3-IASIS FIZIKOS TURNYRAS
12-oji užduotis Nr. FT3-12 / 2010 02 22 – 2010 03 21

Sąlyga / FT3-12▼

Kiauras, bet plūduriuoja!

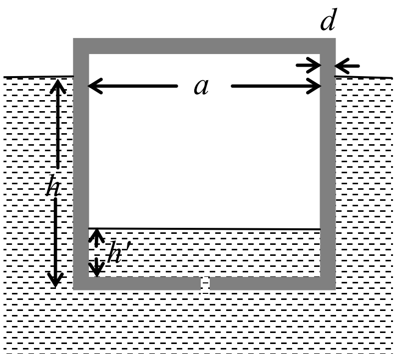
Kubo formos varinio indo masė M=1 kg, talpa V=1 l. Vienos kubo sienelės viduryje yra maža skylutė. Indas skylute žemyn dedamas į vandenį ir plūduriuoja vandens paviršiuje taip, kad jo viršutinė sienelė yra horizontali. Visos indo sienelės yra vienodo storio. Atmosferos slėgis p=100 kPa, temperatūra t=20 °C.

1) Į kokį gylį yra pasinėręs plūduriuojantis paviršiuje indas?
2) Koks vandens kiekis yra plūduriuojančiame inde?
3) Į kokį gylį panertas indas pradės skęsti?
4) Kokį darbą reikėtų atlikti panardinant plūduriuojantį indą į 1 m gylį?

Užduotį parengė mokyklos "Fizikos olimpas" steigėjų tarybos narys, šio Fizikos turnyro užduočių parengimo spręsti ir sprendimų vertinimo komisijos pirmininkas prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2010 02 22.*

Aiškinamasis sprendimas / FT3-12 ▼



1) Sienelės storį pažymime d, ertmės briaunos ilgį pažymime a, panirimo gylį pažymime h, vandens lygį inde pažymime h', vandens tankį ρ, vario tankį ρ', inde esančio oro masę m. Į skylutės matmenis neatsižvelgiame. Panaudojame Archimedo dėsnį, o orui inde pritaikome dujų būvio lygtį. Gauname lygčių sistemą:

$$\begin{cases} M + m + \rho a^2 h' = \rho (a+2d)^2 h \\ p a^3 = [p + \rho g (h - h' - d)] a^2 (a - h') \end{cases}. \qquad (1)$$

Gautąją lygčių sistemą spręsti bendru pavidalu sudėtinga, todėl įvertiname parametrus skaitmeniškai. Gauname:

$a = \sqrt[3]{V}$, $a = 0{,}1\,\mathrm{m}$.

$m = \dfrac{m_o p V}{RT}$, $m = 0{,}0012\,\mathrm{kg}$,

Čia oro molio masė m_o=0,029 kg.

Indo medžiagos (vario) tūris $V' = M/\rho'$, $\rho' = 8900\,\mathrm{kg/m^3}$. Gauname:

$V' = 6a^2 d + 12ad^2 + 8d^3$. Kadangi d mažas, antrą ir trečią dešinės pusės narius atmetame, gauname $d = 0{,}00187\,\mathrm{m}$. Indui plūduriuojant panirimo gylis h<a+2d. Galimą maksimalią vertę h=a+2d įstatę į antrąją lygtį gauname h'=0,00099 m. Tada kairiąją pirmosios lygties pusę atitiks vertė $M' = M + m + \rho a^2 h' = 1{,}011\,\mathrm{kg}$, o pilnai panirusio indo išstumto vandens masė $M'' = \rho (a+2d)^3 = 1{,}055\,\mathrm{kg}$. Taigi, indas plūduriuos, ir h<a+2d, o h'<0,00099 m. Galima minimali h vertė atitiktų h'=0, t.y., $h > (M+m)/[\rho (a+2d)^2] = 0{,}093\,\mathrm{m}$. Gauname įvertinimą:

0,093 m<h<0,1036 m, 0<h'<0,00099 m.

Matome, kad $h >> h'$, todėl galime atsižvelgti tik į h' pirmąjį laipsnį. Sistemos (1) antrąją lygtį pervarkome taip:

$$h = \frac{ph'}{\rho g(a - h')} + h' + d \approx \left(\frac{p}{\rho g a} + 1\right)h' + d . \qquad (2)$$

Tada gauname:

$$\begin{cases} M + m + \rho a^2 h' = \rho(a + 2d)^2 h \\ h = \left(\dfrac{p}{\rho g a} + 1\right)h' + d \end{cases} .$$

Pateiktos sistemos sprendinys

$$\begin{cases} h' = \dfrac{M + m - \rho d(a + 2d)}{\rho[4d(a + d) + p(a + 2d)^2 / (\rho g a)]} \\ h = \left(\dfrac{p}{\rho g a} + 1\right)\dfrac{M + m - \rho d(a + 2d)}{\rho[4d(a + d) + p(a + 2d)^2 / (\rho g a)]} + d \end{cases} .$$

Įstatę parametrų vertes gauname
h=0, 0935 m, h'=0,00089 m.

2) Inde esančio vandens masė

$$m = \rho a^2 h', \; m = 0{,}0089 \text{ kg} .$$

3) Indas pradės skęsti, kai dėl vandens slėgio indo su vandeniu masė taps didesnė už jo išstumto vandens masę, t.y., kai

$$M + m + \rho a^2 h'_1 > \rho(a + 2d)^3 .$$

Gauname ribinę vertę

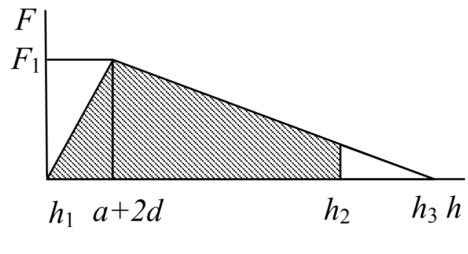
$$h'_1 = \frac{\rho(a + 2d)^3 - M - m}{\rho a^2}, \; h'_1 = 0{,}0115 \text{ m} .$$

Toks h'_1 susidarys indui panirus į gylį h pagal (2):

$$h = \left(\frac{p}{\rho g a} + 1\right)\frac{\rho(a + 2d)^3 - M - m}{\rho a^2} + d , \; h = 1{,}19 \text{ m} .$$

4) Panardinant indą atliekamas darbas

$$A = \int_{h_1}^{h_2} F dh ,$$



čia h_1=0, 0935 m, h_2=1 m, o jėga (nukreipta indo judėjimo kryptimi)

$$F = \begin{cases} g[-M - m - \rho a^2 h' + \rho(a + 2d)^2 h], & \text{kai } h_1 \le h \le (a + 2d), \\ g[-M - m - \rho a^2 h' + \rho(a + 2d)^3], & \text{kai } (a + 2\text{d}) < h \le h_2 . \end{cases} \qquad (3)$$

Sutinkamai su (2) $h' \sim h$. Kokybinis F vaizdas pateiktas paveiksle, o ieškomąjį darbą išreiškia brūkšniuotos figūros plotas. Į (2) ir (3) įstatę $h = a + 2d$ gauname

$$F_1 = g[-M - m - \rho a^2 (a + d)/(p / \rho g a + 1) + \rho(a + 2d)^3], \; F_1 = 1{,}035 \text{ N} .$$

Pagal užduoties 3) dalį (klausimą) F=0, kai h=h_3=1,19 m. Galutinė darbo išraiška ir vertė gaunama tokia:

$$A = F_1[h_3 - h_1 - (h_3 - h_2)^2/(h_3 - a - 2d)]/2, \quad A = 0{,}55\ \mathrm{J}\,.$$

Užduoties aiškinamąjį sprendimą pateikė užduoties autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas nuolat skelbiamas nuo 2010 04 22.*

Turnyro dalyvių sprendimų aptarimas / FT3-12 ▼

Niekas iš sprendusiųjų neatsižvelgė į esančio inde oro masę (~1 g). Lyginant su viso indo mase ji maža, tačiau nuo į indą patekusio vandens masės (~9 g) ji skiriasi ne taip jau žymiai. Ketvirtą klausimą nagrinėjo tik keli iš sprendusiųjų.

Užduoties sprendimo aptarimą parengė užduoties autorius ir jos sprendimų vertintojas prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2010 04 22.*

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelė / FT3-12 ▼

Nr.	**Sprendimų vertinimo kriterijus**	**Vertė balais**
1.	Indą veikiančios Archimedo jėgos išraiška	2
2.	Inde esančio vandens kiekio priklausomybės nuo panirimo gylio išraiška	2
3.	Parametrų skaitinis vertinimas ir galimų supaprastinimų aptarimas	1
4.	Panirimo gylio vertė plūduriuojant	1
5.	Vandens kiekis indui plūduriuojant	1
6.	Panirimo gylis pradedant skęsti	1
7.	Indą nardinančios jėgos išraiška	1
8.	Darbas, atliekamas indą nardinant	1
9.	Pateikta ne pagal reikalavimus	-1
Maksimalus sprendimo įvertinimas		10

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelę parengė užduoties autorius ir jos sprendimų vertintojas prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2010 04 22.*