16-ASIS FIZIKOS TURNYRAS
6-oji užduotis Nr. FT16-6 / 2022 10 17 – 2022 11 13

Sąlyga / FT16-6▼

Svyravimai klampioje aplinkoje

Prie $k = 1{,}9$ N/m standumo lengvos spyruoklės plonu strypeliu pritvirtintas $R = 4$ mm spindulio švininis rutuliukas buvo pusiausviras iš pradžių jį panardinus į vandenį, o vėliau – į gliceriną. Rutuliuką iš pusiausvyros padėties nedaug paslinkus stačiai žemyn ir paleidus, pastebėta, kad prasidėję svyravimai nuslopinami glicerine žymiai sparčiau, nei vandenyje.

Aptarkite rutuliuką veikiančias jėgas ir parašykite jo judėjimo lygtį, tarpusavyje susieję poslinkį nuo pusiausvyros padėties, greitį ir pagreitį, kai pasipriešinimo jėga išreiškiama Stokso formule $F_s = 6\pi\eta Rv$, kur η – aplinkos dinaminės klampos koeficientas, v – rutuliuko greitis. Raskite:

1) savitąjį svyravimų dažnį;

2) slopinimo koeficientus;

3) slopinamųjų svyravimų dažnius;

4) judėjimo lygties sprendinius, kai pradinė amplitudė lygi 3 mm.

Medžiagų savybės: švino tankis $\rho = 11{,}3 \cdot 10^3$ kg/m^3; vandens tankis $\rho_1 = 1 \cdot 10^3$ kg/m^3 ir dinaminės klampos koeficientas $\eta_1 = 1$ mPa·s, o glicerino: $\rho_2 = 1{,}3 \cdot 10^3$ kg/m^3 ir $\eta_2 = 1{,}5$ Pa·s.

Gravitacinio lauko stipris $g = 9{,}8$ N/kg.

Užduotį parengė doc. dr. Stasys Tamošiūnas – Vilniaus universiteto Fizikos fakulteto Fotonikos ir nanotechnologijų instituto senjoras, mokyklos „Fizikos olimpas“ direktorius, steigėjų tarybos narys ir dėstytojas.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2022 10 17.*

Aiškinamasis sprendimas / FT16-6 ▼

Duota: $k = 1{,}9$ N/m; $R = 0{,}004$ m; $\rho = 11{,}3 \cdot 10^3$ kg/m^3; $\rho_1 = 1 \cdot 10^3$ kg/m^3; $\eta_1 = 1 \cdot 10^{-3}$ Pa·s; $\rho_2 = 1{,}3 \cdot 10^3$ kg/m^3; $\eta_2 = 1{,}5$ Pa·s; $y_m = -0{,}003$ m.

Rasti: f_0; β_1; β_2; f_1; f_2; $y_1(t)$; $y_2(t)$.

Rutuliuką pusiausvyros padėtyje skystyje veikia sunkio jėga $m\vec{g}$, per strypelį perduodama deformuotos spyruoklės tamprumo jėga $\vec{F}_{t0}$ (toliau pateikiamame paveiksle jos veikimo taškas perkeltas į rutuliuko centrą) ir keliamoji jėga $\vec{F}_A$. Pusiausvyros sąlyga pagal pirmąjį Niutono dėsnį:

$$m\vec{g} + \vec{F}_{t0} + \vec{F}_A = 0.$$

Rutuliuko masė lygi jo medžiagos tankio ir tūrio sandaugai:

$$m = \frac{4}{3}\rho\pi R^3.$$

Pradinius spyruoklės pailgėjimus vandenyje ir glicerine pažymėjus y_{01} ir y_{02}, tamprumo jėgos pagal Huko dėsnį:

$$F_{t01} = -ky_{01};\ F_{t02} = -ky_{02}.$$

Keliamoji jėga pagal Archimedo dėsnį lygi rutuliuko tūriu išstumto vandens arba glicerino svoriui:

$$F_{A1} = m_1 g = \frac{4}{3}\rho_1 \pi R^3 g;\ F_{A2} = m_2 g = \frac{4}{3}\rho_2 \pi R^3 g.$$

Rutuliuką paslinkus stačiai žemyn atstumu y_m, spyruoklės tamprumo jėgos padidinamos iki:

$$F_{t1m} = -k(y_{01} + y_m);\ F_{t2m} = -k(y_{02} + y_m).$$

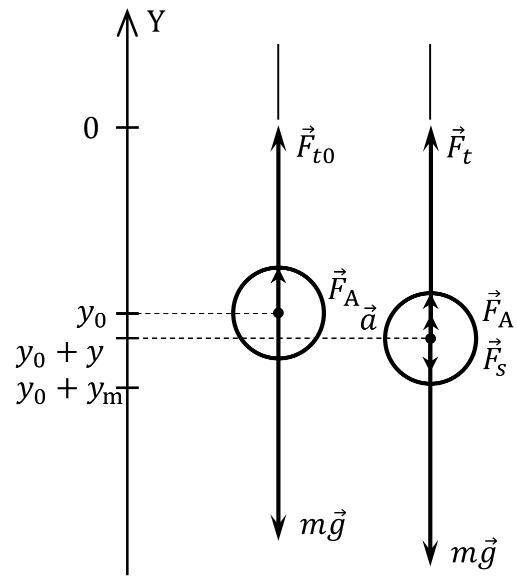
Pastebime, kad tamprumo jėgų išraiškose $|y_{02}| < |y_{01}|$, nes Archimedo jėgų išraiškose $\rho_2 > \rho_1$. Taigi, į gliceriną panardintas rutuliukas spyruoklę deformuoja mažiau, nei panardintas į vandenį.

Paleistam rutuliukui vos tik pajudėjus ($|y| < |y_m|$), jį veikiančios spyruoklės tamprumo jėgos sumažėja iki $F_{t1} = -k(y_{01} + y)$ ir $F_{t2} = -k(y_{02} + y)$, tada aplinkų pasipriešinimo jėgos:

$$F_{S1} = 6\pi\eta_1 R v_1;\ F_{S2} = 6\pi\eta_2 R v_2.$$

Pagal antrąjį Niutono dėsnį bendru atveju, kai spyruoklės tamprumo jėga $F_t = -k(y_0 + y)$, o aplinkos pasipriešinimo jėga $F_S = 6\pi\eta R v$:

$$m\vec{g} + \vec{F}_t + \vec{F}_A + \vec{F}_S = m\vec{a}.$$



Suprojektavę paveiksle parodytus vektorius į ašį Y, turime dvi lygtis:

$$-mg + F_{t0} + F_A = 0;\ -mg + F_t + F_A - F_S = ma.$$

Iš antrosios lygties atėmę pirmąją ir įrašę jėgų bei masės išraiškas, susiejame tarpusavyje rutuliuko pagreitį a, greitį v ir poslinkį y nuo pusiausvyros padėties y_0:

$$a + \frac{F}{m} + \frac{F_{t0} - F_t}{m} = 0;\ \ a + \frac{9\eta}{2\rho R^2} v + \frac{3k}{4\pi\rho R^3} y = 0.$$

Savitojo svyravimų dažnio f_0 ir slopinimo koeficientų radimui gautą sąsają palyginame su slopinamųjų harmoninių svyravimų lygtimi, kurioje yra slopinimo koeficientas β ir savitasis ciklinis dažnis $\omega_0 = 2\pi f_0$:

$$a + 2\beta v + \omega_0^2 y = 0;$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3k}{4\pi\rho R^3}};\ \ f_0 = \frac{1}{2\cdot 3{,}14}\sqrt{\frac{3\cdot 1{,}9}{4\cdot 3{,}14\cdot 11{,}3\cdot 10^3\cdot 0{,}004^3}} \approx 4\ \text{(Hz)}.$$

$$\beta = \frac{9\eta}{4\rho R^2};\ \beta_1 = \frac{9\cdot 10^{-3}}{4\cdot 11{,}3\cdot 10^3\cdot 0{,}004^2} \approx 0{,}0124\ (\text{s}^{-1});\ \beta_2 = \frac{9\cdot 1{,}5}{4\cdot 11{,}3\cdot 10^3\cdot 0{,}004^2} \approx 18{,}67\ (\text{s}^{-1}).$$

Slopinamųjų svyravimų dažnis f yra mažesnis už savitąjį dažnį f_0:

$$\omega = 2\pi f = \sqrt{4\pi^2 f_0^2 - \beta^2};\ f = \sqrt{f_0^2 - \frac{\beta^2}{4\pi^2}};$$

$$f_1 = \sqrt{4^2 - \frac{0{,}0124^2}{4\cdot 3{,}14^2}} \approx f_0;\ \ f_2 = \sqrt{4^2 - \frac{18{,}67^2}{4\cdot 3{,}14^2}} \approx 2{,}68\ \text{(Hz)}.$$

Atkreipkime dėmesį, kad glicerino dinaminės klampos koeficientas yra žymiai (1500 kartų) didesnis už vandens dinaminės klampos koeficientą, atitinkamai žymiai didesnis ir slopinimo koeficientas, tuo tarpu aplinkos įtaka svyravimų dažniui ne tokia žymi: vandenyje slopinamųjų svyravimų dažnis, nors ir šiek tiek mažesnis už savitąjį dažnį, bet visai jam artimas, o glicerine nors jis ir mažesnis apie 1,5 karto, bet svyravimai užgęsta staiga. Tai akivaizdžiai iliustruoja judėjimo lygties sprendiniai – rutuliuko masės centro koordinatės pusiausvyros padėties y_0 atžvilgiu bet kuriuo laiko momentu t po paleidimo:

$$y(t) = y_m e^{-\beta t}\cos 2\pi f t;\ y_{1,2}(t) = y_m e^{-\beta t}\cos 2\pi f_{1,2} t;$$

$$y_1(t) = -0{,}003e^{-0{,}0124t}\cos 25{,}1t;\ \ y_2(t) = -0{,}003e^{-18{,}67t}\cos 16{,}83t.$$

Šio sprendimo skaitytojas, nusibraižęs priklausomybes $y_1(t)$ ir $y_2(t)$ bent jau sekundės laiko tarpe nuo svyravimų pradžios, galėtų geriau suprasti, ką reiškia užduoties sąlygoje paminėtas žymiai spartesnis rutuliuko svyravimų nuslopinimas glicerine.

Aiškinamąjį sprendimą pateikė užduoties autorius doc. dr. Stasys Tamošiūnas.
▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2022 11 25.*

Turnyro dalyvių sprendimų aptarimas / FT16-6 ▼

Dauguma turnyro dalyvių vietoje užduotyje prašomų svyravimų dažnių rado ciklinius savitąjį ir slopinamųjų svyravimų dažnius, kuriuos reikėtų matuoti ne hercais, o radianais sekundei.

Sprendimų aptarimą parengė užduoties autorius doc. dr. Stasys Tamošiūnas.
▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2022 11 25.*

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelė / FT16-6 ▼

Nr.	**Sprendimų vertinimo kriterijus**	**Vertė balais**
1.	Judėjimo lygtis ir jos sprendiniai	4
2.	Savitasis dažnis	2
3.	Slopinimo koeficientai	2
4.	Slopinamųjų svyravimų dažniai	2
5.	Nerodomi skaičiavimai (kiekvienam iš kriterijų Nr.1-4)	-0,5
6.	Vėlavimas pateikti sprendimą (vienai parai)	-1
7.	Kiti netikslumai (kiekvienam iš kriterijų Nr.1-4)	iki (-1)
8.	Pateikta ne pagal reikalavimus	-1
Didžiausias galimas sprendimų įvertinimas		10

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelę parengė užduoties autorius doc. dr. Stasys Tamošiūnas.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2022 11 25.*