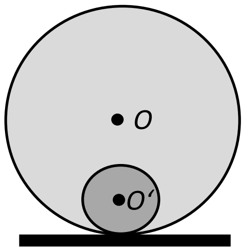
12-ASIS FIZIKOS TURNYRAS
7-oji užduotis Nr. FT12-7 / 2018 11 12 – 2018 12 09

Sąlyga / FT12-7▼

Gulk-stok ir pagalvok!



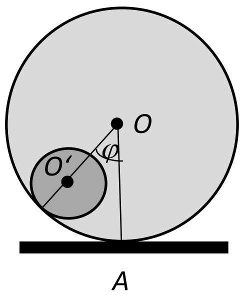
Mediniame rutuliuke, kurio spindulys $r = 2$ cm, yra spindulio $r' = 0{,}5$ cm rutulio formos ertmė, užpildyta švinu (žaislas „Jonukas-stovukas“). Atstumas tarp rutuliukų centrų $OO' = 1{,}5$ cm. Medžio tankis $d = 500\ \mathrm{kg/m^3}$, švino tankis $d' = 11300\ \mathrm{kg/m^3}$.

1) Rutuliukas padedamas ant šiurkštaus horizontalaus paviršiaus taip, kad atkarpa OO' būtų vertikali, kaip pateikta pav. Kokiu dažniu svyruos rutuliukas, jei OO' mažu kampu nukreipiama nuo vertikalės, ir rutuliukas paleidžiamas be pradinio greičio?
2) Rutuliukas padedamas ant paviršiaus taip, kad linija OO' būtų horizontali, ir paleidžiamas be pradinio greičio. Kokiam mažiausiam trinties koeficientui esant rutuliukas riedės paviršiumi neslysdamas?
3) Koks bus rutuliuko kampinis greitis tuo momentu, kai linija OO' bus vertikali?
4) Kaip pasikeistų 1 ir 3 užduočių rezultatai, jei paviršius būtų slidus?

Užduotį parengė mokyklos „Fizikos olimpas” steigėjų tarybos narys, ilgametis mokyklos direktorius (11 m.) ir šio Fizikos turnyro užduočių parengimo spręsti ir jų sprendimų vertinimo komisijos pirmininkas prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2018 11 12.*

Užduoties aiškinamasis sprendimas / FT12-7 ▼



Laikome, kad yra du homogeniniai rutuliukai: vieno rutuliuko centras O, spindulys $r = 2$ cm, tankis $d = 500\ \mathrm{kg/m^3}$, kito rutuliuko centras O‘, spindulys $r' = 0{,}5$ cm, tankis $d'' = d' - d = 10800\ \mathrm{kg/m^3}$. Tų rutuliukų masės $m = \frac{4}{3}\pi r^3 d = 0{,}0168$ kg, $m''=\frac{4}{3}\pi r'^3 d'' = 0{,}0057$ kg. Kai linija OO' bus nukrypusi nuo vertikalės kampu φ taško A atžvilgiu rutuliuką veiks jėgos momentas $N = m''g\ OO' \sin\varphi$ ir suteiks jam kampinį pagreitį $\varepsilon = -\frac{d^2\varphi}{dt^2}$: $\varepsilon = \frac{N}{I_A}$, čia I_A – rutuliuko inercijos momentas taško A atžvilgiu. Jis lygus

$$I_A = m\left(\frac{2}{5}r^2 + r^2\right) + m''\left(\frac{2}{5}r'^2 + AO'^2\right),$$

$$AO'^2 = AO^2 + OO'^2 - 2\cdot OO'\cdot AO\cdot\cos\varphi =$$

$$= r^2 + (r-r')^2 - 2(r-r')r\cos\varphi = r'^2 + 2(r-r')r\,(1-\cos\varphi),$$

$$I_A = \frac{7}{5}r^2 m + \left(\frac{7}{5}r'^2 + 2(r-r')r\,(1-\cos\varphi)\right)m'' =$$

$$= \frac{28}{15}\pi r^5 d + \left(\frac{7}{5}r'^2 + 2(r-r')r\,(1-\cos\varphi)\right)\frac{4}{3}\pi r'^3 d''.$$

Gauname judėjimo lygtį rutuliukui riedant

$$-\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{\frac{4}{3}\pi r'^3 d'' g\,(r-r')\sin\varphi}{\frac{28}{15}\pi r^5 d + \left(\frac{7}{5}r'^2 + 2(r-r')r\,(1-\cos\varphi)\right)\frac{4}{3}\pi r'^3 d''}.$$

$$-\frac{d^2\varphi}{dt^2}=\frac{r'^3d''g\,(r-r')\sin\varphi}{\frac{7}{5}r^5d+\left(\frac{7}{5}r'^2+2(r-r')r\,(1-\cos\varphi)\right)r'^3d''}.$$

Kai kampas φ yra mažas, $\sin\varphi=\varphi$, $\cos\varphi=1$, lygtis supaprastėja:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{r'^3d''g\,(r-r')}{\frac{7}{5}(r^5d+r'^5d'')}\varphi=0.$$

Tai lygtis harmoninių svyravimų, kurių dažnis:

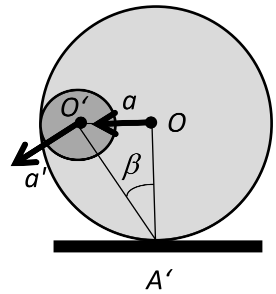
$$\nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{r'^3d''g\,(r-r')}{\frac{7}{5}(r^5d+r'^5d'')}}=\sqrt{\frac{r'^3(d'-d)g\,(r-r')}{\frac{7}{5}(r^5d+r'^5(d'-d))}},$$

$$\nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{0{,}005^3\cdot(11300-500)\cdot 9{,}8\cdot\,(0{,}02-0{,}005)}{\frac{7}{5}(0{,}02^5\cdot 500+0{,}005^5\cdot(11300-500))}}=1{,}48\ (\mathrm{s}^{-1}).$$

Iš judėjimo lygties matyti, kad kampui φ kintant nuo 0 iki $\pi/2$ veikiantis rutuliuką sunkio jėgos sukurtas jėgos momentas *N* taško *O* atžvilgiu didėja.

Kai OO' horizontali, $\varphi=\pi/2$,

$$N_{max}=m''g\,OO'=\frac{4}{3}\pi r'^3d''\,g\,(r-r').$$



Tas jėgos momentas rutuliukui suteikia kampinį pagreitį

$$\varepsilon=\frac{N_{max}}{I_{A'}}.$$

$$I_{A'}=\frac{7}{5}r^2m+\left(\frac{2}{5}r'^2+r^2+(r-r')^2\right)m''=$$

$$=\frac{7r^2m+\left(7r'^2+10r^2-10rr'\right)m''}{5};$$

$$\varepsilon=\frac{5m''g\,(r-r')}{7r^2m+\left(7r'^2+10r^2-10rr'\right)m''}.$$

Taškas *O* juda pagreičiu $a=\varepsilon r$, \o taškas O‘ – pagreičiu $a'=\varepsilon A'O'$.

Pagreičio a' horizontalioji dedamoji $a_h'=\varepsilon A'O=\varepsilon r$, vertikalioji dedamoji $a_v'=\varepsilon OO'=\varepsilon(r-r')$.

Rutuliukas riedės neslysdamas kai trinties jėga bus

$$F_{tr}=\frac{N_{max}}{r}+am+a'_hm''=\varepsilon I_{A'}\left(\frac{1}{r}+\frac{rm+rm''}{I_{A'}}\right)=$$

$$=m''g\,(r-r')\left[\frac{1}{r}+\frac{5r\,(m+m'')}{7r^2m+\left(7r'^2+10r^2-10rr'\right)m''}\right]=$$

$$=\frac{m''g\,(r-r')[12r^2m+(7r'^2+15r^2-10rr')m'']}{r[7r^2m+(7r'^2+10r^2-10rr')m'']}.$$

Trinties jėgą lemia prispaudimo jėga:

$$F_{pr}=mg+m''(g-a'_v)=$$

$$=mg+m''\big(g-\varepsilon(r-r')\big)=$$

$$= g\left[m + m''\frac{7r^2m + \left(7r'^2 + 10r^2 - 10rr'\right)m'' - 5m''g\,(r - r')^2}{7r^2m + \left(7r'^2 + 10r^2 - 10rr'\right)m''}\right] =$$

$$= g\left[m + m''\frac{7r^2m + \left(2r'^2 + 5r^2\right)m''}{7r^2m + \left(7r'^2 + 10r^2 - 10rr'\right)m''}\right] =$$

$$= g\frac{7r^2m^2 + \left(7r'^2 + 17r^2 - 10rr'\right)mm'' + \left(2r'^2 + 5r^2\right)m''^2}{7r^2m + \left(7r'^2 + 10r^2 - 10rr'\right)m''}.$$

$$F_{tr} = \mu F_{pr},$$

$$\mu = \frac{m''\,(r - r')[12r^2m + (7r'^2 + 15r^2 - 10rr')m'']}{r\left[7r^2m^2 + \left(7r'^2 + 17r^2 - 10rr'\right)mm'' + \left(2r'^2 + 5r^2\right)m''^2\right]} =$$

$$= \frac{r'^3d''\,(r - r')[12r^5d + (7r'^2 + 15r^2 - 10rr')r'^3d'']}{r\left[7r^8d^2 + \left(7r'^2 + 17r^2 - 10rr'\right)r^3d\,r'^3d'' + \left(2r'^2 + 5r^2\right)r'^6d''^2\right]},$$

$$\mu =$$

$$= \frac{0{,}5^3 \cdot 10{,}8 \cdot (2 - 0{,}5) \cdot [12 \cdot 2^5 \cdot 0{,}5 + (7 \cdot 0{,}5^2 + 15 \cdot 2^2 - 10 \cdot 2 \cdot 0{,}5) \cdot 0{,}5^3 \cdot 10{,}8]}{2[7 \cdot 2^8 0{,}5^2 + (7 \cdot 0{,}5^2 + 17 \cdot 2^2 - 10 \cdot 2 \cdot 0{,}5) \cdot 2^3 \cdot 0{,}5 \cdot\ 0{,}5^3 \cdot 10{,}8 + (2 \cdot 0{,}5^2 + 5 \cdot 2^2) \cdot 0{,}5^6 \cdot 10{,}8^2]}$$

$$\mu = 0{,}33.$$

Panaudojame energijos tvermės dėsnį. Mažesniojo rutuliuko masės centro aukštis pakinta dydžiu $r - r'$, todėl potencinė energija sumažėja dydžiu

$$E_p = m''g(r - r') = \frac{4}{3}\pi g r'^3(d' - d)(r - r').$$

Rutuliukas rieda sukdamasis apie momentinį sukimosi tašką *A*, jo kinetinė energija

$$E_k = \frac{I_A\omega^2}{2}.$$

Kai OO' vertikali

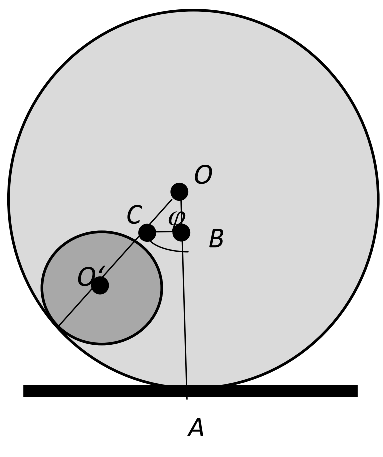
$$I_A = \frac{28}{15}\pi(r^5d + r'^5d''),$$

$$E_p = E_k,$$

$$g r'^3(d' - d)(r - r') = \frac{7(r^5d + r'^5(d' - d))\omega^2}{10},$$

$$\omega = \sqrt{\frac{10g r'^3(d' - d)(r - r')}{7(r^5d + r'^5(d' - d))}},$$

$$\omega = \sqrt{\frac{10 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}005^3 \cdot 0.015 \cdot (11300 - 500)}{7(0{,}02^5 \cdot 500 + 0{,}005^5(11300 - 500))}} = 13{,}7\ (\mathrm{s}^{-1}).$$



Kai paviršius slidus, rutuliukas suksis slysdamas paviršiumi, jo bendras masės centras *C* horizontalia kryptimi nejudės, judės tik vertikaliai. Didesniojo rutuliuko centras *O* judės tik horizontaliai. Momentinis sukimosi centras *B* yra vertikalios tiesės, išvestos per didesniojo rutuliuko centrą *O*, ir horizontalios tiesės, išvestos per bendrą masės centrą *C*, susikirtimo taškas. Bendrą masės centrą *C* nustatome iš sąlygos

$$m \cdot OC = m'' \cdot O'C,\ \ m \cdot OC = m'' \cdot (OO' - OC)$$

$$OC = \frac{m'' \cdot OO'}{m + m''} = \frac{{r'}^3(d' - d)OO'}{r^3 d + {r'}^3(d' - d)},$$

$$OC = \frac{0{,}005^3(11300 - 500) \cdot 1{,}5}{0{,}02^3 \cdot 500 + 0{,}005^3 \cdot (11300 - 500)} = 0{,}38 \text{ (cm).}$$

Rutuliuko kampinį pagreitį apibrėžia lygtis

$$\varepsilon' = \frac{N_B}{I_B}.$$

Kai kampas φ yra mažas, $\sin\varphi = \varphi$, $\cos\varphi = 1$, $N_B = N$, $I_B = I_C$, todėl

$$\nu' = \nu\sqrt{\frac{I_A}{I_C}} = \nu\sqrt{\frac{\frac{7}{5}(r^5 d + r'^5 d'')}{r^3 d\left(\frac{2}{5}r^2 + OC^2\right) + {r'}^3 d''\left(\frac{2}{5}r'^2 + O'C^2\right)}},$$

$$\nu' = 1{,}48\sqrt{\frac{\frac{7}{5}(0{,}02^5 \cdot 500 + 0{,}005^5 \cdot 10800)}{0{,}02^3 \cdot 500\left(\frac{2}{5} \cdot 0{,}02^2 + 0{,}0038^2\right) + 0{,}005^3 \cdot 10800\left(\frac{2}{5} \cdot 0{,}005^2 + 0{,}0112^2\right)}},$$

$$\nu' = 2{,}39 \text{ s}^{-1}.$$

Trečiojoje užduotyje E_p nepakis, o

$$E'_k = \frac{I_C {\omega'}^2}{2},\ \omega' = \omega\sqrt{\frac{I_A}{I_C}},$$

$$\omega' = 13{,}7 \cdot 1{,}61 = 22{,}1\ (\text{s}^{-1}).$$

Užduoties aiškinamąjį sprendimą pateikė jos autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt *nuolat skelbiamas nuo 2020 07 27.*

Turnyro dalyvių sprendimų aptarimas / FT12-7 ▼

Dauguma sprendusiųjų pastebėjo, kad patogu nagrinėti du homogeninius rutuliukus, kurių tankiai *d* ir (*d‘*-*d*), tačiau toliau rutuliuko judėjimo riedant teisingai neaprašė. Tai nėra fizikinė svyruoklė, nes rutuliukui riedant jo momentinės sukimosi ašies – atramos taško vieta kinta.

Nagrinėjant trinties jėgą reikia naudoti prispaudimo jėgą (svorį, o ne sunkį). Pradedant rutuliukui riedėti su pagreičiu besileidžiančio švininio rutuliuko svoris yra mažesnis už sunkį (jei pagreitis būtų *g*, turėtume nesvarumą). Užduotyje to neprireikė, bet rutuliukui sukantis atsirastų dar ir išcentrinė jėga.

Taikant energijos tvermės dėsnį kinetinę energiją skirstome į masės centro slenkamojo judėjimo kinetinę energiją ir sukimosi apie masės centrą kinetinę energiją. Galima naudoti ir tik sukimosi apie momentinį sukimosi centrą kinetinę energiją. Kiekvienu atveju reikia pasirinkti tinkamą inercijos momentą.

Nesant trinties rutuliukas neriedės, jo masės centras *C* judės tik vertikaliai, o medinio rutuliuko centras *O* – horizontaliai, todėl momentinis sukimosi centras yra vertikalios tiesės, išvestos per *O*, ir horizontalios tiesės, išvestos per *C*, susikirtimo taškas. Judėjimo lygtyje į tai turime atsižvelgti, skaičiuojant svyravimo dažnį inercijos momentas imamas ne atramos taško, o masės centro atžvilgiu. Tai liečia ir sukimosi energiją.

Užduoties sprendimų aptarimą parengė jos autorius prof. habil. dr. Antanas Rinvidas Bandzaitis .

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2020 07 27.*

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelė / FT12-7 ▼

Nr.	**Sprendimų vertinimo kriterijus**	**Vertė balais**
1.	Parašyta judėjimo lygtis	2
	Parašyta mažų svyravimų lygtis	1
	Nustatytas dažnis	1
2.	Nustatyta prispaudimo jėga	1
	Nustatytas trinties koeficientas	1
3.	Nustatytas kampinis pagreitis	1
4.	Parašyta judėjimo lygtis	1
	Nustatytas dažnis	1
	Nustatytas kampinis pagreitis	1
5.	Netikslumai (p. 1-4)	Iki (-1)
Didžiausias galimas sprendimų įvertinimas		10

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelę parengė užduoties autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2020 07 27.*