12-ASIS FIZIKOS TURNYRAS
9-oji užduotis Nr. FT12-9 / 2019 01 07 – 2019 02 03

Sąlyga / FT12-9 ▼

Rutuliuko, įdaryto švinu, riedėjimas

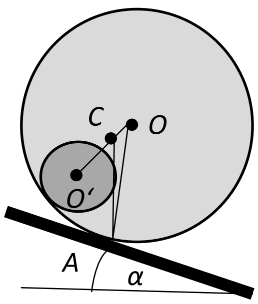
Mediniame rutuliuke, kurio spindulys $r = 2$ cm, yra spindulio $r' = 0{,}5$ cm rutulio formos ertmė, užpildyta švinu (žaislas „Jonukas-stovukas“). Atstumas tarp rutuliukų centrų $OO' = 1{,}5$ cm. Medžio tankis $d = 500\ \mathrm{kg/m^3}$, švino tankis $d' = 11300\ \mathrm{kg/m^3}$. Rutuliukas padedamas ant šiurkščios nuožulniosios plokštumos, palinkusios kampu $\alpha = 8°$ taip, kad linija OO' būtų plokštumoje, statmenoje nuožulniajai plokštumai, ir paleidžiamas be pradinio greičio.

1) Kokiam kampui β tarp OO' ir vertikalės esant rutuliukas nejudės?
2) Kokiose ribose esant kampui β rutuliukas, paleistas be pradinio greičio, nuriedės nuožulniąja plokštuma?
3) Kokiam mažiausiam trinties koeficientui esant rutuliukas riedės paviršiumi neslysdamas?

Užduotį parengė mokyklos „Fizikos olimpas” steigėjų tarybos narys, ilgametis mokyklos direktorius (11 m.) ir šio Fizikos turnyro užduočių parengimo spręsti ir jų sprendimų vertinimo komisijos pirmininkas prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2019 01 07.*

Užduoties aiškinamasis sprendimas / FT12-9 ▼



Rutuliukas nejudės, jei tiesė, išvesta per rutuliuko masės centrą *C* ir jo lietimosi su nuožulniąja plokštuma tašką *A*, bus vertikali. Kampą tarp OO‘ ir vertikalės β matuojame nuo vertikalės pagal laikrodžio rodyklę. Laikome, kad yra du homogeniniai rutuliukai: vieno rutuliuko centras *O*, spindulys $r = 2$ cm, tankis $d = 500\ \mathrm{kg/m^3}$, kito rutuliuko centras *O*‘, spindulys $r' = 0{,}5$ cm, tankis $d'' = d' - d = 10800\ \mathrm{kg/m^3}$. Tų rutuliukų masės $m = \frac{4}{3}\pi r^3 d = 0{,}0168$ kg, $m'' = \frac{4}{3}\pi r'^3 d'' = 0{,}0057$ kg. Bendrą masės centrą *C* nustatome iš sąlygos

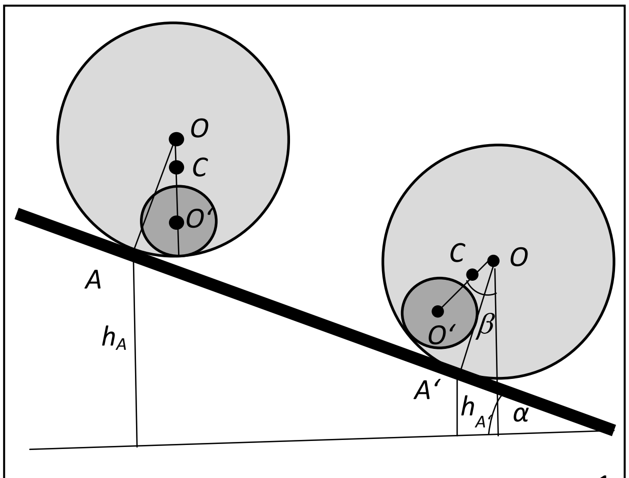
$$m \cdot OC = m\text{·O'C},\ \text{m·OC=m} \cdot (OO' - OC),$$

$$OC = \frac{m'' \cdot OO'}{m + m''} = \frac{r'^3(d' - d)OO'}{r^3 d + r'^3(d' - d)},$$

$$OC = \frac{0{,}005^3(11300 - 500)\cdot 1{,}5}{0{,}02^3 \cdot 500 + 0{,}005^3 \cdot (11300 - 500)} = 0{,}38\ (\mathrm{cm}).$$

Iš ΔAOC pagal sinusų teoremą gauname:

$$\frac{OC}{\sin\angle OAC} = \frac{OA}{\sin\angle OCA}.$$



Bet $\angle OAC = \alpha$, $\angle OCA = \pi - \beta$, $OA = r$.

Tada

$$\sin(\pi - \beta) = \sin\beta = \frac{r\sin\alpha}{OC},$$

$$\sin\beta = \frac{0{,}02\sin 8°}{0{,}0038} = 0{,}73, \quad \beta_1 = 47°, \quad \beta_2 = 133°.$$

Parodysim, kad gautas β vertes atitinka potencinės energijos $E_p(\beta)$ ekstremumai. Kai $OO‘$ vertikali potencinė energija (aukštį imam nuo nuožulniosios plokštumos pagrindo)

$$E_p(0) = (m + m")g(h_A + r\cos\alpha - OC).$$

Kai rutuliukas neslysdamas nurieda atstumą $AA' = r\beta$, jo potencinė energija

$$E_p(\beta) = (m + m")g(h_{A'} + r\cos\alpha - OC\cos\beta) =$$

$$= (m + m")g(h_A - r\beta\sin\alpha + r\cos\alpha - OC\cos\beta).$$

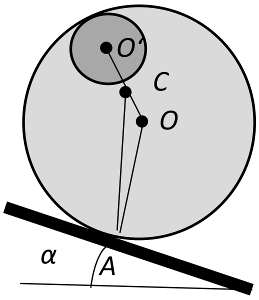
Ekstremumo sąlyga

$$\frac{dE_p}{d\beta} = 0,\ -r\sin\alpha + OC\sin\beta = 0.$$

Gavome tą pačią lygtį. Kadangi

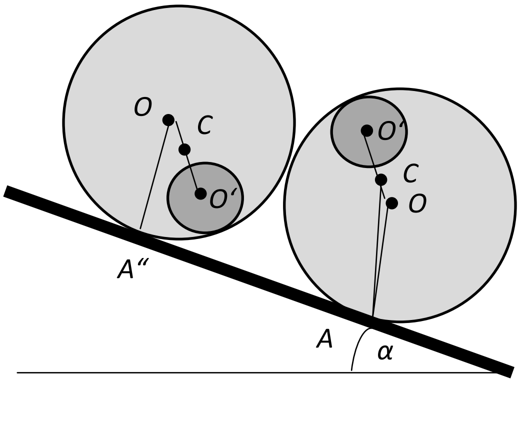
$$\frac{d^2E_p}{d\beta^2} = OC\cos\beta,$$

$\cos\beta_1 > 0$, β_1 atitinka minimumą, pusiausvyra stabili, $\cos\beta_2 < 0$, β_2 atitinka maksimumą, pusiausvyra nestabili.



Kai $\beta = \beta_2$, ir rutuliukas nežymiai nukrypsta į dešinę, jis pradeda riedėti, jo potencinė energija pradžioje mažėja, kinetinė energija didėja kol $OO“$ kampas su vertikale tampa β_1, toliau potencinė energija pradeda didėti, o kinetinė energija mažėja. Rutuliukui padarius pilną apsisukimą jo greitis nebus lygus 0. Taigi, rutuliukas riedės toliau.

Kai $\beta = \beta_2$, ir rutuliukas nežymiai nukrypsta į kairę, jis taip pat pradeda riedėti į kairę, kampas β mažėja. Rutuliuko potencinė energija pradžioje mažėja, kinetinė energija didėja kol $OO‘$ kampas su vertikale tampa β_1. Toliau potencinė energija pradeda didėti, o kinetinė energija mažėja kol rutuliukas sustoja pasiekęs pradinį aukštį virš pagrindo tiesei $OO‘$ su vertikale sudarant kampą β_3. Riedėdamas atgal rutuliukas pasiekia pradinę padėtį, t.y., lieka kiek nukrypęs į kairę nuo maksimumo. Taigi, rutuliukas svyruos riedėdamas tai į kairę, tai į dešinę.



Nustatome kampą β_3. Pradiniu momentu masės centro aukštis virš pagrindo

$$h_C = h_A + r\cos\alpha - OC\cos\beta_2\,.$$

Rutuliukui nuriedėjus į kairę atstumą $AA" = r(\beta_2 - \beta_3)$ ir sustojus jo masės centro aukštis

$$h_C = h_A + r(\beta_2 - \beta_3)\sin\alpha +$$

$$+ r\cos\alpha - OC\cos\beta_3\,.$$

Gauname lygtį:

$$r(\beta_2 - \beta_3)\sin\alpha - OC\cos\beta_3 = -OC\cos\beta_2.$$

Lygtis transcendentinė, jos tikslus sprendinys nežinomas. Sprendžiame apytiksliai skaitmeniniu metodu (β_2 ir β_3 išreiškiame radianais).

$$2(2{,}32 - \beta_3)\sin 8° - 0{,}38\cos\beta_3 = -0{,}38\cos 133°,$$

$$-\beta_3 - 1{,}36\cos\beta_3 + 1{,}39 = 0.$$

Imame funkciją

$$f(\beta) = -\beta + 1{,}36\cos\beta + 1{,}39,$$

$$f'(\beta) = -1 - 1{,}36\sin\beta,$$

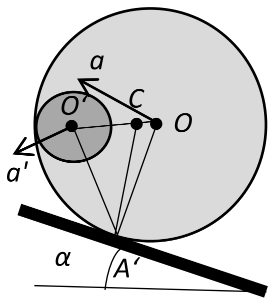
ir taikome liestinių metodą:

$$\beta_{nauja} = \beta_{prad} - \frac{f(\beta_{prad})}{f'(\beta_{prad})}.$$

Sudarome lentelę, imdami $\beta_{prad} = 0{,}03$.

β	0,03	0,03064
$f(\beta)$	0,00061	0,00000003
$f'(\beta)$	0,959	0,958

Taigi, $\beta_3 = 0{,}0306 = 1{,}75°$. Esant kiek didesnei pradinei kampo vertei nejudantis rutuliukas riedės žemyn ir sustos kampui nepasiekus vertės β_2. Jei pradinė kampo vertė bus mažesnė už β_3 rutuliukas, riedėdamas žemyn, pasiekęs β_2 nesustos ir riedės toliau. Taigi, rutuliukas nuriedės nuožulniąja plokštuma jei padedant bus $133° < \beta$ arba $\beta < 1{,}75°$.



Jei pradiniu momentu nejudantis rutuliukas padedamas esant $1{,}75° < \beta < 133°$, jis svyruoja riedėdamas nuožulniąja plokštuma tai aukštyn, tai žemyn. Maksimalų jėgos momentą sunkio jėga sukuria švininiam rutuliukui toliausiai nutolus nuo vertikalės, einančios per atramos tašką A‘:

$$N_{max} = m''g(OO' - r\sin\alpha).$$

Tas jėgos momentas suteikia rutuliukui kampinį pagreitį

$$\varepsilon' = \frac{N_{max}}{I_{A'}} = \frac{m''g(OO' - r\sin\alpha)}{I_{A'}}.$$

Čia inercijos momentas

$$I_{A'} = \frac{7}{5}mr^2 + m''(\frac{2}{5}r'^2 + A'O'^2),$$

$$A'O'^2 = r^2 + (r - r')^2 - 2r(r - r')\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = r'^2 + 2r(r - r')(1 - \sin\alpha),$$

$$I_{A'} = \frac{7}{5}mr^2 + m''[\frac{7}{5}r'^2 + 2r(r - r')(1 - \sin\alpha)]$$

Masės m masės centro O pagreitis $a = \varepsilon' r$, masės m“ masės centro O‘ pagreitis $a' = \varepsilon'\, O'A'$. Pagreičio a‘ dedamoji, lygiagreti nuožulniajai plokštumai,

$$a'_{\parallel} = \varepsilon'[r - (r - r')\sin\alpha],$$

o statmena nuožulniajai plokštumai dedamoji

$$a' = \varepsilon'(r - r')\cos\alpha = \frac{m''g(OO' - r\sin\alpha)(r - r')\cos\alpha}{I_{A'}}.$$

Rutuliuką taip pat veikia nustumiančioji jėga

$$F_n = (m + m'')g\sin\alpha.$$

Trinties jėgą F_{tr} sukuria rutuliuko prispaudimo prie nuožulniosios plokštumos jėgaF_{pr}:

$$F_{tr} = \mu F_{pr}.$$

Kad rutuliukas riedėtų neslysdamas trinties jėga turi atsverti nustumiančiąją jėgą, sukurti jėgos momentą, suteikiantį rutuliukui kampinį pagreitį ε', suteikti masei *m* pagreitį *a* ir masei m“ pagreitį $a'_{\parallel}$. Rutuliukas riedės neslysdamas, kai trinties jėga bus

$$F_{tr} = F_n + \frac{\varepsilon' I_O}{r} + ma + m''a'_{\parallel}.$$

Čia I_O – rutuliuko inercijos momentas taško *O* atžvilgiu:

$$I_O = \frac{2}{5}mr^2 + m''(\frac{2}{5}r'^2 + OO'^2),$$

$$F_{tr} = F_n + \varepsilon'\left\{\frac{I_O}{r} + mr + m''[r - (r - r')\sin\alpha]\right\},$$

$$F_{pr} = [mg + m''(g - a')]\cos\alpha.$$

$$\mu = F_{tr}/F_{pr} = \frac{F_n + \varepsilon'\left\{\frac{I_O}{r} + mr + m''[r - (r - r')\sin\alpha]\right\}}{[mg + m''(g - a')]\cos\alpha} =$$

$$= \frac{(m + m'')\sin\alpha + \frac{m''(OO' - r\sin\alpha)}{I_{A'}}\left\{\frac{I_O}{r} + mr + m''[r - (r - r')\sin\alpha]\right\}}{\left[m + m''(1 - \frac{m''(OO' - r\sin\alpha)(r - r')\cos\alpha}{I_{A'}})\right]\cos\alpha}.$$

Išraiška gan griozdiška, įrašius $m, m'', I_O, I_{A'}$ išraiška nesupaprastėja. Įrašome skaitines vertes

$$I_O = \frac{8}{15}\pi d r^5 + \frac{4}{3}\pi d'' r^3(\frac{2}{5}r'^2 + OO'^2) = \frac{8}{15}\pi \cdot 0{,}5 \cdot 2^5 + \frac{4}{3}\pi \cdot 10{,}8 \cdot 0{,}5^3(\frac{2}{5} \cdot 0{,}5^2 + 1{,}5^2) =$$

$$= 40{,}1\ \mathrm{g \cdot cm^2},$$

$$I_{A'} = \frac{28}{15}\pi d r^5 + \frac{4}{3}\pi d'' r^3[\frac{7}{5}r'^2 + 2r\,OO'(1 - \sin\alpha)] =$$

$$= \frac{28}{15}\pi \cdot 0{,}5 \cdot 2^5 + \frac{4}{3}\pi \cdot 10{,}8 \cdot 0{,}5^3[\frac{7}{5} \cdot 0{,}5^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1{,}5(1 - \sin 8°)] = 125\ \mathrm{g \cdot cm^2},$$

$$m = 16{,}8\ \mathrm{g},$$

$$m''=5{,}7\ \mathrm{g},$$

$$\mu = \frac{(16{,}8 + 5{,}7)\sin 8° + \frac{5{,}7(1{,}5 - 2\sin 8°)}{125}\left\{\frac{40{,}1}{2} + 16{,}8 \cdot 2 + 5{,}7[2 - 1{,}5\sin 8°]\right\}}{\left[16{,}8 + 5{,}7(1 - \frac{5{,}7(1{,}5 - 2\sin 8°)1{,}5\cos 8°}{125})\right]\cos 8°} = 0{,}31.$$

Jei išnagrinėtoje padėtyje rutuliukas judėtų, atsirastų ir išcentrinė jėga $F_{iš} = m''AO'\omega^2$, kuri pakeistų μ: $F_{tr} \to F_{tr} - F_{iš}\cos\alpha$, $F_{pr} \to F_{pr} - F_{iš}\sin\alpha$. Kadangi $\sin 8° < \cos 8°$, trinties koeficiento vertė sumažėtų.

Kai rutuliukas rieda nuožulniąja plokštuma nesustodamas, jis sukasi greičiu ω apie tašką O, jo masės m“ dalis sukasi r–r‘ spindulio apskritimu, todėl atsiranda išcentrinė jėga

$$F_{iš} = m''(r - r')\omega^2.$$

Tą jėgą kompensuoja sunkis, trinties jėga ir pagrindo reakcijos jėga. Kai $F_{iš}$ nukreipta vertikaliai aukštyn, trinties jėga

$$F_{tr} = \mu[(m + m'')g - F_{iš}] = \mu[(m + m)g - m''(r - r')\omega^2].$$

Tačiau esant dideliam kampiniam greičiui pastarasis reiškinys gali būti lygus nuliui ar neigiamas. Taigi, trinties jėga išnyksta: pasiekęs tam tikrą greitį besisukantis rutuliukas tarpais praslysta esant bet kokiam trinties koeficientui.

Užduoties aiškinamąjį sprendimą pateikė jos autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt *nuolat skelbiamas nuo 2020 07 27.*

***Turnyro dalyvių sprendimų aptarimas / FT12-9* ▼**

Dauguma sprendusiųjų nustatė kampus, atitinkančius stabilią ir nestabilią pusiausvyrą.

Kai kas nurodė, kad rutuliukas, paleistas be pradinio greičio, nuriedės nuožulniąja plokštuma kai pradinis kampas kiek nukryps nuo nestabilios pusiausvyros kampo, ir rutuliukas pradės riedėti žemyn. Tačiau antrosios padėties – mažo kampo, kuriam esant rutuliukas, pradėjęs riedėti persiris per nestabilios pusiausvyros padėtį – tiksliai nenurodė niekas.

Nustatant trinties koeficientą reikia atsižvelgti į prispaudimo jėgą, ne tik į sunkį. Prispaudimo jėga kinta kūnui judant su pagreičiu (slenkamojo judėjimo bei išcentriniu). Todėl minimalus trinties koeficientas gali būti nustatytas tik kai rutuliukas, paleistas be pradinio greičio, riedės nuožulniąja plokštuma aukštyn ir žemyn. Kai rutuliukas nuriedės nuožulniąja plokštuma, jis riedės tarpais praslysdamas, esant bet kokiam trinties koeficientui.

Užduoties sprendimų aptarimą parengė jos autorius prof. habil. dr. Antanas Rinvidas Bandzaitis .

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2020 07 27.*

***Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelė / FT12-9* ▼**

Nr.	Sprendimų vertinimo kriterijus	Vertė balais
1.	Nustatytas rutuliuko masės centras	2
	Nustatyti kampai, atitinkantys stabilią ir nestabilią pusiausvyrą	2
2.	Nustatyti kampai, kuriems esant rutuliukas, paleistas be pradinio greičio, nuriedės nuožulniąja plokštuma	2
3.	Nustatytas minimalus trinties koeficientas, kuriam esant rutuliukas, paleistas be pradinio greičio, riedės nuožulniąja plokštuma aukštyn ir žemyn neslysdamas	2
4.	Nustatyta, kad esant bet kokiam trinties koeficientui rutuliukas nuriedės nuožulniąja plokštuma tarpais praslysdamas	2
5.	Netikslumai (p. 1-4)	Iki (-1)
Didžiausias galimas sprendimų įvertinimas		10

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelę parengė užduoties autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2020 07 27.*