilon = \frac{N_A l \cos \alpha - N_B l \sin \alpha - mg \frac{l}{2} \cos \alpha}{ml^2/3}.$$

Iš pateiktų lygčių išreiškiame a :

$$\varepsilon = \frac{3g(\cos \alpha - 2\mu \sin \alpha)}{2(5+2\mu^2)}, \quad a = \frac{3g(\cos \alpha - 2\mu \sin \alpha)}{5+2\mu^2}.$$

$$a = \frac{3 \cdot 9,8(\cos 50^\circ - 2 \cdot 0,3 \cdot \sin 50^\circ)}{5+0,3^2} = 1,06 \text{ (m/s}^2\text{)}.$$

Masės centro koordinatės yra

$$x_C = \frac{l}{2} \cos \alpha, \quad y_C = \frac{l}{2} \sin \alpha,$$

$$v_{Cx} = -\frac{l}{2} \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt},$$

$$a_{Cx} = -\frac{l}{2} \cos \alpha \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 - \frac{l}{2} \sin \alpha \cdot \frac{d^2\alpha}{dt^2}.$$

$$v_{Cy} = \frac{l}{2} \cos \alpha \frac{d\alpha}{dt},$$

$$a_{Cy} = -\frac{l}{2} \sin \alpha \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \frac{l}{2} \cos \alpha \cdot \frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

$$a_{Cx} = \frac{N_B - F_A}{m} = \frac{N_B - \mu N_A}{m},$$

$$a_{Cy} = \frac{mg - N_A - F_B}{m} = \frac{mg - N_A - \mu N_B}{m}.$$

Kampinį pagreitį nustatome pagal sukimosi dinamikos lygtį taško D atžvilgiu:

$$\varepsilon = \frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{N_A l \cos \alpha - N_B l \sin \alpha - mg \frac{l}{2} \cos \alpha}{\frac{ml^2}{3}}.$$

Iš pateiktų lygčių eliminuojame N_A , N_B , F_A , F_B , a_{Cx} , a_{Cy} ir gauname ieškomąją lygtį:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{3\mu}{(5+2\mu^2)} \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 - \frac{3g[\cos \alpha - 2\mu \sin \alpha]}{2(5+2\mu^2)} = 0.$$

Stypo masės centro C judėjimo trajektorija yra lankas apskritimo, kurio centras D . Kai strypas sukasi kampiniu greičiu $\omega(t)$, įcentrinį pagreitį $\omega(t)^2 l/2$ jam suteikia sunkio jėgos dedamoji, nukreipta CD kryptimi, todėl mažėja prispaudimo jėga $F_{\parallel}(t) = mg \sin \alpha(t) - m\omega(t)^2 l/2$. Kai kampinis greitis padidėja iki ω' sunkio jėgos dedamosios nebepakanka, ir masės centro C judėjimo trajektorija pakinta, stryo galas B atitrūksta nuo sienos. Ribiniu atveju

$$m\omega'^2 \frac{l}{2} = mg \sin \alpha''.$$

Irašę ω'^2 gauname

$$\frac{3}{1 + \left(\frac{3\mu}{2}\right)^2} \left[e^{\frac{3\mu(\alpha' - \alpha'')}{2}} \left((1 - 3\mu^2) \sin \alpha' + \frac{7\mu}{2} \cos \alpha' \right) - \right.$$

$$-\left(\sin \alpha'' (1 - 3\mu^2) + \frac{7\mu}{2} \cos \alpha''\right) \cdot \frac{1}{2} = \sin \alpha''.$$

Gauta transcendentinė lygti tiksliai neišsprendžiama. Sprendžiame apytiksliai skaitiniu metodu įrašę $\mu = 0,3$ ir $\alpha' = 0,873$. Gauname lygtį

$$2,414e^{-0,45\alpha''} - 1,911 \sin \alpha'' - 1,130 \cos \alpha'' = 0,$$

$$e^{-0,45\alpha''} - 0,792 \sin \alpha'' - 0,468 \cos \alpha'' = 0.$$

Imame pradines vertes $\alpha'' = 0$ ir $\alpha'' = 0,87 (=50^\circ)$ ir taikome stygų metodą funkcijai

$$f(\alpha'') = e^{-0,45\alpha''} - 0,792 \sin \alpha'' - 0,468 \cos \alpha''.$$

Sudarome lentelę:

α''	0	0,87	0,607	0,480	0,512	0,50985	0,50982
$f(\alpha'')$	0,532	-0,231	-0,075	0,0246	0,0014	$-2,4 \cdot 10^{-5}$	$2,5 \cdot 10^{-8}$

Taigi, $\alpha'' = 0,51 = 29^\circ$.

Stryo galui B atsiskyrus nuo sienos jo kampinis greitis

$$\omega' = \sqrt{\frac{2g}{l} \sin \alpha''},$$

todėl jo masės centro greitis

$$v' = \omega' \frac{l}{2} = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{2g}{l} \sin \alpha''} = \sqrt{2gl \sin \alpha''}, \quad v' = \sqrt{2 \cdot 9,5 \cdot 1 \cdot \sin 29^\circ} = 3,1 \text{ (m/s)}.$$

Greitis bus statmenas CD , taigi, sudarys kampą $\beta = 90^\circ - \alpha''$, $\beta = 61^\circ$ su grindų plokštuma.

Užduoties aiškinamąjį sprendimą pateikė jos autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2020 07 28.

Turnyro dalyvių sprendimų aptarimas / FT11-14 ▼

Sprendžiant užduotį reikėjo panaudoti sukamojo judėjimo dinamiką. Tačiau tai galima tik inercinėje koordinacių sistemoje, o strypo masės centras juda su pagreičiu.

Užduoties sprendimų aptarimą parengė jos autorius prof. habil. dr. Antanas Rinvidas Bandzaitis.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2020 07 28.

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelė / FT11-14 ▼

Nr.	Sprendimų vertinimo kriterijus	Vertė balais
1.	Nustatytas pagreitis	2
2.	Parašyta lygtis	3
3.	Nustatytas atsiskyrimo kampas	3
4.	Nustatytas strypo masės centro pagreitis	2
5.	Netikslumai (p. 1-4)	Iki (-2)
Didžiausias galimas sprendimų įvertinimas		10

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelę parengė užduoties autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2020 07 28.