

17-ASIS FIZIKOS TURNYRAS
4-oji užduotis Nr. FT17-4 / 2023 09 25 – 2023 10 22

Piramidės pavertimas

Sąlyga / FT17-4 ▼

Taisyklingoji trikampė piramidė (tetraedras) padaryta iš medžiagos, kurios tankis $\rho = 2,1 \text{ g/cm}^3$. Ji padėta ant šiurkštaus gulsčio paviršiaus. Paverčiant piramidę ant šono per vieną iš briaunų (kraštų), teko panaudoti mažiausią jėgą $F = 2,73 \text{ N}$. Raskite:

- 1) Piramidės svorį (N);
- 2) Briaunos ilgį (cm);
- 3) Masės centro aukščio pokytį (cm);
- 4) Atliktą darbą (mJ).

Gravitacinio lauko stipris $g = 9,8 \text{ N/kg}$.

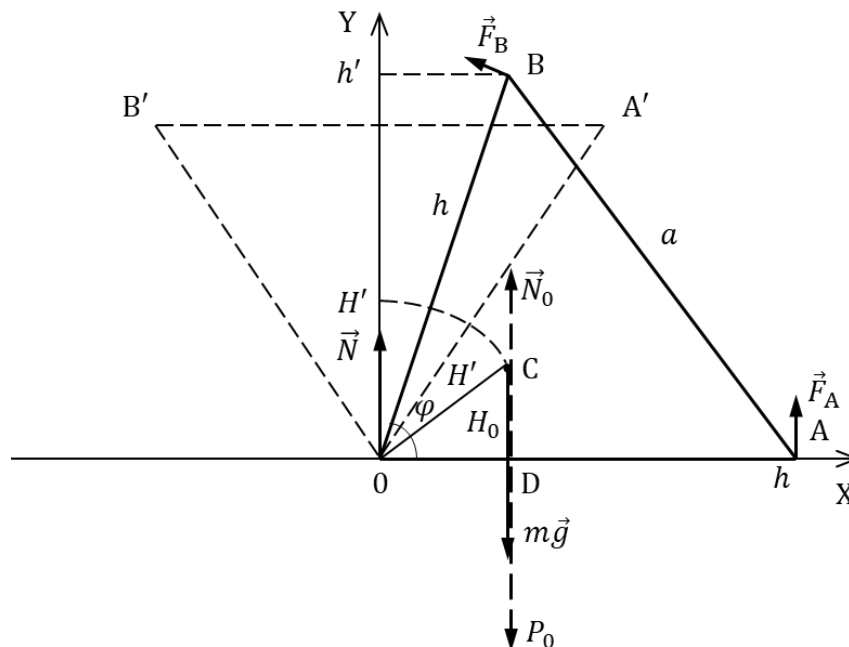
Užduotį parengė doc. dr. Stasys Tamošiūnas – Vilniaus universiteto Fizikos fakulteto Fotonikos ir nanotechnologijų instituto senjoras, mokyklos „Fizikos olimpas“ direktorius, steigėjų tarybos narys ir dėstytojas.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2023 09 25.

Aiškinamasis sprendimas / FT17-4 ▼

Duota: $\rho = 2,1 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$; $F = 2,73 \text{ N}$; $g = 9,8 \text{ N/kg}$.

Rasti: P_0 ; a ; ΔH ; A .



Ant stalo padėtą piramidę veikia sunkio jėga $m\vec{g}$ ir gulsčio paviršiaus reakcijos jėga \vec{N}_0 . Jos pusiausvyros sąlyga pagal pirmąjį Niutono dėsnį:

$$m\vec{g} + \vec{N}_0 = 0; \quad N_0 = mg.$$

Piramidės svoris pagal trečiąjį Niutono dėsnį:

$$\vec{P}_0 = -\vec{N}_0; P_0 = N_0 = mg.$$

Verčiamą piramidę veikia sunkio jėga $m\vec{g}$, gulsčio paviršiaus reakcijos jėga \vec{N} (paveiksle pasirinktoje plokštumoje XOY veikia tašku O parodytą vidurį briaunos, per kurią verčiama) ir jėga \vec{F} . Mažiausia jėga \vec{F} (paveiksle \vec{F}_A , jei yra veikiamą žemiausia viršūnė A, arba \vec{F}_B , jei veikiamą aukščiausia viršūnė B), pavyks paversti tik tada, kai jos petys bus didžiausias – tai jos pagrindo (arba šoninės sienos, ant kurios bus paversta, veikiant B) lygiakraščio trikampio aukštinė h , veikiant jėgai atatmenai to trikampio plokštumai. Sunkio jėgos $m\vec{g}$ petys OD yra tris kartus mažesnis nei aukštinės OA arba OB, tai pagal jėgų momentų taisyklę:

$$mg \frac{h}{3} - Fh = 0; P_0 = mg = 3F; P_0 = 3 \cdot 2,73 = 8,19 \text{ (N)}.$$

Lygiakraščio trikampio aukštinės h , jo ploto S , piramidės aukštinės h' ir jos tūrio V sąsajos su briaunos ilgiu a :

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a; S = \frac{ah}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2; h' = \sqrt{h^2 - \frac{h^2}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}a; V = \frac{1}{3}Sh' = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3.$$

Piramidės briaunos ilgį randame sulyginę jau parašytą jos tūrio ir iš masės bei medžiagos tankio santykio gaunamo tūrio ($V = m/\rho$) išraiškas:

$$\frac{\sqrt{2}}{12}a^3 = \frac{m}{\rho}; a = \sqrt[3]{\frac{12m}{\sqrt{2}\rho}} = \sqrt[3]{\frac{36F}{\sqrt{2}\rho g}}; a = \sqrt[3]{\frac{36 \cdot 2,73}{\sqrt{2} \cdot 2100 \cdot 9,8}} \approx 15 \text{ (cm)}.$$

Piramidės masės centro pradinis aukštis $H_0 = h'/4$ ir ji keliamą tol, kol tas centras pasiekia didžiausią aukštį H' , lygų jo atstumui nuo briaunos O, apie kurią paverčiama.

Pravartu pastebėti, kad pradiniu lėto vertimo momentu gulsčio paviršiaus reakcijos jėga \vec{N} sumažėja ($N < N_0$), jos veikimo taškas D, neverčiant buvęs vienoje vertikalėje su piramidės masės centru C, pasislenka į O, o trinties jėga \vec{F}' labiau pasireiškia, kai veikiamą piramidės viršūnė B. Tikėtina, kad rimties trintis į duotą šiurkštų paviršių yra pakankama^{X)}, kad piramidė ne slystų, o virstų per briauną. Pagal pirmąjį Niutono dėsnį:

$$m\vec{g} + \vec{F}_A + \vec{N}_A = 0; m\vec{g} + \vec{F}_B + \vec{N}_B + \vec{F}' = 0.$$

Piramidės dvisienis kampas $\varphi \approx 71^\circ$. Suprojektavę vektorius į pasirinktas ašis Y ir X, turime:

$$-mg + F_A + N_A = 0; -mg + F_B \sin(90^\circ - \varphi) + N_B = 0; -F_B \cos(90^\circ - \varphi) + F'_B = 0;$$

$$N_A = mg - F; N_A = 8,19 - 2,73 = 5,46 \text{ (N)};$$

$$N_B = mg - F \sin(90^\circ - \varphi); N_B = 8,19 - 2,73 \sin 19^\circ \approx 7,3 \text{ (N)}.$$

Pastaba: ^{X)}galimo (ne mažesnio) trinties koeficiento įvertinimas:

$$\mu = \frac{F'_B}{N_B} = \frac{F}{N_B} \sin \varphi; \mu = \frac{2,73}{7,3} \sin 71^\circ \approx 0,35.$$

Detaliau nenagrinėdami jėgų kitimo lėtai verčiant piramidę pastebėsime, kad masės centrui kylant mažėja sunkio jėgos petys, tuo tarpu jėgos \vec{F} petys h nekinta, tai ji mažėja. Masės centrui pasiekus didžiausią aukštį H' , viršūnes A ir B veikianti jėga sumažėja iki nulio, o gulsčio paviršiaus reakcijos jėga priartėja prie dydžio $N_0 = 8,19 \text{ N}$.

Masės centro aukščio pokytis:

$$\Delta H = H' - H_0 = \sqrt{H_0^2 + \frac{h^2}{9}} - H_0;$$

$$\Delta H = \left(\sqrt{\frac{1}{24} + \frac{1}{12}} - \frac{\sqrt{6}}{12} \right) 15 \approx 2,2 \text{ (cm)}.$$

Pakeliant labai lėtai į kinetinės energijos kitimą galime neatsižvelgti, tai darbas, atliekamas prieš piramidės sunkio jėgą, lygus jos potencialinės energijos pokyčiui:

$$A = mg\Delta H; A = 8,19 \cdot 22 \approx 180 \text{ (mJ)}.$$

Suprantama, kad baigiant pradėtą veiklą - lėtai nuleidžiant piramidę ant šono (tai jau galutinis jos pavertimo rezultatas, veikiant viršūnes priešingos krypties jėgai) – atliekamas neigiamo ženklo darbas $A' = A = -180 \text{ mJ}$.

Aiškinamąjį sprendimą pateikė užduoties autorius doc. dr. Stasys Tamošiūnas.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2023 11 03.

Turnyro dalyvių sprendimų aptarimas / FT17-4 ▼

Neprikaištingus sprendimus pateikė du turnyro dalyviai. Trys dalyviai piramidės svoriu laikė tik tą jos svorio dalį, kuri pradiniu vertimo momentu tenka gulsčiam paviršiui, o dauguma klydo atsakydami ir į kitus užduoties klausimus.

Sprendimų aptarimą parengė užduoties autorius doc. dr. Stasys Tamošiūnas.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2023 11 03.

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelė / FT17-4 ▼

Nr.	Sprendimų vertinimo kriterijus	Vertė balais
1.	Piramidės svoris	3
2.	Briaunos ilgis	2
3.	Masės centro aukščio pokytis	3
4.	Atliktas darbas	2
5.	Nerodomi skaičiavimai (kiekvienam iš kriterijų Nr. 1-4)	-0,5
6.	Netikslumai (kiekvienam iš kriterijų Nr. 1-4)	iki (-1)
Didžiausias galimas sprendimų įvertinimas		10

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelę parengė užduoties autorius doc. dr. Stasys Tamošiūnas.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2023 11 03.