

5-ASIS FIZIKOS TURNYRAS
2-oji užduotis Nr. FT5-2 / 2011 07 25 – 2011 08 21

Užduoties sąlyga / FT5-2 ▼

Karštu vandeniu neskubėdami skiedžiame šaltą

100 J/K šiluminės talpos inde su vandens maišykle yra 2 litrai 10°C temperatūros vandens. Staiga atidarius karšto vandens čiaupą ir pamažu jį uždariant į tą indą pilamas 80°C temperatūros vanduo, kurio masė nuo laiko t priklauso taip: $m(t) = 1 + ut$ (kg), čia $u = -500$ g/min. Neatsižvelgus į šilumos nuostolius reikia rasti:

- 1) temperatūros inde priklausomybę nuo laiko ir ją pavaizduoti grafiškai;
- 2) temperatūrą inde į jį patekus pusei karšto vandens;
- 3) mažiausią galimą indo tūrį.

Kaip pakistų gauti rezultatai, praradus 10% karšto vandens atiduotos šilumos?

Užduotį parengė Vilniaus universiteto Taikomųjų mokslų instituto direktoriaus pavaduotojas, Vilniaus universiteto Fizikos fakulteto Puslaidininkių fizikos katedros docentas, mokyklos „Fizikos olimpas“ direktorius, jos steigėjų tarybos narys ir dėstytojas dr. Stasys Tamošiūnas.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2011 07 04.

Užduoties aiškinamasis sprendimas / FT5-2 ▼

Duota: $C = 100$ J/K = 0,1 kJ/K; $V_1 = 2$ l; $\rho = 1$ kg/l; $t_1 = 10$ °C; $t_2 = 80$ °C; $c = 4,2$ kJ/(kgK); $m(t) = 1 + ut$ (kg), $u = -500$ g/min = - 1/120 kg/s; $m = 0,5$ m_2 ; $z = 10\% = 0,1$.

Rasti: $t_i(t)$; t ; V_i .

Masės (kg) priklausomybė nuo laiko t (s): $m(t) = 1 - t/120$. Ji rodo, kad pradiniu laiko momentu ($t = 0$, čiaupo uždarymo pradžia) yra įpilta $m_0 = 1$ kg karšto vandens, o pamažu uždariant čiaupą ($t > 0$) papildomai patekusio į indą karšto vandens masė, išmatuota įvairiais laiko momentais, vis mažėja. Suprantama, kad karšto vandens inde daugėja tol, kol visai uždaromas čiaupas. Šalto vandens masė $m_1 = \rho V_1$; $m_1 = 1 \cdot 2 = 2$ (kg).

Pradinė temperatūra randama iš šilumos balanso kygties:

$$C(t_0 - t_1) + cm_1(t_0 - t_1) + cm_0(t_0 - t_2) = 0,$$
$$t_0 = \frac{Ct_1 + c(m_1t_1 + m_0t_2)}{C + c(m_1 + m_0)}, t_0 = \frac{0,1 \cdot 10 + 4,2(2 \cdot 10 + 1 \cdot 80)}{0,1 + 4,2(2 + 1)} \approx 33,2 \text{ (}^\circ\text{C)}.$$

Tegu papildoma masė matuojama laiko intervalais $\Delta t = \tau/n$, čia n yra intervalų skaičius, o τ – didžiausia galima matavimų trukmė, randama kai $m(t) = 0$:

$$\tau = \frac{1}{1/120} = 120 \text{ (s)}.$$

Tarkime, buvo matuojama kas $\Delta t_1 = \tau$. Tada $n_1 = 1$ ir į indą papildomai karšto vandens nepatektų: $m'_1 = 1 - 120/120 = 0$, temperatūra inde $T_{i1} = T_0$ nepriklausytų nuo laiko, o mažiausias galimas indo tūris (neatsižvelgus į vandens ir indo tūrių priklausomybę nuo temperatūros) būtų $V_{i1} = V_{i0} = 2 + 1 = 3$ (l). Deja, tai netenkina duotų sąlygų, nes čiaupas yra uždaromas ne staiga, o pamažu.

Tegu $\Delta t_2 = 60$ s, tada $n_2 = 2$. Per 60 s uždariant čiaupą į indą papildomai patekusio karšto vandens masė $m'_2 = 1 - 60/120 = 0,5$ (kg), o vėliau vanduo nebepatektų. Šiuo atveju šilumos balanso lygtis būtų tokia:

$$C(t_{i2} - t_0) + c(m_1 + m_0)(t_{i2} - t_0) + cm'_2(t_{i2} - t_0) = 0.$$

Temperatūra inde pakiltų iki:

$$t_{i2} = \frac{Ct_0 + c[(m_1 + m_0)t_0 + m'_2 t_2]}{C + c(m_1 + m_0 + m'_2)}, t_{i2} \approx \frac{0,1 \cdot 33,2 + 4,2[(2+1)33,2 + 0,5 \cdot 80]}{0,1 + 4,2(2+1+0,5)} \approx 39,8 (^{\circ}\text{C})$$

ir po to (po 60 s) nebekistų.

Temperatūra, į indą patekus pusei karšto vandens, randama iš tokios šilumos balanso lygties:

$$C(t'_2 - t_1) + cm_1(t'_2 - t_1) + 0,5c(m_0 + m'_2)(t'_2 - t_2) = 0;$$

$$t'_2 = \frac{Ct_1 + c[m_1 t_1 + 0,5(m_0 + m'_2)t_2]}{C + c[m_1 + 0,5(m_0 + m'_2)]}, t'_2 = \frac{0,1 \cdot 10 + 4,2[2 \cdot 10 + 0,5(1 + 0,5)80]}{0,1 + 4,2[2 + 0,5(1 + 0,5)]} \approx 28,9 (^{\circ}\text{C}).$$

Mažiausias indo (tegu tai indas su paslankiu stūmokliu virš vandens) tūris tada būtų $V_{i2} = V_{i1} + m'_2 / \rho; V_{i2} = 3 + 0,5/1 = 3,5$ (l).

Šilumos balanso lygtys praradus z dalį karšto vandens atiduotos šilumos ir atitinkamos temperatūros:

$$C(t'_{i2} - t_1) + cm_1(t'_{i2} - t_1) + c(1-z)(m_0 + m'_2)(t'_{i2} - t_2) = 0,$$

$$C(t''_2 - t_1) + cm_1(t''_2 - t_1) + 0,5c(1-z)(m_0 + m'_2)(t''_2 - t_2) = 0;$$

$$t'_{i2} = \frac{Ct_1 + c[m_1 t_1 + (1-z)(m_0 + m'_2)t_2]}{C + c[m_1 + (1-z)(m_0 + m'_2)]}, t'_{i2} = \frac{0,1 \cdot 10 + 4,2[2 \cdot 10 + 0,9(1 + 0,5)80]}{0,1 + 4,2[2 + 0,9(1 + 0,5)]} \approx 38 (^{\circ}\text{C}).$$

$$t''_2 = \frac{Ct_1 + c[m_1 t_1 + 0,5(1-z)(m_0 + m'_2)t_2]}{C + c[m_1 + 0,5(1-z)(m_0 + m'_2)]}, t''_2 = \frac{1 + 4,2[20 + 0,45 \cdot 1,5 \cdot 80]}{0,1 + 4,2(2 + 0,45 \cdot 1,5)} \approx 27,5 (^{\circ}\text{C}).$$

Taigi, atidavus dalį šilumos, temperatūra inde būtų apie 1,8 ir 1,4 $^{\circ}\text{C}$ žemesnė, o tūris nepakistų.

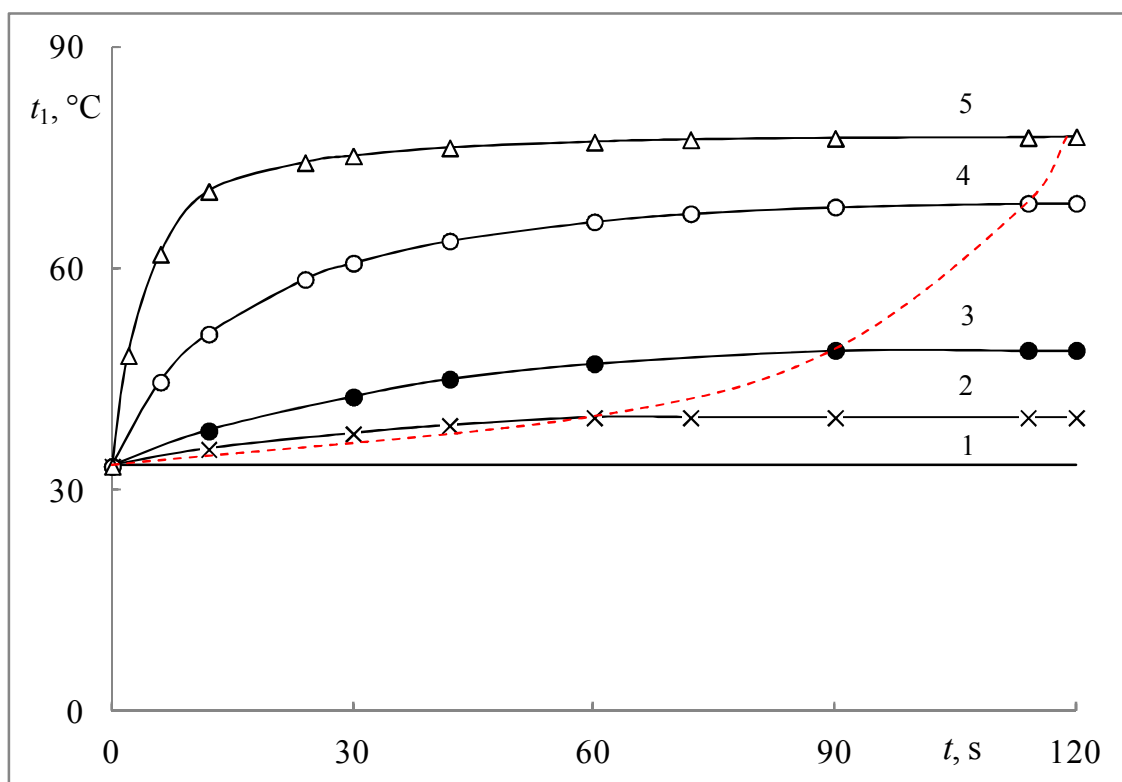
Verta pažymėti, kad jei tikėtų duota papildomo karšto vandens masės išraiška ir mažesniems nei Δt_2 matavimo intervalams, tai turėtume didesnes temperatūros inde ir jo mažiausio galimo tūrio vertes. Pavyzdžiui, $\Delta t_3 = 30$ s, tada $n_3 = 4$, o po kiekvieno 30 s laiko intervalo paeiliui papildomo karšto vandens masė mažėja pagal aritmetinę progresiją, kurios n -tasis narys gali būti išreikštas pavidalu $m_n = 1 - 30n/120$ (0,75 kg; 0,5 kg; 0,25 kg ir 0), o progresijos narių suma, atitinkanti visą patekusio į indą karšto vandens masę, uždariant čiaupą didėja lėtėjančiai: $m'_3(n) = (1 - 1/4 + 1 - n/4)0,5n = (7 - n)n/8$. Taigi, per 90 s uždarius čiaupą inde yra patekę dar 1,5 kg karšto vandens, o mažiausias indo tūris $V_{i3} = 3 + 1,5 = 4,5$ l. Jei $\Delta t_4 = 6$ s, tai $n_4 = 20$, $m'_4(n) = (39 - n)n/40$ (uždariant čiaupą per 114 s patektų 9,5 kg karšto vandens, $V_{i4} = 12,5$ l), o jei būtų $\Delta t_5 = 1$ s, tai $n_5 = 120$, $m'_5(n) = (239 - n)n/240$ (59,5 kg per 119 s, $V_{i5} = 62,5$ l). Suprantama, kad visais čia pažymėtais atvejais uždariant karšto vandens čiaupą temperatūra inde lėtėjančiai didėja ir tuo iki vis didesnių verčių, kuo didesnis n . Šilumos balanso lygtyje įrašius sumines karšto vandens masės $m'(t)$ vertes įvairiais laiko momentais apskaičiuojama temperatūros inde priklausomybė nuo laiko:

$$C[t_i(t) - t_1] + cm_1[t_i(t) - t_1] + c[m_0 + m'(t)][t_i(t) - t_2] = 0,$$

$$t_i(t) = \frac{Ct_1 + c\{m_1 t_1 + [m_0 + m'(t)]t_2\}}{C + c[m_1 + m_0 + m'(t)]}, t_i(t) = \frac{421 + 336m'(t)}{12,7 + 4,2m'(t)}.$$

Temperatūros inde priklausomybės nuo laiko yra pateiktos paveiksle, kuriame štrichinė linija jungia taškus, nuo kurių į dešinę temperatūra nepriklauso nuo laiko po čiaupo uždarymo

(kreivių numeriai atitinka ką tik aprašytus intervalų skaičius n). Pavyzdžiui, jei $\Delta t_5 = 1$ s, tai didžiausia temperatūra inde $t_{i5} \approx 77,8^\circ\text{C}$.



Verta atkreipti dėmesį į tai, kad temperatūrą inde, pakankamai artimą ką tik rastoms, galėjome įvertinti viską čia žymiai supaprastinę, jei būtume iškart pastebėję, kad vandens šiluminė talpa yra žymiai didesnė už indo su maišykle šiluminę talpą. Pavyzdžiui, šalto vandens šiluminė talpa

$$C_1 = cm_1; C_1 = 4,2 \cdot 2 = 8,4 \text{ (kJ/K)}$$

yra žymiai didesnė už indo su maišykle šiluminę talpą C . Todėl, kad ir kiek būtų neįdomu dėl indo indėlio nuvertinimo, atmetę pirmąjį narį šilumos balanso lygtyse, gautume paprastesnę jo (šiuo atveju šalto ir karšto vandens mišinio) temperatūros išraišką:

$$t_i = \frac{m_1 t_1 + m_2 t_2}{m_1 + m_2}.$$

Įrašę čia karšto vandens masę, žymiai didesnę nei šalto vandens masę, nenustebsime, kad, esant trumpesniems į indą papildomai patekusios karšto vandens masės matavimo laiko intervalams, temperatūra inde, patekus pusei karšto vandens, tampa vis artimesnė temperatūrai, kai patenka visas karštas vanduo. Vėl tegu $\Delta t = 1$ s, tada

$$t_i = \frac{2 \cdot 10 + 60,5 \cdot 80}{2 + 60,5} \approx 77,8 \text{ (}^\circ\text{C)}; t'_i = \frac{2 \cdot 10 + 30,25 \cdot 80}{2 + 30,25} \approx 75,7 \text{ (}^\circ\text{C)};$$

$$t''_i = \frac{2 \cdot 10 + 0,9 \cdot 60,5 \cdot 80}{2 + 0,9 \cdot 60,5} \approx 77,5 \text{ (}^\circ\text{C)}.$$

Užduoties aiškinamąjį sprendimą pateikė užduoties autorius dr. Stasys Tamošiūnas.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2011 12 14.

Turnyro dalyvių sprendimų aptarimas / FT5-2 ▼

Dauguma turnyro dalyvių sąlygoje pateiktą masės priklausomybę nuo laiko susiejo su mase karšto vandens kitame inde, iš kurio pilamas tas vanduo į tiriamą indą su maišykle. Esant tokiai prielaidai gavo, kad per dvi minutes į tiriamą indą tolygiai tekant teiškėga vienas kilogramas karšto vandens ir pasiekama 33,2°C temperatūra, o čiaupą pakanka tik atidaryti – uždarinėti nebereikia. Taip netenkinama sąlyga, kad čiaupas yra uždaromas pamažu, ir gaunamas populiariausias atsakymas, kad mažiausias galimas tiriamo indo tūris lygus trims litrams. Keli turnyro dalyviai tūrio skaičiavimą patikslino įvertinę vandens šiluminę plėtrą, nors to ir nebuvo prašyta.

Atidžiau pažiūrėjus paaiškėja, kad pateikta masės priklausomybė nuo laiko negali būti taikoma čiaupo atidarymui, o tinka tik jo uždarymui, laiko atskaitos pradžią susiejus su čiaupo uždarinėjimo pradiniu momentu, kuomet jau yra patekęs vienas kilogramas karšto vandens, ir įvairiais laiko momentais randant papildomai į tiriamą indą patekusio karšto vandens masę.

Padėtis tapo komplikauta tikriausiai dėl to, kad pirminiame užduoties sąlygos variante buvo paminėta, jog vienodais laiko tarpais matuojama papildomai patekusio vandens masė, o vėliau paskelbimui sąlyga buvo sutrumpinta tikintis, kad tai paskatins turnyro dalyvius guviau pažvelgti į duotą padėtį. Trūkstant duomenų kartais tenka juos išivesti ir atsakymą per juos išreikšti, o jei yra nereikalingų duomenų, tai tą aptikus verta jų nenaudoti. Tiesa, 2011 08 09 “Fizikos olimpo” nuomonių svetainėje buvo paklausta apie duotą masės priklausomybę nuo laiko, bet klausėjas pasivadino “niekas”, tad nebuvo kam paaiškinti...

Užduoties sprendimų aptarimą parengė užduoties autorius dr. Stasys Tamošiūnas.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2011 12 14.

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelė / FT5-2 ▼

Nr.	Sprendimų vertinimo kriterijus	Vertė balais
1	Rasta ir pateikta grafiškai indo temperatūros priklausomybė nuo laiko	5
2	Rasta temperatūra patekus pusei karšto vandens	2
3	Rastas mažiausias indo tūris	2
4	Įvertinti pakitimai praradus dalį šilumos	1
5	Neįvertintas lėtas čiaupo uždarymas	-3
6	Nėra grafiko	-1
7	Pateikta ne pagal reikalavimus, be paaiškinimų	iki -1
8	Kiti netikslumai p. 1-4	po -(0,1-0,5)
Didžiausias galimas sprendimo įvertinimas		10

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelę parengė užduoties autorius dr. Stasys Tamošiūnas.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2011 12 14.