

4-ASIS FIZIKOS TURNYRAS
11-oji uždutis Nr. FT4-11 / 2011 01 31 – 2011 02 27

Sąlyga / FT4-11 ▼

Dviguba švytuoklė

Vertikalioje sienoje vienas virš kito įtvirtinti du ploni strypai, atstumas tarp jų $l=20$ cm. Prie viršutinio strypo pritvirtintas plonas lengvas nesitampantis ilgio $L=30$ cm siūlas, o prie siūlo galo pririštas mažas rutuliukas, kurio masė $m=2$ g. Rutuliukas atlenkiamas iš pusiausvyros padėties taip, kad siūlas sudarytų kampą α su vertikale, ir paleidžiamas.



- 1) Koks yra rutuliuko svyravimo periodas esant mažam atlenkimo kampui α ?
- 2) Kokiam mažiausiam kampui α esant siūlas bent vieną kartą apsivynios apie apatinį strypą?
- 3) Kokiam mažiausiam atstumui l esant galimas klausimo 2 nurodytas rezultatas?
- 4) Grafiškai pavaizduokite siūlo įtempimo jėgos priklausomybę nuo jo atsilenkimo nuo vertikalės kampo, kai klausimo 2 sąlyga patenkinta.
- 5) Grafiškai pavaizduokite apatinį strypą veikiančios jėgos didumo priklausomybę nuo siūlo atsilenkimo nuo vertikalės kampo kai klausimo 2 sąlyga patenkinta.

Uždutį parengė mokyklos „Fizikos olimpas“ steigėjų tarybos narys, buvęs ilgametis mokyklos direktorius (11 m.) ir šio Fizikos turnyro užduočių parengimo spręsti ir jų sprendimų vertinimo komisijos pirmininkas prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

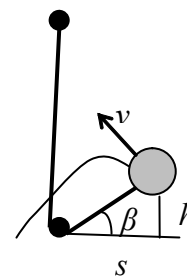
▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2011 01 31.

Aiškinamasis sprendimas / FT4-11 ▼

$$1) T = \frac{\pi}{\sqrt{g}}(\sqrt{L} + \sqrt{L-l}), T = 0,87 \text{ s.}$$

2) Sakykime, kad tuo metu, kai siūlas su horizontale sudaro kampą β , kaip parodyta paveiksle, rutuliuko greitis v yra toks, kad siūlo įtempimas išnyksta, t.y., sunkio jėgos dedamoji, nukreipta į apatinį strypą, yra lygi įcentrinei jėgai. Gauname:

$$\frac{v^2}{L-l} = g \sin \beta.$$



Toliau rutuliukas juda kaip kampu į horizontą mestas kūnas, siūlas lieka neįtemptas. Kad siūlas apsivyniotų apie strypą, rutuliuko trajektorija turi praeiti virš strypo. Pradinis rutuliuko aukštis virš strypo $h = (L-l)\sin \beta$, o horizontalia kryptimi jis turi nulėkti atstumą $s = (L-l)\cos \beta$. Rutuliuko judėjimo iki apatinio strypo laiką pažymime t . Tada

$$s = vt \sin \beta, h = \frac{gt^2}{2} - vt \cos \beta.$$

Išreiškę $t = s/(v \sin \beta)$ ir įrašę į h gauname

$$v^2 = \frac{gs^2}{2(h \sin \beta + s \cos \beta)} = \frac{g(L-l) \cos^2 \beta}{2 \sin \beta}.$$

Įrašę v gauname lygtį kampui β :

$$(L-l)g \sin \beta = \frac{g(L-l) \cos^2 \beta}{2 \sin \beta}, \quad \operatorname{tg}^2 \beta = \frac{1}{2}.$$

Randame kampą α . Iš energijos tvermės dėsnio turime

$$\begin{aligned} \frac{mv^2}{2} &= mg[L - L \cos \alpha - (L-l)l(1 + \sin \beta)], \\ \frac{(L-l) \sin \beta}{2} &= L - L \cos \alpha - (L-l)l(1 + \sin \beta), \\ \cos \alpha &= 1 - \left(1 - \frac{l}{L}\right) \left(1 + \frac{3}{2} \sin \beta\right). \end{aligned}$$

Kadangi

$$\sin \beta = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}}, \quad \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Gauname:

$$\cos \alpha = 1 - \left(1 - \frac{0,2}{0,3}\right) \left(1 + \frac{3}{2\sqrt{3}}\right), \quad \cos \alpha = 0,38, \quad \alpha = 68^\circ.$$

3) Didžiausias atlenkimo kampas $\alpha_{\max} = 90^\circ$, tada

$$1 - \left(1 - \frac{l_{\min}}{L}\right) \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0, \quad l_{\min} = 13,8 \text{ cm}.$$

4) Siūlo atsilenkimo nuo vertikalės kampą pažymime γ . Tas kampas kinta nuo 68° iki 0 , kai siūlas neliečia apatinio strypo, pagal sąlygoje pateiktą pav. rutuliukas yra kairėje pusėje nuo vertikalės, ir nuo 0 iki $90^\circ + \beta = 125^\circ$, kai siūlas liečia apatinį strypą, rutuliukas yra dešinėje pusėje nuo vertikalės, o siūlo įtempimas nelygus nuliui. Siūlo įtempimas kompensuoja rutuliuko sunkio jėgos dedamąją, nukreiptą išilgai siūlo, ir sukuria rutuliuką veikiančią įcentrinę jėgą. Gauname:

$$F = mg \cos \gamma + \frac{mv^2}{r},$$

čia $r = L$, kai siūlas neliečia apatinio strypo, ir $r = L - l$, kai siūlas apatinį strypą liečia. Rutuliuko judėjimo greitį randame iš energijos tvermės dėsnio. Rutuliukui esant kairėje pusėje:

$$\frac{mv^2}{2} = mgL(\cos \gamma - \cos \alpha), \quad F = mg(3 \cos \gamma - 2 \cos \alpha).$$

Rutuliukui esant dešinėje pusėje

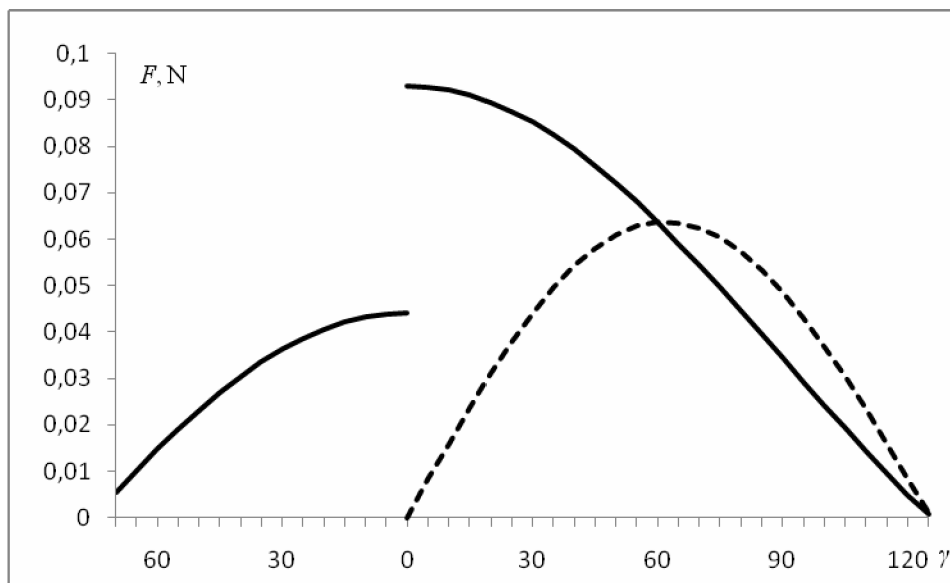
$$\frac{mv^2}{2} = mg[L(1 - \cos \alpha) - (L-l)(1 - \cos \gamma)], \quad F = mg\left(3 \cos \gamma + \frac{2(l - L \cos \alpha)}{L-l}\right).$$

Pagal pateiktas F išraiškas nubraižome grafiką (išsistinės linijos paveiksle).

5) Rutuliukui esant kairėje pusėje apatinis strypas neveikiamas ($F' = 0$). Siūlui liečiant strypą atstojamąją jėgą F' sukuria dvi siūlo įtempimo jėgos, sudarančios kampą $\varphi = \pi - \gamma$, jos didumas

$$F' = F \sqrt{2 - 2 \cos \gamma}.$$

Tos jėgos priklausomybė nuo γ pateikta paveiksle (punktyrinė linija).



Užduoties aiškinamąjį sprendimą pateikė užduoties autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2011 05 04.

Turnyro dalyvių sprendimų aptarimas / FT4-11 ▼

Dauguma sprendė teisingai. Pasitaikę netikslumai: periodas išreikštas dviejų skirtingo ilgio svyruoklių periodų suma; pateikta tik analizinė išraiška.

Tik keli sprendusieji gavo teisingą rezultatą. Dauguma gavo didesnę atlenkimo kampą, laikydami, kad siūlas visą laiką lieka įtemptas.

Užduoties sprendimo aptarimą parengė užduoties autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2011 05 04.

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelė / FT4-11 ▼

Nr.	Sprendimų vertinimo kriterijus	Vertė balais
1.	Pagal matematinės svyruoklės formulę nustatytas periodas	1
2.	Siūlui užlinkus už apatinio strypo tam tikroje vietoje išnyksta įtempimas	1
3.	Rutuliukas, kaip kampu į horizontą mestas kūnas, pralekia virš apatinio strypo	1
4.	Nustatytas atlenkimo kampas, reikalingas rutuliukui pralėkti virš apatinio strypo	1
5.	Nustatytas atstumas tarp strypų, kai rutuliukas pralekia virš apatinio strypo atlenkus 90° kampu	1
6.	Gautos siūlo įtempimo išraiškos (sunkio dedamosios ir išcentrinės jėgos suma) skirtingoms rutuliuko padėtimis	2
7.	Nubraižytas grafikas	1

8.	Gauta apatinę strypą veikiančios jėgos išraiška	1
9.	Nubraižytas grafikas	1
10.	Pateikta ne pagal reikalavimus	-1
Maksimalus sprendimo įvertinimas		10

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelę parengė užduoties autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2011 05 04.