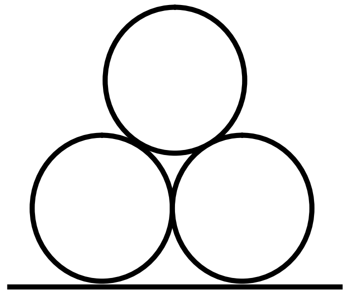
5-ASIS FIZIKOS TURNYRAS
14-oji užduotis Nr. FT5-14 / 2012 04 11 – 2012 05 07

Užduoties sąlyga / FT5-14 ▼

Trumpam susiglaudę vamzdžiai



Trys vienodi plonasieniai vamzdžiai, kurių spinduliai $r = 0{,}2$ m, sudėti ant kieto horizontalaus pagrindo taip, kaip parodyta paveiksle.

1) Kokį didžiausią greitį įgaus vamzdžiai, jei trinties koeficientas visiems besiliečiantiems paviršiams bus lygus nuliui, o sustatyti vamzdžiai bus paleisti be pradinio greičio?

2) Kaip pasikeis rezultatai, jei besiliečiančių vamzdžių paviršių trinties koeficientas bus 0, o vamzdžio ir pagrindo $\mu = 0{,}7$?

3) Kokiam mažiausiam trinties koeficientui, vienodam visiems besiliečiantiems paviršiams, esant tokia konstrukcija yra stabili?

Užduotį parengė mokyklos „Fizikos olimpas" steigėjų tarybos narys, ilgametis mokyklos direktorius (11 m.) ir šio Fizikos turnyro užduočių parengimo spręsti ir jų sprendimų vertinimo komisijos pirmininkas prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2012 04 11.*

Užduoties aiškinamasis sprendimas / FT5-14 ▼

1) Paleidus vamzdžius viršutinis vamzdis leidžiasi žemyn stumdamas apatinius vamzdžius į šonus. Pažymime viršutinio vamzdžio centro aukštį virš pagrindo h, atstumą tarp šoninių vamzdžių centrų $2x$, kampą tarp atkarpos OO‘, jungiančios viršutinio ir apatinio vamzdžių centrus, ir horizontalės φ. Tada:

$$h = r(1 + 2\sin\varphi),\ x = 2r\cos\varphi,$$

$$v_h = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = 2r\cos\varphi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t},\ v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2r\sin\varphi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t},\ \frac{v_x}{v_h} = \mathrm{tg}\varphi.$$

Panaudojame energijos tvermės dėsnį:

$$2mgr(\sin 60° - \sin\varphi) = \frac{m}{2}\left(v_h^2 + 2v_x^2\right) = \frac{mv_h^2}{2}\left(1 + 2\mathrm{tg}^2\varphi\right),$$

$$v_h = \sqrt{\frac{4gr(\sin 60° - \sin\varphi)}{1 + 2\,\mathrm{tg}^2\varphi}},\ v_x = \mathrm{tg}\varphi\sqrt{\frac{4gr(\sin 60° - \sin\varphi)}{1 + 2\mathrm{tg}^2\varphi}}.$$

Matome, kad $v_x = 0$, kai $\varphi = 0$ ir $\varphi = 60°$. Kadangi $v_x > 0$, tam tikrai vertei $\varphi = \varphi_1$ greitis tampa maksimalus ir toliau turėtų mažėti. Tačiau greičiui mažėti nėra priežasties. Tai reiškia, kad vamzdžiai atsiskiria, šoniniai vamzdžiai toliau juda pastoviu greičiu, o viršutinis vamzdis krinta laisvai. Randame maksimumo tašką.

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}\varphi} = 0,\ \sin^3\varphi + 3\sin\varphi - \sqrt{3} = 0.$$

Pažymime $f(\varphi) = \sin^3\varphi + 3\sin\varphi - \sqrt{3}$ ir lygtį $f(\varphi) = 0$ sprendžiame apytiksliai stygų metodu. Sudarome lentelę.

φ, □	$f(\varphi)$
30	-0,10737
33	0,063069
31,890	$-8{,}8\cdot10^{-5}$
31,891	$-6{,}1\cdot10^{-8}$
31,8914	$6{,}46\cdot10^{-14}$

Taigi, $\varphi_1 = 31°53'$. Tada $v_{h1} = 1{,}22$ m/s, $v_{x1} = 0{,}76$ m/s, $h_1 = 0{,}41$ m. v_x daugiau nekinta, o v_h skaičiuojame kaip laisvai krintančiam kūnui iš aukščio h_1 į aukštį $h = r$ pradiniu greičiu $v_h = v_{h1}$. Gauname $v_h = \sqrt{h_{h1}^2 + 2g(h_1 - r)}$, $v_h = 2{,}37$ m/s. Taigi, $v_{x\max} = 0{,}76$ m/s, $v_{h\max} = 2{,}37$ m/s.

2) Maksimali trinties jėga tarp apatinio vamzdžio ir pagrindo yra

$$F_t = \mu N,\ N = mg(1 + \sin\varphi_0),$$

o apatinį vamzdį stumianti jėga

$$F = mg\cos\varphi_0,$$

čia m – vamzdžio masė. Jei $F_t < F$, vamzdis slysta, o jei nelygybė priešinga – vamzdis rieda. Apskaičiavę gauname: $F_t = 18m$, $F = 4{,}9m$. Matome, kad $F_t > F$, taigi, šoniniai vamzdžiai pagrindu ne slys, o riedės, todėl iš energijos tvermės dėsnio gausime:

$$2mgr(\sin 60° - \sin\varphi) = \frac{m}{2}\left(v_h'^2 + 4v_x'^2\right) = \frac{mv_h^2}{2}\left(1 + 4\mathrm{tg}^2\varphi\right),$$

čia v_h' – viršutinio vamzdžio judėjimo greitis, v_x' – apatinio vamzdžio centro judėjimo greitis. Greičiai su kampu φ susieti sąryšiais

$$v_h' = \sqrt{\frac{4gr(\sin 60° - \sin\varphi)}{1 + 4\mathrm{tg}^2\varphi}},\ v_x' = \mathrm{tg}\varphi\sqrt{\frac{4gr(\sin 60° - \sin\varphi)}{1 + 4\mathrm{tg}^2\varphi}}.$$

Maksimali v_x' vertė gaunama išsprendus lygtį

$$\sin^3\varphi + 3\sin\varphi - \sqrt{3} = 0,$$

jos sprendinys $\varphi_1' = 28°11'$. Kadangi greitis pradžioje didėja ir pasiekia maksimumą, pagreitis, o tuo pačiu – ir viršutinio vamzdžio bei trinties jėgos sukuriamas jėgos momentas palaipsniui mažėja. Taigi, vamzdis rieda neslysdamas iki pat vamzdžiams atsiskiriant. Tuo metu vamzdžiai įgyja greičius

$$v_{h1}' = \sqrt{\frac{4gr(\sin 60° - \sin\varphi_1')}{1 + 4\mathrm{tg}^2\varphi_1'}},\ v_{h1}' = 1{,}2\ \text{m/s},$$

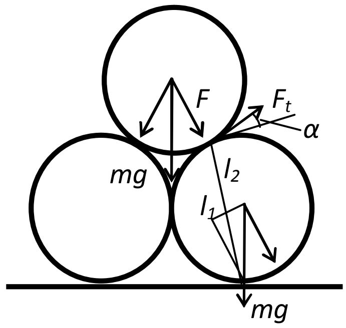
$$v_{x1}' = \mathrm{tg}\varphi_1'\sqrt{\frac{4gr(\sin 60° - \sin\varphi_1')}{1 + 4\mathrm{tg}^2\varphi_1'}},\ v_{x1}' = 0{,}64\ \text{m/s}.$$

Viršutinis vamzdis tuo metu yra virš pagrindo aukštyje $h_1' = 0{,}39$ m. laisvai krisdamas iki aukščio $h = r$ jis įgyja greitį $v_h' = \sqrt{v_{h1}'^2 + 2g(h_1' - r)}$, $v_h' = 2{,}27$ m/s. Taigi, $v_{x\max}' = 0{,}64$ m/s, $v_{h\max}' = 2{,}27$ m/s.

3) Kad apatinis vamzdis neslystų pagrindu, turi būti patenkinta sąlyga

$$\frac{3\mu mg}{2} > \frac{mg}{2\mathrm{tg}60^\circ},\ \mu > 0{,}2.$$

Kad apatinis vamzdis neriedėtų, turi būti patenkinta sąlyga



$$F_t l_2 > F l_1,$$

$$F = \frac{mg}{2\cos 30^\circ},\ F_t = \mu F,$$

$$F_t l_2 \cos\alpha = F l_1,$$

$$\mu = \frac{l_1}{l_2\cos\alpha} = \mathrm{tg}\alpha,\ \alpha = \frac{\pi}{12},\ \mu = 0{,}27.$$

Taigi, konstrukcija yra stabili, kai $\mu > 0{,}27$.

Užduoties aiškinamąjį sprendimą pateikė jos autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt *nuolat skelbiamas nuo 2012 07 19.*

Turnyro dalyvių sprendimų aptarimas / FT5-14 ▼

1) Tik trys sprendusieji atsižvelgė, kad leidžiantis viršutiniam vamzdžiui kontaktas su apatiniais vamzdžiais išnyksta anksčiau, negu apatinis vamzdis pasiekia pagrindą.

2) Sprendusieji užduotį pastebėjo, kad apatiniai vamzdžiai rieda ir įgauna daugiau energijos, negu slysdami, todėl pakinta vamzdžių atsiskyrimo padėtis. Vertinant trinties koeficiento vertės poveikį riedėjimui ir slydimui reikia atsižvelgti, kad vamzdžiai juda su pagreičiu, todėl viršutinio vamzdžio poveikio jėgos statinis įvertinimas pagal vamzdžių padėtį yra neteisingas: viršutinio vamzdžio sunkio jėgos horizontalioji dedamoji yra daug didesnė, negu jėga, reikalinga suteikti apatiniam vamzdžiui pagreitį, o tuo pačiu – ir už trinties jėgą, užtikrinančią apatinio vamzdžio riedėjimą neslystant.

3) Trijų vamzdžių konstrukcijos stabilumas jau buvo sprendžiamas fizikos turnyre, todėl pastabiausi dalyviai turėjo galimybę pasitikrinti ar nusirašyti atsakymą.

Užduoties sprendimų aptarimą parengė jos autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas svetainėje* www.olimpas.lt *nuolat skelbiamas nuo 2012 07 19.*

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelė / FT5-14 ▼

Nr.	Sprendimų vertinimo kriterijus	Vertė balais
1.1.	Nustatyta, kad leidžiantis viršutiniam vamzdžiui apatiniai vamzdžiai nuo jo atitrūksta ir toliau juda pastoviu greičiu	2
1.2.	Nustatytas viršutinio vamzdžio greitis	2
2.1.	Nustatytas vamzdžių atitrūkimo greitis apatiniams vamzdžiams riedant	2
2.2	Nustatytas viršutinio vamzdžio greitis	2
3.	Nustatytas trinties koeficientas	2
4.	Fizikiniai netikslumai	iki -2

5.	Matematiniai netikslumai	iki -1
Didžiausias galimas sprendimo įvertinimas		10

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelę parengė užduoties autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.