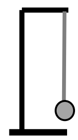
4-ASIS FIZIKOS TURNYRAS
14-oji užduotis Nr. FT4-14 / 2011 04 12 – 2011 05 09

Sąlyga / FT4-14 ▼

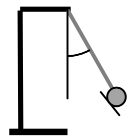
Guminė švytuoklė

Lengva guminė juostelė, kurios ilgis l=30 cm, o tamprumas k= 0,2 N/m vienu galu pritvirtinta prie stovo. Prie kito juostelės galo pritvirtintas mažas rutuliukas, kurio masė m=10 g.



1) Koks yra tokios svyruoklės mažų svyravimų periodas?

Rutuliukas atlenkiamas iš pusiausvyros padėties ir paremiamas taip, kad juostelė su vertikale sudarytų kampą $\alpha = 40°$. Pašalinus atramą rutuliukas paleidžiamas be pradinio greičio.



2) Kam lygus juostelės ilgis bei rutuliuko greitis ir pagreitis, kai rutuliukui svyruojant kampas β tarp juostelės ir vertikalės lygus a) $\beta_1 = 40°$, b) $\beta_2 = 20°$, c) $\beta_3 = 0$?

Užduotį parengė mokyklos „Fizikos olimpas" steigėjų tarybos narys, ilgametis mokyklos direktorius (11 m.) ir šio Fizikos turnyro užduočių parengimo spręsti ir jų sprendimų vertinimo komisijos pirmininkas prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2011 04 12.*

Aiškinamasis sprendimas / FT4-14 ▼

1) a) Rutuliukas gali svyruoti kaip matematinė svyruoklė, jo svyravimo periodas

$$T = 2\pi\sqrt{L/g}\,,\ L = l + mg/k\,,\ T = 2\pi\sqrt{(l + mg/k)/g}\,,\ T = 1{,}78\ \text{s}.$$

b) Rutuliukas gali svyruoti vertikaliai, jo svyravimo periodas

$$T' = 2\pi\sqrt{m/k}\,,\ T' = 1{,}4\ \text{s}.$$

2) a) Kai $\beta_1 = \alpha = 40°$, rutuliukas nejuda, juostelės ilgis

$$L_1 = l + \frac{mg\cos\alpha}{k},\ L_1 = 68\ \text{cm}.$$

Rutuliuko greitis

$$v_1 = 0\,,$$

rutuliuko pagreitis

$$a_1 = g\sin\beta_1\,,\ a_1 = 6{,}3\ \text{m/s}^2.$$

c) Kai $\beta_3 = 0$, rutuliukui panaudojame energijos tvermės dėsnį ir jėgų pusiausvyrą.

$$\begin{cases} \dfrac{mv_3^2}{2} + \dfrac{k(L_3 - l)^2}{2} - \dfrac{k(L_1 - l)^2}{2} = mg(L_3 - L_1\cos\alpha) \\ \dfrac{mv_3^2}{L_3} + mg = k(L_3 - l) \end{cases},$$

$$L_3^2 - \frac{3}{2}L_3\left(l + \frac{mg}{k}\right) + \frac{1}{2}\left(l + \frac{mg\cos\alpha}{k}\right)^2 = 0\,,$$

$$L_3 = \frac{3}{4}\left(l + \frac{mg}{k}\right)\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{8}{9}\left(\frac{kl + mg\cos\alpha}{kl + mg}\right)^2}\,\right].$$

Sprendinys su ženklu „–" netinka. L_3=94 cm.

Rutuliuko greitis

$$v_3 = \sqrt{L_3\left[\frac{l(L_3 - l)}{m} - g\right]},\ v_3 = 1{,}7\ \text{m/s},$$

rutuliuko pagreitis

$$a_3 = \frac{v_3^2}{L_3},\ a_3 = 3{,}06\ \text{m/s}^2.$$

b) Kai $\beta_2 = 20°$, nagrinėjame dvimatį judėjimą. Kintamaisiais panaudodami juostelės ilgį l ir jos sudaromą su vertikale kampą β, rutuliukui priskiriame statmenas juostelei greičio ir pagreičio komponentes $v_\perp$ ir $a_\perp$ ir jai lygiagrečias komponentes $v_{||}$ ir $a_{||}$, bei juostelės kampinį greitį $\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{v}_\perp}{l}$. Parašome judėjimo lygtis:

$$\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}^2 l}{\mathrm{d}t^2} = -k(l - l_0) + m\left(\dfrac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}\right)^2 l \\ ma_\perp = mg\sin\beta \end{cases}.$$

Kadangi $a_\perp = \frac{\mathrm{d}v_\perp}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(l\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}\right) = -l\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}$, o $\sin\beta \approx \beta$, gauname:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 l}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{k}{m}(l - l_0) = l\left(\dfrac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}\right)^2 \\ \dfrac{\mathrm{d}^2\beta}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{g}{l}\beta = -\dfrac{1}{t}\dfrac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} \end{cases}.$$

Gauname dvi susietas svyravimų lygtis. Lygčių sprendimas sudėtingas, vidurinės mokyklos žinių nepakanka. Apytiksliai laikome, kad rutuliukas juda harmoningai svyruodamas cikliniu dažniu 2ω išilgai juostelės ribose $L_1 \le l \le L_3$, ir kartu su juostele svyruoja cikliniu dažniu ω statmena juostelei kryptimi kintant kampui $-\beta_1 \le \beta \le \beta_1$. Tai aprašome išraiškomis

$$l = [L_1 + L_3 - (L_3 - L_1)\cos 2\omega t]/2,$$

$$\beta = \beta_1 \cos\omega t.$$

Imdami $\beta = 20°$, gauname $\omega t_2 = 60°$, tada $L_2 = 87{,}5\ \text{cm}$.

$$v_\| = \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = \omega(L_3 - L_1)\sin 2\omega t,\ v_\perp = -l\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} = \omega l\beta_1 \sin\omega t.$$

$$a_\| = \frac{v_\perp^2}{l} - \frac{\mathrm{d}^2 l}{\mathrm{d}t^2} = \frac{v_\perp^2}{l} - 2\omega^2(L_3 - L_1)\cos 2\omega t,\ a_\perp = \omega^2 l\beta_1 \cos\omega t.$$

$$a_\perp = g\sin\beta.$$

Imdami $\beta = 0$, gauname $\omega t_3 = 90°$

$$v_3 = \omega L_3 \beta_1,\ \omega = 2{,}6\ \text{s}^{-1},$$

$$a_\perp = 3{,}35\ \text{m/s}^2.$$

Gauname tokias greičio ir pagreičio reikšmes:

$$v_\| = 0{,}58\ \text{m/s},\ v_\perp = 1{,}37\ \text{m/s},\ v_2 = 1{,}49\ \text{m/s},$$

$$a_\| = 2{,}12\ \text{m/s}^2,\ a_2 = 3{,}96\ \text{m/s}^2.$$

Užduoties aiškinamąjį sprendimą pateikė užduoties autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2011 06 29.*

***Turnyro dalyvių sprendimų aptarimas / FT4-14* ▼**

Atsakydami į pirmąjį klausimą daugelis sprendusiųjų nurodė tik matematinės svyruoklės atvejį. Antrojo klausimo dauguma sprendusiųjų atsakė tik į a) ir c) dalis.

Užduoties sprendimo aptarimą parengė užduoties autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2011 06 29.*

***Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelė / FT4-14* ▼**

Nr.	Sprendimų vertinimo kriterijus	Vertė balais
1.	a) Matematinė svyruoklė, periodas	0,5
2.	Vertikali svyruoklė, periodas	0,5
3.	a) Juostelės ilgis	1
4.	Rutuliuko pagreitis	1
5.	c) Energijos tvermės dėsnis	0,5
6.	Jėgų pusiausvyros lygtis	0,5
7.	Juostelės ilgis	1
8.	Rutuliuko greitis	1
9.	Rutuliuko pagreitis	1
10.	b) Judėjimo lygtys	1
11.	Apytikslės svyravimo išraiškos	0,5
12.	Juostelės ilgis	0,5
13.	Rutuliuko greitis	0,5
14.	Rutuliuko pagreitis	0,5
15.	Pateikta ne pagal reikalavimus	-1
Maksimalus sprendimo įvertinimas		10

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelę parengė užduoties autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2011 06 29.*