12-ASIS FIZIKOS TURNYRAS
11-oji užduotis Nr. FT12-11 / 2019 02 25 – 2019 03 24

Sąlyga / FT12-11 ▼

Plūduriuojanti stiklinė

Ritinio formos stiklinė plūduriuoja vandenyje. Stiklinės matmenys: aukštis $h = 8{,}42$ cm, jos pagrindo spindulys $r = 3{,}56$ cm, stiklinės masė $m = 190$ g, jos sienelės storis $a = 0{,}31$ cm, dugno storis $b = 0{,}38$ cm.

1) Kodėl stiklinė plūduriuoja pakrypusi?
2) Kokį kampą su vertikale sudaro plūduriuojančios stiklinės simetrijos ašis esant stabiliai pusiausvyrai?
3) Kiek mažiausiai arbatos reikia įpilti į stiklinę kad ji plūduriuotų vertikali?

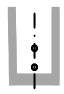
Nuoroda: $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx = \pi/2$, $\int_{-1}^{1}x\sqrt{1-x^2}dx = 0$, $\int_{-1}^{1}x^2\sqrt{1-x^2}dx = \pi/8$.

Užduotį parengė mokyklos „Fizikos olimpas" steigėjų tarybos narys, ilgametis mokyklos direktorius (11 m.) ir šio Fizikos turnyro užduočių parengimo spręsti ir jų sprendimų vertinimo komisijos pirmininkas prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2019 02 25.*

Užduoties aiškinamasis sprendimas / FT12-11 ▼

Stiklinės masės centro *C* aukštį nuo stiklinės dugno h' nustatome laikydami, kad stiklo tankis *d* yra visur vienodas, dugnas ir sienelės yra taisyklingi ritiniai, dugno ir sienelių masės m_d ir m_s proporcingos jų tūriams. Gauname:



$$m_d = \pi(r-a)^2 bd,$$
$$m_s = \pi[r^2-(r-a)^2]hd = \pi ha(2r-a)d$$
$$m_d + m_s = m,$$
$$m_d = \frac{m}{1+\frac{ha(2r-a)}{(r-a)^2 b}},$$
$$m_d = \frac{190}{1+\frac{8{,}42\cdot 0{,}31\cdot(2\cdot 3{,}56-0{,}31)^2}{(3{,}56-0{,}31)^2\cdot 0{,}38}} = 35\ \text{(g)},$$
$$m_s = \frac{m}{1+\frac{(r-a)^2 b}{ha(2r-a)}},\quad m_s = \frac{190}{1+\frac{(3{,}56-0{,}31)^2\cdot 0{,}38}{8{,}42\cdot 0{,}31\cdot(2\cdot 3{,}56-0{,}31)^2}} = 155\ \text{(g)}.$$

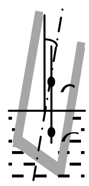
Dugnas ir sienelės yra taisyklingi ritiniai, jų masių centrai yra simetrijos ašyje atitinkamai $b/2$ ir $h/2$ aukštyje virš stiklinės dugno. Tada stiklinės masės centras yra aukštyje

$$h' = \frac{\frac{m_d b}{2}+\frac{m_s h}{2}}{m},\quad h' = \frac{\frac{35\cdot 0{,}38}{2}+\frac{155\cdot 8{,}42}{2}}{190} = 3{,}47\ \text{(cm)}.$$

Jei stiklinė plūduriuotų vertikali, ji būtų panirusi aukščiu $h" = m/\pi r^2 d'$.
Čia $d' = 1\ \text{g/cm}^3$ yra vandens tankis.

$$h" = 190/(\pi\cdot 3{,}56^2\cdot 1) = 4{,}77\ \text{(cm)}.$$

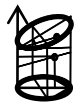
Stiklinės išstumto vandens masės centras, o tuo pačiu – Archimedo jėgos pridėjimo taškas *C*' būtų aukštyje $h''' = h"/2 = 2{,}38$ cm.



Taigi, $h''' < h'$, todėl stiklinės pusiausvyra būtų nestabili, nežymiai pakrypusi stiklinė virstų į šoną.

Stiklinei virstant keisis jos išstumto vandens masės centro padėtis. Pusiausvyra bus tada, kai pasvirusios stiklinės išstumto vandens masės centras *C'* ir stiklinės masės centras *C* bus vienoje vertikalėje. Nustatome stiklinės, pasvirusios kampu α, išstumto vandens masės centro *C'* vietą. Akivaizdu, kad išstumto vandens masės centras *C'* yra tiesės atkarpoje, jungiančioje mažiausiai apsemto šono ir daugiausiai apsemto šono vidurius.

Naudojame koordinačių sistemą su *x* ašimi, einančia stiklinės dugnu nuo mažiausiai apsemto šono (koordinačių pradžia *O*) link daugiausiai apsemto šono ir statmena stiklinės dugnui *y* ašimi. Nustatome *C'* koordinates x_C ir y_C . $x_{C'}$ nustatome iš sąlygos



$$\int_0^{x_{C'}} (x_{C'} - x)dm = \int_{x_{C'}}^{2r} (x - x_{C'})dm \ .$$

Čia *dm* – statmeną *x* ašiai pjūvį atitinkantis masės elementas:

$$dm = d' \cdot [h'' - (r - x)\mathrm{tg}\alpha] \cdot 2\sqrt{r^2 - (r - x)^2} \cdot dx.$$

$$\int_0^{x_{C'}} 2(x_{C'} - x)d'(h'' - (r - x)\mathrm{tg}\alpha)\sqrt{r^2 - (r - x)^2}dx =$$

$$= 2d' \int_{x_{C'}}^{2r} (x - x_{C'})\ (h'' - (r - x)\mathrm{tg}\alpha)\sqrt{r^2 - (r - x)^2}dx,$$

$$\int_0^{x_{C'}} (x_{C'} - x)(h'' - (r - x)\mathrm{tg}\alpha)\sqrt{r^2 - (r - x)^2}dx -$$

$$- \int_{x_{C'}}^{2r} (x - x_{C'})\,(h'' - (r - x)\mathrm{tg}\alpha)\sqrt{r^2 - (r - x)^2}dx = 0,$$

$$\int_0^{x_{C'}} (x_{C'} - x)(h'' - (r - x)\mathrm{tg}\alpha)\sqrt{r^2 - (r - x)^2}dx +$$

$$+ \int_{x_{C'}}^{2r} (x_{C'} - x)\ (h'' - (r - x)\mathrm{tg}\alpha)\sqrt{r^2 - (r - x)^2}dx = 0,$$

$$\int_0^{2r} (x_{C'} - x)(h'' - (r - x)\mathrm{tg}\alpha)\sqrt{r^2 - (r - x)^2}dx = 0$$

Pakeičiame $r - x = rz,\ x = r - rz = r(1 - z),\quad \sqrt{r^2 - (r - x)^2} = r\sqrt{1 - z^2}$, $dx = -rdz$, integravimo ribos $z_{x=0} = 1,\ z_{x=2r} = -1$. Tada

$$\int_0^{2r} (x_{C'} - x)(h'' - (r - x)\mathrm{tg}\alpha)\sqrt{r^2 - (r - x)^2}dx =$$

$$= -\int_1^{-1} (x_{C'} - r + rz)(h'' - rz\mathrm{tg}\alpha)r\sqrt{1 - z^2}rdz =$$

$$= \int_{-1}^{1} (x_{C'} - r + rz)(h'' - rz\mathrm{tg}\alpha)r\sqrt{1 - z^2}rdz\,,$$

$$-r^2\mathrm{tg}\alpha \int_{-1}^{1} z^2\sqrt{1 - z^2}dz + [\,rh'' - r\,\mathrm{tg}\alpha(x_{C'} - r)] \int_{-1}^{1} z\sqrt{1 - z^2}dz +$$

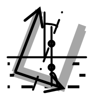
$$+h''(x_{C'} - r) \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - z^2}dz = 0,$$

$$-r^2\mathrm{tg}\alpha\cdot\frac{\pi}{8}+h''(x_{C'}-r)\cdot\frac{\pi}{2}=0,$$

$$x_{C'}=\frac{r^2\mathrm{tg}\alpha}{4h''}+r=\frac{r(4h''+r\,\mathrm{tg}\alpha)}{4h''}.$$

Kadangi C' yra ant tiesės, einančios per ilgiausios ir trumpiausios panirusios stiklinės dalies šoninių linijų vidurius, koordinatei $y_{C'}$ gauname:

$$y_{C'}=\frac{h''-r\,\mathrm{tg}\alpha+x_{C'}\,\mathrm{tg}\alpha}{2}=\frac{4h''^2+(r\,\mathrm{tg}\alpha)^2}{8h''}.$$



Naudojame tą pačią koordinačių sistemą stiklinės pasvirimui. Esant stabiliai pusiausvyrai tiesė *CC'* yra vertikali. Vertikalios tiesės , einančios per tašką *C*, krypties koeficientas $k=\mathrm{tg}\beta=\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-1/\mathrm{tg}\alpha$, o jos lygtis

$$y-y_C=-\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}(x-x_C).\ -\mathrm{tg}\alpha\,(y-y_C)=x-x_C.$$

Čia $x_C=r,\ \ y_C=h'$. Tiesė eis per tašką *C'* jei $-\mathrm{tg}\alpha\,(y_{C'}-h')=x_{C'}-r$.

Įrašę aukščiau gautas $x_{C'}$ bei $y_{C'}$ išraiškas gauname lygtį

$$-\mathrm{tg}\alpha\left[\frac{4h''^2+(r\,\mathrm{tg}\alpha)^2}{8h''}-h'\right]=\frac{r^2\mathrm{tg}\alpha}{4h''}+r-r,$$

$$-\mathrm{tg}\alpha[4h''^2+(r\,\mathrm{tg}\alpha)^2-8h'h'']=2r^2\,\mathrm{tg}\alpha,$$

$$\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{8h'h''-2r^2-4h''^2}{r^2},$$

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sqrt{8h'h''-2r^2-4h''^2}}{r},$$

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sqrt{8\cdot3{,}47\cdot4{,}77-2\cdot3{,}56^2-4\cdot4{,}77^2}}{3{,}56}=1{,}12;\ \alpha=48{,}3°.$$

Tačiau stiklinei pakrypus kampu

$$\alpha'=\mathrm{arctg}\frac{h-h''}{r},\ \ \alpha'=\mathrm{arctg}\frac{8{,}42-4{,}77}{3{,}56}=\mathrm{arctg}1{,}025=45{,}7°$$

į ją pradės tekėti vanduo. Taigi, pateiktų parametrų tuščia stiklinė pakrypusi neplūduriuos (pateiktos nuotraukoje stiklinės dugnas storesnis, negu nurodyta sąlygoje).

Laikome, kad arbata be cukraus ir nestipri, todėl jos tankis, kaip ir vandens, yra *d'*. Stiklinė stabiliai plūduriuos vertikali kai stiklinės su arbata masės centras bus neaukščiau už jos išstumto vandens masės centrą. Įpiltos arbatos masė *m'*. tada arbatos lygis stiklinėje

$$h_a = \frac{m'}{\pi(r-a)^2 d'},$$

o jos masės centro aukštis

$$y_a = \frac{h_a}{2} + b = \frac{m'}{2\pi(r-a)^2 d'} + b.$$

Stiklinės su arbata masės centro C“ aukštis

$$y_{C"} = \frac{h'm + y_a m'}{m+m'}.$$

Plūduriuojančios stiklinės su arbata išstumto vandens masės centro aukštis

$$y_v = \frac{m+m'}{2\pi r^2 d'}.$$

Minimalų arbatos kiekį nustatome iš sąlygos

$$y_v = y_{C"},$$

$$\frac{m+m'}{2\pi r^2 d'} = \frac{h'm + y_a m'}{m+m'}$$

$$\frac{m+m'}{2\pi r^2 d'} = \frac{h'm + [\frac{m'}{2\pi(r-a)^2 d'} + b]m'}{m+m'},$$

$$m'^2\left(\frac{r^2}{(r-a)^2} - 1\right) + 2m'(\pi r^2 d' b - m) + 2\pi r^2 d' h' m - m^2 = 0,$$

$$m' = \frac{m - \pi r^2 d' b \pm \sqrt{(\pi r^2 d' b - m)^2 - \left(\frac{r^2}{(r-a)^2} - 1\right)(2\pi r^2 d' h' m - m^2)}}{\frac{r^2}{(r-a)^2} - 1},$$

$$m' =$$

$$= \frac{190 - \pi 3{,}56^2 \cdot 0{,}38 \pm \sqrt{(190 - \pi 3{,}56^2 \cdot 0{,}38)^2 - \left(\frac{3{,}56^2}{(3{,}56 - 0{,}31)^2} - 1\right)(2\pi 3{,}56^2 \cdot 3{,}47 \cdot 190 - 190^2)}}{\frac{3{,}56^2}{(3{,}56 - 0{,}31)^2} - 1},$$

Gauname du sprendinius: $m' = 1700$ g ir $m' = 48$ g. Pirmasis sprendinys netinka: tiek arbatos į stiklinę netilps. Kadangi maksimalus vandens kiekis, kurį gali panirdama išstumti stiklinė $m" = \pi r^2 h d' = \pi 3{,}56^2 \cdot 8{,}42 = 335$ g, įpylus 47 g arbatos stiklinė plūduriuos. Taigi, $m' = 47$ g.

Užduoties aiškinamąjį sprendimą pateikė jos autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ Šis tekstas svetainėje *www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2020 07 27.*

Turnyro dalyvių sprendimų aptarimas / FT12-11 ▼

Į pirmąją užduotį teisingai atsakė visi, nors ne visi atsakymą pagrindė nurodydami stiklinės ir išstumto vandens masių centrų padėtis.

Antrojoje užduotyje niekas nepastebėjo, kad stiklinei svyrant jai nepasiekus stabilios pusiausvyros į stiklinę pradės tekėti vanduo. O ir pasvirusios stiklinės išstumto vandens masės centrą surado tik du sprendusieji.

Trečią užduotį dauguma sprendė.

Užduoties sprendimų aptarimą parengė jos autorius prof. habil. dr. Antanas Rinvidas Bandzaitis .

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2020 07 27.*

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelė / FT12-11 ▼

Nr.	**Sprendimų vertinimo kriterijus**	**Vertė balais**
1.	Nustatytas stiklinės masės centras	2
	Nustatytas vertikalios stiklinės išstumto vandens masės centras	1
2.	Nustatytas pasvirusios stiklinės išstumto vandens masės centras	2
	Nustatytas stiklinės pasvyrimo kampas, atitinkantis stabilią pusiausvyrą	2
	Nustatytas maksimalus plūduriuojančios stiklinės pasvyrimo kampas	1
3.	Nustatytas mažiausias arbatos kiekis, kurį įpylus stiklinė plūduriuos vertikali	2
4.	Netikslumai (p. 1-3)	Iki (-1)
Didžiausias galimas sprendimų įvertinimas		10

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelę parengė užduoties autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2020 07 27.*