15-ASIS FIZIKOS TURNYRAS
2-oji užduotis Nr. FT15-2 / 2021 07 27 – 2021 08 03

Priartėja ir atitolsta

Sąlyga / FT15-2 ▼

Duotos dviejų materialiųjų taškų, judančių plokštumoje XOY, koordinačių, matuojamų metrais, priklausomybės nuo sekundėmis matuojamo judėjimo laiko t: $x_1 = 1 + 2t$; $y_1 = 2 + 0{,}5t^2$; $x_2 = 7 - t$; $y_2 = 4{,}5 - 0{,}5t^2$. Apibūdinkite taškų judėjimą, pateikite jų trajektorijas brėžinyje masteliu 1:100 ir raskite:

1) pradinį atstumą tarp taškų ir atstumą tarp jų po 3 s nuo judėjimo pradžios;
2) laiko momentą, kai atstumas tarp taškų yra mažiausias, ir tą atstumą;
3) taškų greičius ir pirmojo taško greitį antrojo taško atžvilgiu tuo laiko momentu bei parodykite tuos greičių vektorius brėžinyje masteliu, kai 1 m/s vektoriaus modulį atitinka 1 cm ilgio atkarpa.

Užduotį parengė doc. dr. Stasys Tamošiūnas - Vilniaus universiteto Fizikos fakulteto Fotonikos ir nanotechnologijų instituto inžinierius, mokyklos „Fizikos olimpas“ direktorius, jos steigėjų tarybos narys ir dėstytojas.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2021 07 27.*

Aiškinamasis sprendimas / FT15-2 ▼

Duota: $x_1 = 1 + 2t$; $y_1 = 2 + 0{,}5t^2$; $x_2 = 7 - t$; $y_2 = 4{,}5 - 0{,}5t^2$; $t_1 = 3$ s.

Rasti: $y_1(x_1)$; $y_2(x_2)$; d_0; d_1; t_2; d_2; v_{12}.

Abu materialieji taškai X ašies kryptimi juda tolygiai, jų pradinės koordinatės $x_{10} = 1$ m ir $x_{20} = 7$ m, o greičių projekcijos į tą ašį yra $v_{1X} = 2$ m/s ir $v_{2X} = -1$ m/s, o ašies Y kryptimi juda tolygiai greitėdami be pradinio greičio, kai pradinės koordinatės $y_{10} = 2$ m ir $y_{20} = 4{,}5$ m, o pagreičių projekcijos į tą ašį yra $a_{1Y} = 1$ m/s^2 ir $a_{2Y} = -1$ m/s^2.

Trajektorijų lygtis randame eliminavę judėjimo laiką:

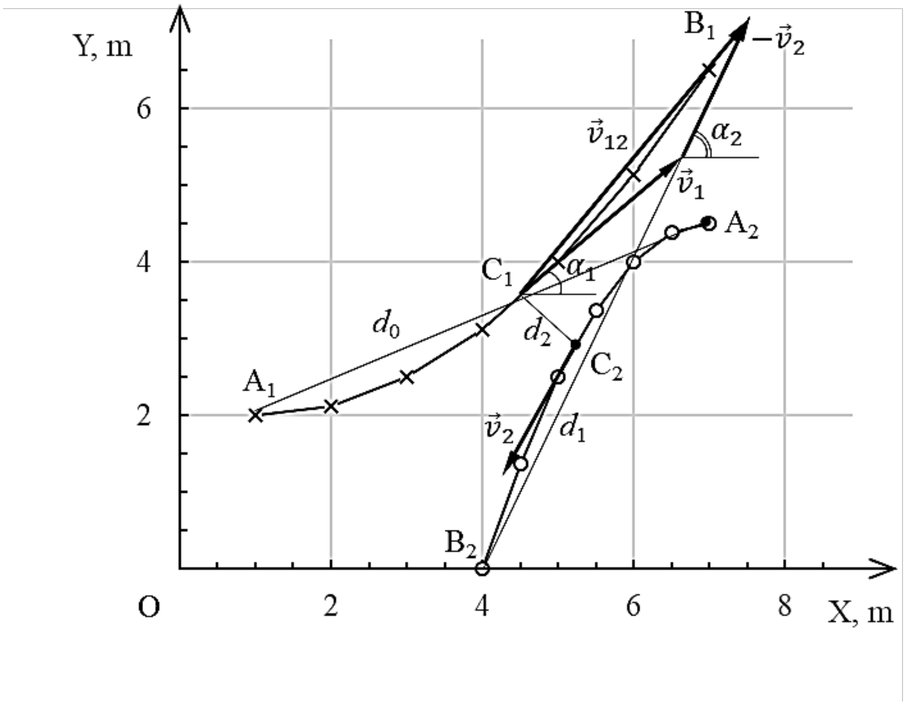
$$t = 0{,}5(x_1 - 1);\ y_1 = 2 + 0{,}125(x_1 - 1)^2 = 2{,}125 - 025x_1 + 0{,}125x_1^2;$$

$$t = 7 - x_2;\ y_2 = 4{,}5 - 0{,}5(7 - x_2)^2 = -20 + 7x_2 - 0{,}5x_2^2.$$

Tai dviejų parabolių atšakos: viena yra dešinioji atšaka, nuo viršūnės taško A_1 kylanti aukštyn, kai koordinatė x_1 didėja nuo 1 m, o kita yra kairioji atšaka, nuo viršūnės taško A_2 besileidžianti žemyn, kai koordinatė x_2 mažėja nuo 7 m. Paveiksle taškų trajektorijų dalys parodytos tik $(0\div 3)$s laiko intervale, radus taškų padėtis kas pusę sekundės. Pavyzdžiui, laiko momentu t_1 taškų B_1 ir B_2 koordinatės yra šios:

$$x_{11} = 1 + 2.3 = 7\text{ (m)};\ y_{11} = 2 + 0{,}5 \cdot 3^2 = 6{,}5\text{ (m)};$$

$$x_{21} = 7 - 3 = 4\text{ (m)};\ y_{21} = 4{,}5 - 0{,}5 \cdot 3^2.$$



Randame atstumus tarp padinių trajektorijų taškų A_1 ir A_2 bei kitų taškų B_1 ir B_2 laiko momentu t_1:

$$d_0 = \sqrt{(x_{20} - x_{10})^2 + (y_{20} - y_{10})^2}\,;\; d_0 = \sqrt{(7-1)^2 + (4{,}5-2)^2} = 6{,}5 \text{ (m)};$$

$$d_1 = \sqrt{(x_{11} - x_{21})^2 + (y_{11} - y_{21})^2}\,;\; d_1 = \sqrt{(7-4)^2 + (6{,}5)^2} \approx 7{,}16 \text{ (m)}.$$

Nesunku pastebėti, kad judant atstumas tarp materialiųjų taškų mažėja iki tam tikro laiko momento t_2, o po to didėja ir tampa didesnis nei pradinis, kaip jau radome. Rasime tą laiko momentą, užrašę atstumo tarp materialiųjų taškų priklausomybę nuo laiko ir jo pirmąją išvestinę pagal laiką prilyginę nuliui:

$$d(t) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{42{,}25 - 36t + 4t^2 + t^4}\,;$$

$$d'_t = 0;\; 4t_2^3 + 8t_2 - 36 = 0;\;\; t_2(t_2^2 + 2) = 9.$$

Pažvelgus į gautą lygtį nesunku pastebėti, kad ją turėtų tenkinti sprendinys tarp 1,5 s ir 2 s. Parenkame[X)] kitas laiko vertes tame intervale, pasitikriname, ar jos tenkina lygtį įstačius į ją, pavyzdžiui, 1,75 s ir kitas vis tikslinamas vertes, kol randame sprendinį ir jį suapvaliname iki šimtųjų sekundžių, nes dar didesnis tikslumas nėra aktualus, kai kiti dydžiai vertintini irgi šimtųjų dalių tikslumu: $t_2 \approx 1{,}7625 \approx 1{,}76$ (s).

Mažiausias atstumas tarp materialiųjų taškų paveiksle yra parodytas kaipo tiesės atkarpa, jungianti trajektorijų taškus C_1 ir C_2, kurių koordinatės yra tokios:

$$x_{12} = 1 + 2 \cdot 1{,}76 = 4{,}52 \text{ (m)};\; y_{12} = 2 + 0{,}5 \cdot 1{,}76^2 \approx 3{,}55 \text{ (m)};$$

$$x_{22} = 7 - 1{,}76 \approx 5{,}24 \text{ (m)};\; y_{22} = 4{,}5 - 0{,}5 \cdot 1{,}76^2 \approx 2{,}95 \text{ (m)}.$$

$$d_2 = \sqrt{42{,}25 - 36 \cdot 1{,}76 + 4 \cdot 1{,}76^2 + 1{,}76^4} \approx 0{,}94 \text{ (m)}.$$

Materialiųjų taškų momentinių greičių vektoriai $\vec{v}_1$ ir $\vec{v}_2$ yra nukreipti atitinkamų trajektorijų liestine jų taškuose C_1 ir C_2, o vektorių moduliai yra tokie:

$$v_1 = \sqrt{v_{1X}^2 + v_{1Y}^2} = \sqrt{v_{1X}^2 + a_{1Y}^2 t_2^2};\ v_1 = \sqrt{2^2 + 1{,}76^2} \approx 2{,}66 \text{ (m/s)};$$

$$v_2 = \sqrt{v_{2X}^2 + v_{2Y}^2} = \sqrt{v_{2X}^2 + a_{2Y}^2 t_2^2};\ v_2 = \sqrt{(-1)^2 + (-1{,}76)^2} \approx 2{,}02 \text{ (m/s)}.$$

Pirmojo materialiojo taško greitis antrojo materialiojo taško atžvilgiu yra lygus greičių $\vec{v}_1$ ir $\vec{v}_2$ skirtumui, o tai yra tas pats, kaip sudėti vektorių $\vec{v}_1$ su priešingos nei $\vec{v}_2$ krypties vektoriumi $-\vec{v}_2$:

$$\vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_1 + (-\vec{v}_2).$$

Vektoriai $\vec{v}_1$ ir $-\vec{v}_2$ su ašimi X sudaro tokius kampus:

$$\alpha_1 = \text{arctg}\frac{v_{1Y}}{v_{1X}};\ \alpha_1 = \text{arctg}\frac{1{,}76}{2} \approx 41°;\ \alpha_2 = \text{arctg}\frac{v_{2Y}}{v_{2X}};\ \alpha_2 = \text{arctg}1{,}76 \approx 60°.$$

Pagal kosinusų teoremą:

$$v_{12} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 cos(\alpha_2 - \alpha_1)};$$

$$v_{12} = \sqrt{2{,}66^2 + 2{,}02^2 + 2 \cdot 2{,}66 \cdot 2{,}02 cos19°} \approx 4{,}62 \text{ (m/s)}.$$

X)Pastaba: gautos nepilnos (be kvadratinių narių) kubinės lygties $t_2^3 + 2t_2 - 9 = 0$, pateikus ją bendru pavidalu $t_2^3 + pt_2 + q = 0$, koeficientai yra $p = 2$ ir $q = -9$, o vienas iš sprendinių randamas pagal Kardano formulę:

$$t_2 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt[2]{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt[2]{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}};$$

$$t_2 = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt[2]{\frac{2^3}{27} + \frac{9^2}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt[2]{\frac{2^3}{27} + \frac{9^2}{4}}} \approx 1{,}762 \text{ (s)}.$$

Aiškinamąjį sprendimą pateikė užduoties autorius doc. dr. Stasys Tamošiūnas.
▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2021 09 22.*

Turnyro dalyvių sprendimų aptarimas / FT15-2 ▼

Vienas sprendimas pateiktas nepriekaištingai. Dauguma turnyro dalyvių nepateikė taškų judėjimo apibūdinimo ir, tai praleidę, suskubo ieškoti atstumų tarp jų ir greičių. Du dalyviai nebraižė taškų trajektorijų, penki įkėlė beveik laisvai pieštų jų eskizų kopijas, o keturi iš braižiusių jas pateikė ir tose vietose, kuriose taškai nejudėjo ($t < 0$). Trys turnyro dalyviai klydo, nagrinėdami labiausiai suartėjusių taškų greičių modulių skirtumą $v_1 - v_2$, o ne greičio vektorių skirtumo modulį v_{12} – pastarasis yra žymiai (apie 7,2 karto) didesnis. Dauguma nesiteikė tą vektorių nubraižyti. Būta neatidumo, paliekant fizikinius dydžius be dimensijų. Trijų dalyvių sprendimai visiškai identiški – nežinomas jų susitarimas dėl įvertinimo paskirstymo.

Sprendimų aptarimą parengė užduoties autorius doc. dr. Stasys Tamošiūnas.
▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2021 09 22.*

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelė / FT15-2 ▼

Nr.	**Sprendimų vertinimo kriterijus**	**Vertė balais**
1.	Trajektorija (lygtys ir brėžinys)	3
2.	Atstumai tarp taškų	3
3.	Greičiai, kai atstumas yra mažiausias	4
4.	Pateikta ne pagal reikalavimus (nerodomi skaičiavimai)	-1(-0,5)
5.	Vėlavimas pateikti sprendimą (vienai parai)	-0,5
6.	Kiti netikslumai (kiekvienam iš kriterijų Nr.1-3)	iki (-1)
Didžiausias galimas sprendimų įvertinimas		10

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelę parengė užduoties autorius doc. dr. Stasys Tamošiūnas.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2021 09 22.*