3-IASIS FIZIKOS TURNYRAS
Užduotis Nr. FT3-14 / 2010 04 06 – 2010 05 03

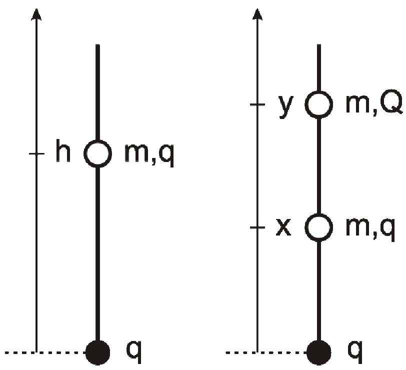
Sąlyga / FT3-14 ▼

Krūviai ant virbalo

Vertikaliai orientuoto ilgo virbalo, esančio gravitaciniame lauke (laisvojo kritimo pagreitis lygus g), apatiniame taške yra įtvirtinta dalelė, turinti elektrostatinį krūvį q.

1. Šiuo virbalu gali be trinties judėti kita dalelė, turinti masę m ir tokį patį elektrostatinį krūvį q. Nustatykite, kokiame aukštyje h antroji dalelė bus pusiausvira ir apskaičiuokite jos mažų svyravimų pusiausvyros taško aplinkoje periodą.

2. Ant virbalo iš viršaus užmauname dar vieną tokios pačios masės m dalelę, turinčią to paties ženklo, tačiau R kartų didesnį elektros krūvį $Q = Rq$. Pažymėkime x ir y naująsias laisvųjų dalelių pusiausvyros padėties koordinates (žiūr. paveikslą). Nubrėžkite grafikus, vaizduojančius x ir y priklausomybę nuo krūvių santykio R, šiam kintant nuo nulio iki nedidelio teigiamo skaičiaus, pvz., 2, 3 ar 5. Praeitame punkte suskaičiuotą aukštį h galite laikykite žinomu ir panaudoti išraiškoms supaprastinti. Neišsigąskite gavę „neišprendžiamą“ lygtį – grafiko braižymui tai neturėtų sukliudyti.



3. Atskirai išnagrinėkite atvejį $Q >> q$ ir pakomentuokite gautus rezultatus.

Užduotį parengė Vilniaus universiteto Fizikos fakulteto Teorinės fizikos katedros docentas, mokyklos „Fizikos olimpas“ dėstytojas dr. Egidijus Anisimovas.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2010 04 06.*

Aiškinamasis sprendimas / FT3-14 ▼

1. Pirmasis klausimas nesudėtingas. Dalelės pusiausvyros padėtį nulemia sunkio ir kuloninės stūmos jėgų pusiausvyra: $mg = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 h^2}$, taigi

$$h = \left(\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 mg}\right)^{1/2}. \qquad (1)$$

Dalelei nukrypus nuo pusiausviros padėties mažu atstumu δ, kuloninės stūmos jėga tampa lygi

$$f = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 (h+\delta)^2} \approx \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 h^2}\left(1 - \frac{2\delta}{h}\right) = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 h^2} - \frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 h^3}\delta .$$

Pirmasis narys atsveria sunkio jėgą, o antrajame naryje įžvelgiame Huko dėsnį su efektyviniu spyruoklės tamprumu $\kappa = \dfrac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 h^3}$. Prisiminę, kad svyravimų periodas lygus $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{\kappa}}$ ir pasinaudoję aukščio išraiška (1), randame

$$T = \left(\frac{\pi^3 q^2}{\varepsilon_0 m g^3} \right)^{1/4}. \tag{2}$$

2. Užrašome abiejų laisvųjų krūvių pusiausvyros sąlygas:

$$4\pi\varepsilon_0 mg = \frac{Qq}{(y-x)^2} + \frac{Qq}{y^2}, \tag{3a}$$

$$4\pi\varepsilon_0 mg + \frac{Qq}{(y-x)^2} = \frac{q^2}{x^2}. \tag{3b}$$

Šią lygčių sistemą patogu užrašyti santykiniais (bedimensiniais) dydžiais. Pažymėję $x = h\xi$, $y = h\eta$ ir $Q = Rq$ bei pasinaudoję žinomu sąryšiu $4\pi\varepsilon_0 mg = \frac{q^2}{h^2}$, randame:

$$\frac{R}{\eta^2} + \frac{R}{(\eta-\xi)^2} = 1, \tag{4a}$$

$$\frac{1}{\xi^2} - \frac{R}{(\eta-\xi)^2} = 1. \tag{4b}$$

Nors šios lygčių sistemos iki galo išspręsti algebriniais metodais nepavyksta, priklausomybių grafikus sukonstruoti galime. Vienas iš galimų būdų galėtų būti toks.

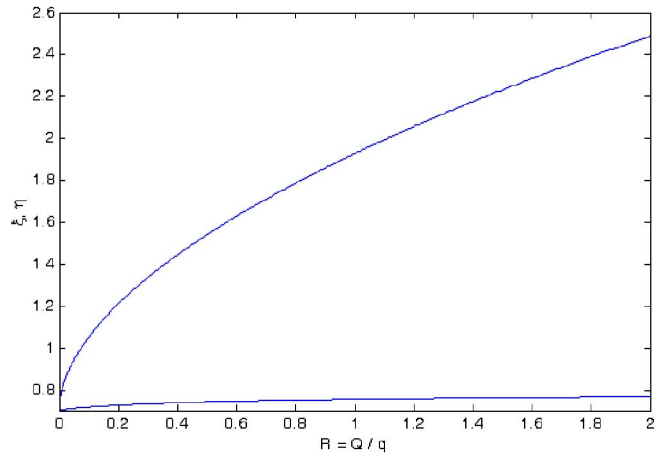
Sudėdami lygtis (4a) ir (4b) eliminuojame skirtumo kvadratą ir randame sąryšį tarp aukščių

$$\eta^2 = \frac{R\xi^2}{2\xi^2 - 1}. \tag{5}$$

Įstatę šį rezultatą į (4b), išreiškiame krūvių santykį

$$R^{-1/2} = (2\xi^2 - 1)^{-1/2} - (1-\xi^2)^{-1/2}. \tag{6}$$

Pastebime, kad apatinės laisvosios dalelės aukštis apribotas intervale $\frac{1}{2} \le \xi^2 \le \frac{2}{3}$, kadangi reiškiniai pošaknyje ir lygybės dešinioji pusė turi būti neneigiami. Pagal formulę (6) nesunkiai apskaičiuojame kiek norime priklausomybės $R = R(\xi)$ taškų ir sukeitę koordinatines ašis brėžiame priklausomybę $\xi = \xi(R)$. Tada belieka pasinaudoti (5) išraiška ir rasti priklausomybę $\eta = \eta(R)$. Gauti rezultatai pavaizduoti paveiksle. Mažų R verčių riboje tiek x tiek y artėja prie ribinės vertės $h/\sqrt{2}$.



3. Kai krūvių santykis $R >> 1$, viršutinė dalelė pakyla labai aukštai ir jos koordinatė nuo krūvių santykio priklauso kaip $y = h\sqrt{2R}$. Šį rezultatą lengviausia gauti pastebėjus, kad aukštai pakilęs viršutinis krūvis abu apatinius krūvius mato tarsi vieną dvigubo krūvio $2q$

darinį. Taigi, galioja paprastas pirmoje dalyje gautas rezultatas (1), kuriame vietoje krūvių sandaugos $(q \cdot q)$ turime įrašyti $(Q \cdot 2q) \equiv 2Rq^2$.

Kai jau pastebėjome antrojoje dalyje, nagrinėjamoje riboje vidurinis krūvis pakyla į ribinį leistiną aukštį $x = h\sqrt{2/3}$. Šį rezultatą suprasti taip pat nesunku. Reikalas tas, kad aukštai pakilęs viršutinis krūvis abi apatines daleles slegia lygiai puse savo svorio. Taigi, vidurinioji dalelė jaučiasi tarsi pasunkėjusi pusantro karto ir jos pusiausvyros padėtį vėlgi nusako (1) formulė, kurioje turime pakeisti $m \to \frac{3}{2}m$.

Užduoties aiškinamąjį sprendimą pateikė užduoties autorius dr. Egidijus Anisimovas.

Turnyro dalyvių sprendimų aptarimas / FT3-14 ▼

Nepaisant to, kad pirmasis uždavinio klausimas buvo tikrai nesudėtingas, dauguma turnyro dalyvių išsigando tolesnių gudresnių klausimų ir sprendimo nepateikė išvis. Tai buvo didžiausia ir dažniausiai pasikartojusi klaida. Su pirmąja užduotimi susidorojo praktiškai visi sprendusieji, o štai konstruoti aukščių grafikus daug kam buvo nelengva.

Užduoties sprendimo aptarimą parengė užduoties autorius ir jos sprendimų vertintojas dr. Egidijus Anisimovas.

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelė / FT3-14 ▼

Nr.	**Sprendimų vertinimo kriterijus**	**Vertė balais**
1.	Teisingai suformuluotos pusiausvyros sąlygos (dviem dalelėms) ir apskaičiuota pusiausvyros padėtis	2
2.	Apskaičiuotas mažų svyravimų periodas	2
3.	Suformuluotos pusiausvyros sąlygos (trim dalelėms) ir pertvarkyta lygčių sistema	2
4.	Grafiko konstravimo idėja ir rezultatas	2
5.	Ribos $Q >> q$ analizė	2
6.	Pateikta ne pagal reikalavimus	-1
Maksimalus sprendimo įvertinimas		10

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelę parengė užduoties autorius ir jos sprendimų vertintojas dr. Egidijus Anisimovas.