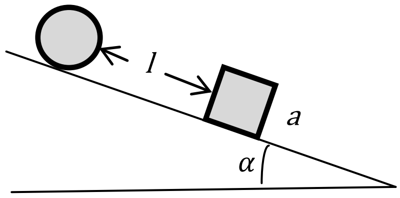
14-ASIS FIZIKOS TURNYRAS
13-oji užduotis Nr. FT14-13 / 2021 03 29 – 2021 04 25

Ritinys trenkiasi į kubelį ir nepersirita per jį

Sąlyga / FT14-13 ▼

Ant nuožulniosios plokštumos, sudarančios kampą α = 8° su horizontu, padėtas kubelis, kurio briaunos ilgis a = 4 cm. Virš kubelio atstumu l = 10 cm padedamas ritinys, kurio pagrindo skersmuo a, o masė lygi kubelio masei. Visiems paviršiams trinties koeficientas μ = 0,3. Ritinys paleidžiamas be pradinio greičio. Kokį atstumą nuslinks kubelis iki visai sustodamas, jei ritinio smūgiai į kubelį ir į nuožulniąją plokštumą plastiški, o jų trukmė maža?



Užduotį parengė mokyklos „Fizikos olimpas" steigėjų tarybos narys, ilgametis mokyklos direktorius (11 m.) ir šio Fizikos turnyro užduočių parengimo spręsti ir jų sprendimų vertinimo komisijos pirmininkas prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.
▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2021 03 29.*

Aiškinamasis sprendimas / FT14-13 ▼

Padėtą ant nuožulniosios plokštumos kubelį veikia nustumiančioji jėga

$$F = mg\sin\alpha.$$

Maksimali trinties jėga tarp kubelio ir nuožulniosios plokštumos

$$F_{tr} = \mu mg\cos\alpha.$$

$$\frac{F_{tr}}{F} = \mu\cot\alpha, \qquad \frac{F_{tr}}{F} = 0{,}3\cdot\cot 8\,° = 0{,}3\cdot 7{,}1 = 2{,}1.$$

Taigi, kubelis nejudės. Akivaizdu, kad ritinys iki smūgio į kubelį nuožulniąja plokštuma riedės neslysdamas. Ritinio centro greitį prieš pat smūgį į kubelį pažymime v, ritinio ir kubelio mases m. Ritinio slenkamojo judėjimo kinetinė energija

$$E' = \frac{mv^2}{2}.$$

Ritinio sukamojo judėjimo kinetinė energija

$$E" = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{\frac{mr^2}{2}\left(\frac{v}{r}\right)^2}{2} E = \frac{mv^2}{4}.$$

Čia $r = \frac{a}{2} = 2$ cm. Visa kinetinė energija

$$E_k = E' + E" = \frac{3mv^2}{4}.$$

Tą energiją nustatom pagal ritinio potencinės energijos pokytį:

$$\Delta E_p = mgl\sin\alpha,$$

$$E_k = \Delta E_p,$$
$$\frac{3mv^2}{4} = mgl\sin\alpha,$$
$$v = 2\sqrt{gl\sin\alpha/3},\ \ v = 0{,}43\frac{m}{s}.$$

Išskiriame ritinio ir kubelį slinkimo etapus etapus: A – ritinys tuoj po smūgio pradeda kilti slysdamas kubeliu, toldamas nuo nuožulniosios plokštumos, po to – artėdamas, o kubelis slysta nuožulniąja plokštuma; B – ritinys atsitrenkia į nuožulniąją plokštumą; C – ritinys kartu su kubeliu juda slysdamas nuožulniąja plokštuma ir kubeliu; D – ritinys kartu su kubeliu juda slysdamas kubeliu ir riedėdamas nuožulniąja plokštuma.

Smūgio trukmę pažymime τ, jo metu ritinį ir kubelį veika vienodo didumo priešingos krypties kintamos sąveikos jėgos $F(t)$. Kadangi smūgio trukmė maža, smūgio metu į sunkio jėgą neatsižvelgiame. Kadangi smūgio metu ritinys sukasi, tarp ritinio ir nuožulniosios plokštumos bei tarp kubelio ir ritinio yra trintis, kubelį veikia prispaudimo prie nuožulniosios plokštumos jėga

$$F_p(t) = \mu F(t).$$

Ji sukuria kubelio ir nuožulniosios plokštumos trinties jėgą

$$F'_{tr}(t) = \mu^2 F(t).$$

Kubelio greitis tuoj po smūgio

$$v_A = \frac{1}{m}\int_0^\tau (F(t) - F'_{tr}(t))dt = \frac{1-\mu^2}{m}\int_0^\tau F(t)dt,$$
$$\frac{1}{m}\int_0^\tau F(t)dt = \frac{v_A}{1-\mu^2}.$$

Tokia pati yra ritinio centro greičio dedamoji, lygiagreti nuožulniajai plokštumai. Ritinio centro greičio pokytis

$$v - v_A = \frac{1}{m}\int_0^\tau F(t)dt,$$
$$v - v_A = \frac{v_A}{1-\mu^2},$$
$$v_A = \frac{1-\mu^2}{2-\mu^2}v = \frac{1-\mu^2}{2-\mu^2}\cdot 2\sqrt{\frac{gl\sin\alpha}{3}},\ \ v_A = 0{,}203\frac{m}{s}.$$
$$\frac{1}{m}\int_0^\tau F(t)dt = \frac{2}{2-\mu^2}\sqrt{\frac{gl\sin\alpha}{3}} = 0{,}223\frac{m}{s}.$$

Besisukantį ritinį smūgio metu sąlyčio su kubeliu taške veikianti trinties jėga $F_p(t)$ suteikia ritiniui statmeną nuožulniajai plokštumai greičio dedamąją

$$v'_A = \frac{\mu}{m}\int_0^\tau F(t)dt = \frac{2\mu}{2-\mu^2}\sqrt{\frac{gl\sin\alpha}{3}},\quad v'_A = 0{,}067\text{ m/s}.$$

Prieš pat smūgį ritinio kampinis greitis bus

$$\omega = \frac{v}{r}.$$

Smūgio metu ritinį jo centro atžvilgiu veiks jėgos momentas

$$N(t) = r\mu F(t).$$

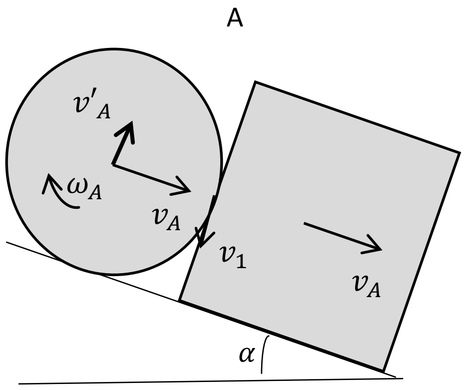
Tuoj po smūgio ritinio kampinis greitis bus

$$\omega_A = \omega - \frac{1}{I}\int_0^{\tau} N(t)dt.$$

Čia $I = mr^2/2$ yra ritinio inercijos momentas centro atžvilgiu.

$$\omega_A = \omega - \frac{2}{mr^2}\int_0^{\tau} r\mu F(t)dt = \frac{v}{r} - \frac{2\mu v}{r(2-\mu^2)},$$

$$\omega_A = \frac{2-2\mu-\mu^2}{r(2-\mu^2)}\cdot 2\sqrt{\frac{gl\sin\alpha}{3}}, \qquad \omega_A = 14{,}6\ 1/s.$$



Ritinio lietimosi su kubeliu taško greitis ritinio centro atžvilgiu

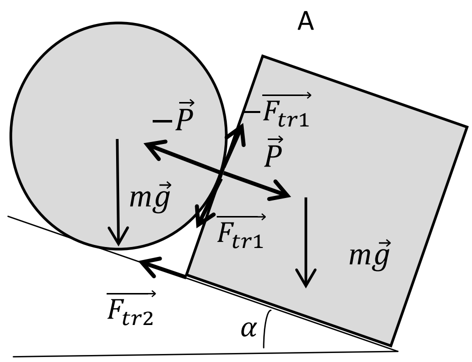
$$v''_A = \omega_A r, \;\; v''_A = 14{,}6 \cdot 0{,}02 = 0{,}292\ (\frac{\text{m}}{\text{s}}),$$

o to taško greitis kubelio atžvilgiu

$$v_1 = v''_A - v'_A = 0{,}292 - 0{,}067 = 0{,}225\ \text{m/s} > 0.$$

Taigi, ritinys sukdamasis slys kubelio paviršiumi. Gautieji rezultatai schematiškai pavaizduoti pav. A, mažiausias greitis v'_A.

Nustatome tuoj po smūgio kubelį ir ritinį veikiančias jėgas. Kubelį ir ritinį veikia vienodos sunkio jėgos $m\vec{g}$. Kubelį ir ritinį veikia vienodo didumo priešingų krypčių sąveikos jėgos $\vec{P}$ ir $-\vec{P}$. Kadangi ritinys sukasi, sąveikos jėgos sukuria trinties jėgas $\overrightarrow{F_{tr1}}$ ir $-\overrightarrow{F_{tr1}}$.



$$F_{tr1} = \mu P.$$

Kubelį ta jėga spaudžia prie nuožulniosios plokštumos sukurdama papildomą trinties jėgą

$$F_{tr2} = \mu F_{tr1} = \mu^2 P.$$

Kubelio pagreitį pažymime w_A. Tokia pat yra ir ritinio centro pagreičio dedamoji, lygiagreti nuožulniajai plokštumai. Kubelio ir ritinio pagreičiams turime:

$$\begin{cases} w_A = g(\mu\cos\alpha - \sin\alpha) - \dfrac{P}{m}(1-\mu^2) \\ w_A = \dfrac{P}{m} - g\sin\alpha \end{cases},$$

$$\frac{P}{m} = \frac{\mu g\cos\alpha}{2-\mu^2}, \quad \frac{P}{m} = \frac{0{,}3\cdot 9{,}8\ \cos 8^\circ}{2-0{,}3^2} = 1{,}52\ (\frac{\text{m}}{\text{s}^2}),$$

$$w_A = g\left(\frac{\mu\cos\alpha}{2-\mu^2} - \sin\alpha\right), \;\; w_A = 9{,}8\left(\frac{0{,}3\cos 8^\circ}{2-0{,}3^2} - \sin 8^\circ\right) = 0{,}16\ (\frac{\text{m}}{\text{s}^2}).$$

Statmena nuožulniajai plokštumai kryptimi ritinio centras judės nukreiptu link nuožulniosios plokštumos pagreičiu

$$w'_A = g\cos\alpha - \mu\frac{P}{m} = \frac{2g\,(1-\mu^2)\cos\alpha}{2-\mu^2}, \qquad w'_A = \frac{2\cdot 9{,}8\,(1-0{,}3^2)\cos 8^\circ}{2-0{,}3^2} = 9{,}2\ (\frac{\text{m}}{\text{s}^2}).$$

Besisukantį ritinį veikia trinties jėgos sukurtas jėgos momentas $N' = F_{tr1}r$, todėl ritinys suksis kampiniu pagreičiu

$$\varepsilon_A = \frac{N'}{I} = \frac{\mu^2 Pr}{mr^2/2} = \frac{2\mu^3 g\cos\alpha}{r(2-\mu^2)},\quad \varepsilon_A = \frac{2\cdot 0{,}3^3\cdot 9{,}8\cdot\cos 8°}{0{,}02\cdot(2-0{,}3^2)} = 13{,}7\ (\mathrm{s}^{-2}),$$

o jo lietimosi su kubeliu taškas ritinio centro atžvilgiu judės pagreičiu

$$w"_A = r\varepsilon_A,\ \ w"_A = 0{,}02\cdot 13{,}7 = 0{,}274(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}).$$

Visi pagreičiai yra nukreipti prieš judėjimo kryptį (yra neigiami). Mažiausias greitis yra v'_A, o jo pokytis didžiausias. Per laiko tarpą $t_1 = \frac{2v'_A}{w'_A} = 0{,}0146$ s ritinys maksimaliai nutolsta nuo nuožulniosios plokštumos, pakeičia judėjimo kryptį ir atsitrenkia į nuožulniąją plokštumą, jo greičio dedamoji, statmena nuožulniajai plokštumai, tampa $-v'_A$. Per laiką t_1 kubelis nuslenka atstumą

$$S_1 = v_A t_1 - \frac{w_A t_1^2}{2},\quad S_1 = 0{,}203\cdot 0{,}0146 - \frac{0{,}16\cdot 0{,}0146^2}{2} = 0{,}0029\ (\mathrm{m}).$$

Kubelio greitis tampa

$$v_B = v_A - w_A t_{1.},\ \ v_B = 0{,}203 - 0{,}16\cdot 0{,}0146 = 0{,}201\frac{m}{s}.$$

Tokia pati ritinio ašies greičio dedamoji, lygiagreti nuožulniajai plokštumai. Ritinio kampinis greitis tampa

$$\omega_B = \omega_A - \varepsilon_A t_1,\quad \omega_B = 14{,}6 - 13{,}7\cdot 0{,}0146 = 14{,}4\ (\frac{1}{\mathrm{s}}).$$

Ritinio plastiško smūgio į nuožulniąją plokštumą trukmę pažymime τ', jo metu nuožulnioji plokštuma ritinį veikia jėga $F'(t)$, į sunkio jėgą neatsižvelgiame. Kadangi ritinys sukasi, tarp ritinio ir nuožulniosios plokštumos atsiranda trinties jėga, o tarp ritinio ir kubelio – prispaudimo bei trinties jėgos.

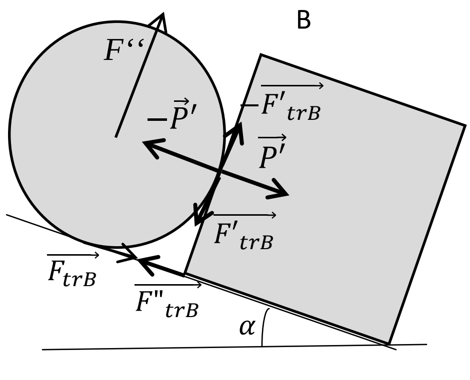
$$v'_A = \frac{1}{m}\int_0^\tau [F' + F'_{trB}]dt,$$

$$F_{trB} = \mu F',$$

$$F'_{trB} = \mu P',$$

$$F"_{trB} = \mu F'_{trB} = \mu^2 P',$$

$$v'_A = \frac{1}{m}\int_0^\tau [F' + \mu^2 P']dt.$$



Kubelio ir ritinio ašies pagreitis toks pats:

$$w(t) = \frac{P' - F"_{trB})}{m} = \frac{P'(1-\mu^2)}{m} = \frac{\mu F' - P'}{m},\quad P' = \frac{\mu F'}{2-\mu^2},$$

$$v'_A = \frac{1}{m}\int_0^\tau [F' + \mu^2\frac{\mu F'}{2-\mu^2}]dt = \frac{2-\mu^2+\mu^3}{2-\mu^2}\frac{1}{m}\int_0^\tau F'dt,\quad \frac{1}{m}\int_0^\tau F'dt = v'_A\frac{2-\mu^2}{2-\mu^2+\mu^3},$$

$$\frac{1}{m}\int_0^\tau P'dt = v'_A\frac{\mu}{2-\mu^2+\mu^3},$$

$$\frac{1}{m}\int_0^{\tau} F_{trB}dt = v'_A \frac{\mu(2-\mu^2)}{2-\mu^2+\mu^3},$$

$$\frac{1}{m}\int_0^{\tau} F'_{trB}dt = v'_A \frac{\mu^2}{2-\mu^2+\mu^3},$$

$$\frac{1}{m}\int_0^{\tau} F"_{trB}dt = v'_A \frac{\mu^3}{2-\mu^2+\mu^3},$$

Kubelio greitis po ritinio smūgio į nuožulniąją plokštumą

$$v_C = v_B + \frac{1}{m}\int_0^{\tau}(P' - F"_{trB})dt = v_B + v'_A \frac{\mu-\mu^3}{2-\mu^2+\mu^3},$$

$$v_C = 0{,}201 + 0{,}067\frac{0{,}3-0{,}3^3}{2-0{,}09+0{,}027} = 0{,}213(\frac{m}{s}).$$

Ritinio kampinis greitis tampa

$$\omega_C = \omega_B - \frac{r}{I}\int_0^{\tau}(F_{trB} + F'_{trB})dt = \omega_B - \frac{2}{3r}v'_A\frac{2\mu+\mu^2-\mu^3}{2-\mu^2+\mu^3},$$

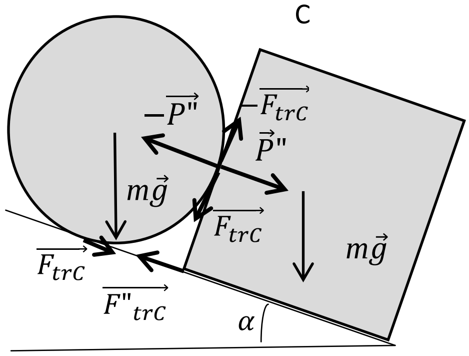
$$\omega_C = 14{,}4 - \frac{2\cdot 0{,}067\cdot(2\cdot 0{,}3+0{,}3^2-0{,}3^3)}{3\cdot 0{,}02\cdot(2+0{,}3^2-0{,}3^3)} = 13{,}7\ (\frac{1}{s}).$$

Tokiu greičiu sukantis ritiniui jo lietimosi su nuožulniąja plokštuma taško greitis

$$v_2 = \omega_C r = 13{,}7\cdot 0{,}02 = 0{,}274(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}) > 0{,}21\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},$$

Taigi, ritinys slys ir kubeliu, ir nuožulniąja plokštuma.

C



Kubelį ir ritinį veiks sunkis, jų sąveikos ir trinties jėgos

(pav. C). Kubelio pagreitis

$$w_C = \frac{1}{m}[mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) + P" - F"_{trC}].$$

Toks pat ritinio ašies pagreitis:

$$w_C = \frac{1}{m}(mg\sin\alpha - P" + F_{trC}),$$

$$-\mu mg\cos\alpha + P" - F"_{trC} = -P" + F_{trC},$$

$$F"_{trC} = \mu^2 P",$$

$$F_{trC} = \mu(mg\cos\alpha - \mu P"),$$

$$-\mu mg\cos\alpha + P" - \mu^2 P" = -P" + \mu(mg\cos\alpha - \mu P"),$$

$$P" = \mu mg\cos\alpha,$$

$$w_C = \frac{1}{m}[mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) + \mu mg\cos\alpha - \mu^3 mg\cos\alpha] = g(\sin\alpha - \mu^3\cos\alpha),$$

$$w_C = 9{,}8(\sin 8° - 0{,}3^3\cos 8°) = 1{,}10\ (\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}).$$

Taigi, tuoj po smūgio į nuožulniąją plokštumą besisukantis ritinys ir kubelis slysdami judės greitėdami tol, kol ritinio kampinis greitis sumažės, ir jis nuožulniąja plokštuma pradės riedėti neslysdamas. Tokio judėjimo trukmę pažymim t_2 Ritinio kampinis pagreitis

$$\varepsilon_C = \frac{r(F_{trC} + F'_{trC})}{I} = \frac{2\mu^2 g\cos\alpha\,(1-\mu+\mu^2)}{3r},$$

$$\varepsilon_C = \frac{2\cdot 0{,}3^2\cdot 9{,}8\cos 8°\,(1-0{,}3+0{,}3^2)}{3\cdot 0{,}02} = 23\ \ (\mathrm{s}^{-2}).$$

Laikui t_2 nustatyti imame lygtis

$$\begin{cases} v_D = v_C + w_C t_2 \\ \omega_D = \omega_C - \varepsilon_C t_2, \\ \quad v_D = \omega_D r \end{cases}$$

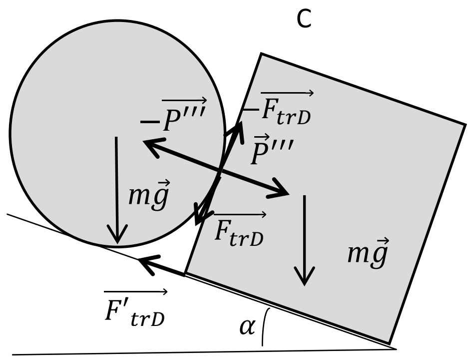
$$t_2 = \frac{\omega_C r - v_C}{w_C + \varepsilon_C r},\quad t_2 = \frac{13{,}7\cdot 0{,}02 - 0{,}213}{1{,}1 + 23\cdot 0{,}02} = 0{,}039\ (\mathrm{s}).$$

Per tą laiką kubelis nuslinks atstumą

$$S_2 = v_C t_2 + \frac{w_C t_2^2}{2},\quad S_2 = 0{,}213\cdot 0{,}039 + \frac{1{,}1\cdot 0{,}039^2}{2} = 0{,}0083\ (\mathrm{m}).$$

Kubelio greitis tampa

$$v_D = v_C - w_C t_{2,},\ \ v_D = 0{,}213 + 1{,}1\cdot 0{,}039 = 0{,}256(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}).$$



Toliau ritinys rieda nuožulniąja plokštuma neslysdamas, o kubeliu – slysdamas, ir po laiko t_3 ritinys ir kubelis sustoja. Pav. D pateiktos ritinį ir kubelį veikiančios jėgos. Kubelio pagreitis

$$w_D = \frac{1}{m}[mg(-\sin\alpha + \mu\cos\alpha) - P''' + F'_{trD}].$$

Toks pat ritinio ašies pagreitis:

$$w_D = \frac{1}{m}(P''' - mg\sin\alpha),$$

$$\mu mg\cos\alpha - P" + F'_{trD} = P''',$$

$$F'_{trC} = \mu^2 P''',$$

$$\mu mg\cos\alpha - P''' + \mu^2 P''' = P",$$

$$P''' = \frac{\mu mg\cos\alpha}{2-\mu^2},$$

$$w_D = g\,\frac{\mu\cos\alpha - (2-\mu^2)\sin\alpha}{2-\mu^2},$$

$$w_D = 9{,}8\,\frac{0{,}3\cos 8° - (2-0{,}3^2)\sin 8°}{2-0{,}3^2} = 0{,}16\ \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right).$$

Judėdamas tokiu pagreičiu kubelis sustos nuslinkęs atstumą

$$S_3 = \frac{v_D^2}{2w_D}, \quad S_3 = \frac{0,256^2}{2 \cdot 0,16} = 0,205 \text{ (m)}.$$

Visas kubelio nuslinktas atstumas

$$S = S_1 + S_2 + S_3, \quad S = 0,0029 + 0,0083 + 0,205 = 0,216 \text{ (m)}.$$

Užduoties aiškinamąjį sprendimą pateikė jos autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2021 07 21.*

Turnyro dalyvių sprendimų aptarimas / FT14-13 ▼

Sprendusieji nesuprato, kad besisukančiam ritiniui prispaudimo jėga smūgio metu suteikia judesio kiekį, statmeną pradiniam ritinio judesio kiekiui.

Užduoties sprendimų aptarimą parengė jos autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2021 07 21.*

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelė / FT14-13 ▼

Nr.	**Sprendimų vertinimo kriterijus**	**Vertė balais**
1.	Nustatyta, kad kubelis neslysta, o ritinys rieda nepraslysdamas	1
2.	Ritinio greitis prieš smūgį į kubelį	1
3.	Aprašyti skirtingi jų judėjimo etapai	1
4.	Kubelio ir ritinio greičiai tuoj po smūgio	2
5.	Kubelio kelias ritiniui kylant iki atsitrenkiant į nuožulniąją plokštumą	2
6.	Ritinio ir kubelio greičiai po ritinio smūgio į plokštumą	1
7.	Kubelio poslinkis ritiniui slystant juo ir nuožulniąja plokštuma	1
8.	Kubelio poslinkis ritiniui riedant nuožulniąja plokštuma	1
9.	Netikslumai (kiekvienam iš kriterijų Nr.1-8)	iki (-1)
Didžiausias galimas sprendimų įvertinimas		10

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelę parengė užduoties autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2021 07 21.*