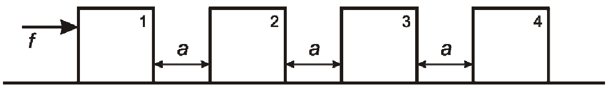
3-ASIS FIZIKOS TURNYRAS
7-oji užduotis Nr. FT3-7 / 2009 11 09 – 2009 12 06

Sąlyga / FT3-7 ▼

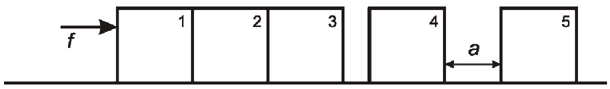
Susiduriančių tašelių traukinukas

Ant horizontalaus paviršiaus vienoje tiesėje vienodais tarpais a išdėstyta vienodų tašelių vora, taip, kaip parodyta 1 paveiksle. Trinties tarp tašelių ir paviršiaus koeficientas μ. Pradiniu laiko momentu tašeliai nejuda, ir pirmąjį iš jų ima veikti pastovi horizontaliai nukreipta jėga f, absoliučiu dydžiu lygi vieno tašelio svoriui. Akivaizdu, kad jei ši jėga yra pakankamai stipri, pirmasis tašelis judės link antrojo, kol su juo susidurs; tada toks dviejų tašelių junginys tarytum traukinukas judės link trečiojo ir taip toliau. Smūgiai tarp tašelių yra absoliučiai netamprūs, tai yra, galime įsivaizduoti, kad susidūrę tašeliai tiesiog sulimpa. Aiškumo dėlei 2 paveiksle parodytas toks trijų tašelių traukinukas.

Susitarkime u_n žymėti traukinuko, sudaryto iš n tašelių, pradinį greitį, tai yra tašelių rinkinio greitį iš karto po susidūrimo su n-uoju tašeliu (be abejo, $u_1 = 0$). Analogiškai v_n pažymėsime traukinuko, sudaryto iš n tašelių, galinį greitį, tai yra, greitį prieš pat susidūrimą su (n+1)-uoju tašeliu.



Pav. 1



Pav. 2

1. Pasinaudodami žinomais mechanikos dėsniais užrašykite rekursinius sąryšius, leidžiančius apskaičiuoti v_n vertes pagal žinomas u_n vertes bei u_{n+1} vertes pagal žinomas v_n vertes. Dydžiai μ, a ir laisvojo kritimo pagreitis g taip pat žinomi.

2. Kokioms trinties koeficiento μ vertėms esant traukinukas, sudarytas iš n tašelių, juda greitėdamas?

3. Išanalizuokite traukinuko, sudaryto iš n = 2 tašelių, judėjimo pobūdžio priklausomybę nuo μ vertės.

4. Kokioms μ vertėms esant, traukinukas sustos turėdamas n = 3 tašelius?

5. Tegul $\mu = \frac{1}{2}$. Nubrėžkite traukinuko greičio priklausomybės nuo (pirmojo tašelio) nukeliauto atstumo grafiką. Nurodykite visų charakteringų grafiko taškų koordinates. Jei jums patogiau vertikalioje ašyje atidėti ne paties greičio, o tam tikros jo nesudėtingos funkcijos vertes, taip ir pasielkite.

Beje, pasinaudojant 1 punkte gautais rekursiniais greičių sąryšiais, galima išreikštu pavidalu gauti u_n ir v_n išraiškas bet kokiam n. Kadangi šis uždavinys yra daugiau matematinis nei fizikinis, todėl uždavinio sąlyga to neprašo.

Užduotį parengė Vilniaus universiteto Fizikos fakulteto Teorinės fizikos katedros docentas, mokyklos "Fizikos olimpas" dėstytojas dr. Egidijus Anisimovas.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2009 11 09.*

Aiškinamasis sprendimas / FT3-7 ▼

1. Traukinuko greitis kinta dėka stūmos (f) ir trinties (t) jėgų atliekamo darbo, taigi, energijos tvermę užrašome taip: $\frac{1}{2}nmv_n^2 = \frac{1}{2}nmu_n^2 + (f - t)a$. Kadangi $f = mg$ ir $t = \mu nmg$, gauname

$$v_n^2 = u_n^2 + 2ga(\tfrac{1}{n} - \mu). \qquad (1)$$

Netampraus susidūrimo metu *n* tašelių sistemos turėtas judesio kiekis perduodamas (*n*+1) tašelių sistemai. Taigi,

$$u_{n+1} = v_n \frac{n}{n+1}. \qquad (2)$$

Pastebėsime, kad jei apskaičiavę galinį greitį pagal (1) gauname neigiamą dydį, tai reiškia, kad *n* tašelių traukinukas sustoja nepasiekęs (*n*+1)-ojo tašelio ir visas procesas baigiasi.

2. Akivaizdu, kad traukinukas iš *n* tašelių juda greitėdamas, jei *f* > *t*, tai yra, $\mu < \frac{1}{n}$.
Kad būtų patogiau toliau dirbti, rekursinius sąryšius iteruojame keletą kartų ir randame

$$u_1^2 = 0, \qquad v_1^2 = ga(2 - 2\mu),$$
$$u_2^2 = ga(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\mu), \qquad v_2^2 = ga(\tfrac{3}{2} - \tfrac{5}{2}\mu),$$
$$u_3^2 = ga(\tfrac{2}{3} - \tfrac{10}{9}\mu), \qquad v_3^2 = ga(\tfrac{4}{3} - \tfrac{28}{9}\mu).$$

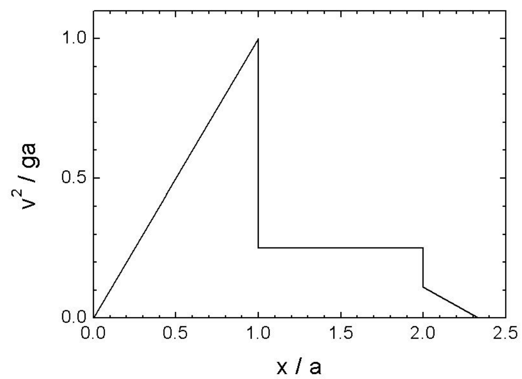
Dabar esame pasirengę atsakyti į likusius uždavinio klausimus.

3. Jau žinome, kad dviejų tašelių traukinukas juda greitėdamas, jei $\mu < \frac{1}{2}$. Priešingu atveju galimi dar trys variantai:

- jei $\frac{1}{2} < \mu < \frac{3}{5}$, traukinukas juda lėtėdamas iki susidūrimo su 3-iuoju tašeliu;
- jei $\frac{3}{5} < \mu < 1$, traukinukas juda lėtėdamas ir sustoja dar nepasiekęs 3-iojo tašelio;
- jei $\mu > 1$, dviejų tašelių traukinuko išvis neturime, nes stūmos jėga per silpna pajudinti netgi vieną tašelį. Kritinę vertę $\mu_{kr} = \frac{3}{5}$ radome iš lygties $v_2 = 0$.

4. Traukinukas sustos turėdamas tris tašelius, jei μ vertė yra didesnė už kritinę vertę, gaunamą iš lygties $v_2 = 0$, bet mažesnę už kritinę vertę, randamą iš lygties $v_3 = 0$. Taigi $\frac{3}{7} < \mu < \frac{3}{5}$.

5. Patogu braižyti greičio kvadrato grafiką. Šis grafikas – tai tiesių atkarpų seka, jungianti charakteringus taškus $(x = 0, v^2 = 0) \rightarrow (x = a, v^2 = ga) \rightarrow (x = a, v^2 = \frac{1}{4}ga) \rightarrow (x = 2a, v^2 = \frac{1}{4}ga)$ $\rightarrow (x = 2a, v^2 = \frac{1}{9}ga) \rightarrow (x = \frac{7}{3}a, v^2 = 0)$.



Kaip minėta sąlygoje, rekursinius greičių sąryšius galima išspręsti bendrajam atvejui. Pasinaudodami rekursiniais sąryšiais (1) ir (2), randame

$$u_{n+1}^2 = u_n^2 \frac{n^2}{(n+1)^2} + 2ag\frac{n}{(n+1)^2} - 2\mu ag\frac{n^2}{(n+1)^2}$$

ir iteruojame toliau:

$$u_{n+2}^2 = u_n^2 \frac{n^2}{(n+2)^2} + 2ag\frac{n + (n+1)}{(n+1)^2} - 2\mu ag\frac{n^2 + (n+1)^2}{(n+1)^2}.$$

Matome, kad šiuos rezultatus galime apibendrinti:

$$u_{n+k}^2 = u_n^2 \frac{n^2}{(n+k)^2} + \frac{2ag}{(n+k)^2} \sum_{l=0}^{k-1} (n+l) - \frac{2\mu ag}{(n+k)^2} \sum_{l=0}^{k-1} (n+l)^2$$

ir, pasinaudoję tuo, kad $u_1 = 0$, gauname

$$u_k^2 = \frac{2ag}{k^2} \sum_{l=0}^{k-1} l - \frac{2\mu ag}{k^2} \sum_{l=0}^{k-1} l^2 .$$

Sumos yra trivialios: $\sum_{l=0}^{k-1} l = \frac{1}{2} k(k-1)$ ir $\sum_{l=0}^{k-1} l^2 = \frac{1}{6} k(k-1)(2k-1)$. Taigi, galutiniai atsakymai yra tokie:

$$u_k^2 = ag \frac{k-1}{k} - \mu ag \frac{(k-1)(2k-1)}{3k},$$
$$v_k^2 = ag \frac{k+1}{k} - \mu ag \frac{(k+1)(2k+1)}{3k}.$$

Pastebėsime, kad lygties $v_k = 0$ apibrėžiama kritinė vertė $\mu_k = \frac{3}{2k+1}$. Taigi, traukinukas sustos turėdamas *n* tašelių, jei trinties koeficientas yra $\frac{3}{2n+1} < \mu < \frac{3}{2n-1}$.

Aiškinamąjį sprendimą pateikė užduoties autorius doc. dr. Egidijus Anisimovas.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2009 12 21.*

Sprendimų aptarimas / FT3-7 ▼

Dauguma sprendusiųjų su uždaviniu susidorojo neblogai, tačiau gana dažnai kartojosi šios klaidos ir netikslumai:

1) Trečioji užduotis prašė išanalizuoti dviejų tašelių traukinuko judėjimo pobūdį. Absoliuti dauguma sprendimų teisingai nustatė trinties koeficiento vertes, kurioms esant judėjimas yra tolygiai greitėjantis ar lėtėjantis, tačiau neatkreipė dėmesio, kad lėtėjantis traukinukas gali ir visai sustoti.

2) Greičio grafiką brėžti patogiau vertikalioje ašyje atidedant ne paties greičio, o jo kvadrato vertes (apie tai buvo užsiminta jau sąlygoje), kadangi tokiu atveju grafiką sudaro tiesių atkarpų seka. Brėžiant paties greičio priklausomybę tenka pavaizduoti ir dvi kvadratinės šaknies tipo kreivių atkarpas. Mane šiek tiek nustebino, kad nemažai sprendusiųjų nutarė nesimulkinti ir šias grafiko dalis pakeisti tiesiomis atkarpomis.

Sprendimų aptarimą parengė užduoties autorius ir jos sprendimų vertintojas doc. dr. Egidijus Anisimovas.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2009 12 21.*

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelė / FT3-7 ▼

Nr.	**Sprendimų vertinimo kriterijus**	**Vertė balais**
1.	1 klausimas	2
2.	2 klausimas	2
3.	3 klausimas	2
4.	4 klausimas	2
5.	5 klausimas	2
6.	Klaidos ir netikslumai	kiekvienam klausimui nuo -0,5 iki -1
Maksimalus sprendimo įvertinimas		10

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelę parengė užduoties autorius ir jos sprendimų vertintojas doc. dr. Egidijus Anisimovas.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2009 12 21.*