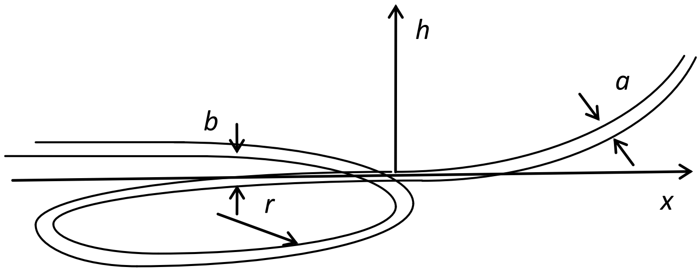
6-ASIS FIZIKOS TURNYRAS
10-oji užduotis Nr. FT6-10 / 2013 01 07 – 2013 02 04

Sąlyga / FT6-10 ▼

Rutuliukas ant bėgių



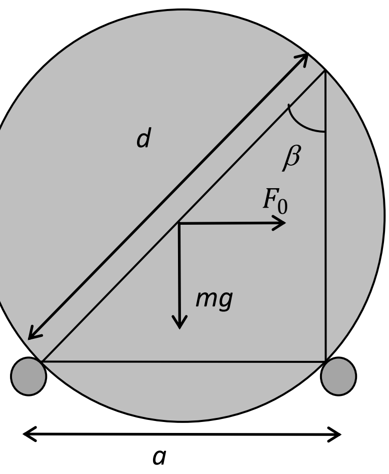
Iš plonos standžios vielos pagaminti lygiagretūs $a = 2\,\text{cm}$ pločio bėgiai, išlenkti ir įtvirtinti, kaip parodyta brėžinyje. Dešiniosios bėgių dalies formą aprašo išraiška $h = kx^2$, $k = 0{,}5\,\text{m}^{-1}$. Kairioji bėgių dalis sudaro vertikalios spiralės viją, jos spindulys $r = 20\,\text{cm}$, žingsnis $b = 4\,\text{cm}$. Ant bėgių padedamas homogeninis rutuliukas, kurio skersmuo $d = 3\,\text{cm}$. Rutuliuko ir bėgių trinties koeficientas $\mu = 0{,}13$.

1) Kokiu mažiausiu greičiu turėtų neslysdamas riedėti apatiniame taške rutuliukas, kad pasiektų viršutinę horizontalią bėgių dalį?
2) Kokiame didžiausiame aukštyje dešinėje pusėje padėtas ir paleistas be pradinio greičio rutuliukas riedės neslysdamas?
3) Kokiame didžiausiame aukštyje dešinėje pusėje padėtas ir paleistas be pradinio greičio rutuliukas pasieks horizontalią bėgių dalį kairėje pusėje?

Užduotį parengė mokyklos „Fizikos olimpas" steigėjų tarybos narys, ilgametis mokyklos direktorius (11 m.) ir šio Fizikos turnyro užduočių parengimo spręsti ir jų sprendimų vertinimo komisijos pirmininkas prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2013 01 07.*

Užduoties aiškinamasis sprendimas / FT6-10 ▼



1) Spiralės bėgiai su horizontu sudaro mažą kampą $\alpha = \sin\alpha = \mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{b}{2\pi r} = 0{,}032, \cos\alpha = 0{,}9995 \approx 1,$ todėl rutuliuko svorio jėga, veikianti bėgius, gali būti laikoma vertikalia. Rutuliuko padėtis ant bėgių ir jį veikiančios jėgos pavaizduotos paveiksle. Riedant spirale (rutuliuko masė m, centro greitis v) bėgius veiks rutuliuko svoris mg, išcentrinė jėga $F_0 = \dfrac{mv^2}{r + \dfrac{a}{2}}$ ir trinties jėga, nes vidinė bėgių dalis yra trumpesnė už išorinę, todėl riedėti spirale nepraslysdamas rutuliukas negali. Rutuliuko prispaudimo prie išorinio ir vidinio bėgių jėgos atitinkamai yra

$$F = m\left(\frac{gd}{2\sqrt{d^2 - a^2}} + \frac{v^2 d}{a(2r + a)}\right),$$

$$F' = m\left(\frac{gd}{2\sqrt{d^2 - a^2}} - \frac{v^2 d}{a(2r + a)}\right).$$

$F > F'$, todėl rutuliukas išoriniu bėgiu riedės neslysdamas, o vidiniu riedės praslysdamas, slydimo kelias pakylant spirale $l = 2\pi(r + a) - 2\pi r = 2\pi a$. Rutuliuko inercijos momentas einančios per centrą ašies atžvilgiu yra

$$I_0 = \frac{md^2}{10},$$

o einančios per lietimosi su bėgiais taškus ašies atžvilgiu

$$I = \frac{md^2}{10} + \frac{m\llbracket(d\rrbracket^2 - a^2)}{4} = \frac{m}{4}\left(\frac{7d^2}{5} - a^2\right).$$

Mažiausiam pradiniam riedančio rutuliuko centro greičiui v_0 esant rutuliukas, pasiekęs viršutinę spiralės dalį, sustos. Tada iš energijos tvermės dėsnio gauname:

$$v_0^2 = \frac{g\left(b\left(d^2 - a^2\right) + \mu\left(\pi a d\sqrt{d^2 - a^2} - \frac{d(d^2 - a^2)}{a(2r + a)}\int_0^l v(x)^2 dx\right)\right)}{\frac{2I}{m}}.$$

Rutuliukui riedant jo centro greitis $v(x)$ mažėja nuo v_0 iki 0, tačiau jo priklausomybės nuo *x* nežinome. Jei į išcentrinę jėgą neatsižvelgtume, gautume

$$v_0^2 = \frac{g\left(b\left(d^2 - a^2\right) + \pi\mu a d\sqrt{d^2 - a^2}\right)}{\frac{2I}{m}}, \qquad v_0^{(0)} = 0{,}76$$

m/s.

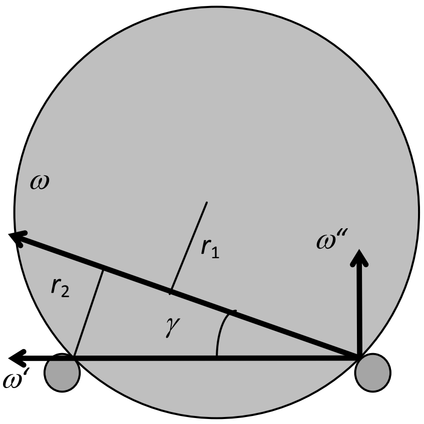
Tai maksimali pradinio greičio vertė. Jei laikytume, kad greitis nuo *x* nepriklauso, t.y., $v(x) = v_0$, v_0^2 išraiškoje paskutinio nario integralas

$$\int_0^l v_0^2 dx = l v_0^2 = 2\pi a v_0^2.$$

Įrašę integralo išraišką gauname

$$v_0^2 = \frac{g\left(b\sqrt{d^2 - a^2} + \pi\mu a d\right)}{\frac{1}{4\llbracket(d\rrbracket^2 - a^2)}\left(\frac{7d^2}{5} - a^2\right) + \frac{2\pi d}{(2r + a)}}, \qquad v_0^{(1)} = 0{,}73$$

m/s.



Tai minimali pradinio greičio vertė. Kadangi vertės nelabai skiriasi, imame vidutinę vertę $v_0 = 0{,}74$ m/s.

Tiksliau nagrinėjant rutuliuko judėjimą reikėtų išspręsti jo judėjimo lygtį. Riedėdamas spirale rutuliukas sukasi kampiniu greičiu ω' apie horizontalią ašį ir kampiniu greičiu ω'' apie vertikalią ašį, o pilnas kampinis greitis ω, kuris atitinka ir momentinę sukimosi ašį, yra tų greičių vektorinė suma, kaip pateikta pav. Riedėdamas rutuliukas apie horizontalią ašį apsisuka apie $n = \frac{2\pi(r + a)}{2\pi r_1} \approx \frac{2(r + a)}{\sqrt{d^2 - a^2}} = 20$ kartų, o apie vertikalią ašį – tik vieną kartą, $\omega' \gg \omega''$, kampas γ mažas, todėl $\gamma = \sin\gamma = \mathrm{tg}\,\gamma, \cos\gamma = 1$,

$$r_1 = \frac{d\sin(90° - \beta - \gamma)}{2} = \frac{\sqrt{d^2 - a^2} - a\sin\gamma}{2} = \frac{\sqrt{d^2 - a^2} - a\gamma}{2}, \qquad r_2 = a\sin\gamma = a\gamma.$$

Kampą γ nustatome iš lygties

$$\gamma = \frac{2\pi r_1}{2\pi(r + a)}, \qquad \gamma = \frac{\sqrt{d^2 - a^2} - a\gamma}{2(r + a)},$$

$$\gamma = \frac{\sqrt{d^2 - a^2}}{2r + 3a}, \qquad \gamma = 0{,}049 = 2{,}8°.$$

Rutuliuko inercijos momentas momentinės sukimosi ašies atžvilgiu

$$I' = \frac{md^2}{10} + mr_1^2.$$

Riedantį rutuliuką veikia sunkio sukurtas jėgos momentas $N_1 = r_1 mg \sin\alpha$ ir trinties sukurtas jėgos momentas $N_2 = r_2 \mu F'$, stabdantieji riedėjimą. Rutuliuko sukamajam judėjimui taikydami antrąjį Niutono dėsnį jo kampiniam pagreičiui $\varepsilon = \frac{1}{r_1}\frac{dv}{dt}$ gauname lygtį

$$\frac{I'}{r_1}\frac{dv}{dt} = -r_1 mg \sin\alpha - r_2 m\mu\left(\frac{gd}{2\sqrt{d^2-a^2}} - \frac{dv^2}{a(2r+a)}\right),$$

$$\frac{dv}{v^2 - g(2r+a)\left(\frac{r_1}{\mu d \sin\gamma}\sin\alpha + \frac{a}{2\sqrt{d^2-a^2}}\right)} = \frac{\mu d r_1 \sin\gamma}{\frac{(2r+a)I'}{m}} dt.$$

Pažymime

$$v_1^2 = g(2r+a)\left(\frac{r_1}{\mu d \sin\gamma}\sin\alpha + \frac{a}{2\sqrt{d^2-a^2}}\right), \qquad v_1 = 3{,}0 \text{ m/s},$$

$$q = \frac{\mu d r_1 \sin\gamma}{\frac{(2r+a)I'}{m}}, \qquad q = 0{,}025\ m^{-1}.$$

Tada

$$\frac{dv}{v^2 - v_1^2} = q dt,$$

$$\frac{dv}{(v-v_1)} - \frac{dv}{(v+v_1)} = 2v_1 q dt,$$

$$\ln(v-v_1) - \ln(v+v_1) = 2v_1 qt + C,$$

$$\frac{\ln((v-v_1))}{(v+v_1)} = 2v_1 qt + C,$$

$$\frac{(v-v_1)}{(v+v_1)} = Ce^{2v_1 qt},$$

$$v = v_1 \frac{1 + Ce^{2v_1 qt}}{1 - Ce^{2v_1 qt}},$$

čia C – integravimo konstanta. Jei rutuliukas pasiekia viršutinę bėgių dalį per laiką t_1, tai esant mažiausiam pradiniam greičiui $v(0) = v_0$ galutinis greitis $v(t_1) = 0$. Tada

$$1 + Ce^{2v_1 qt_1} = 0, \qquad C = -e^{-2v_1 qt_1},$$

$$v = v_1 \frac{1 - e^{2v_1 q(t-t_1)}}{1 + e^{2v_1 q(t-t_1)}} = -v_1 \frac{\mathrm{sh}[v_1 q(t-t_1)]}{\mathrm{ch}[v_1 q(t-t_1)]}.$$

Čia panaudotos hiperbolinės funkcijos

$$\mathrm{sh}u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}, \qquad \mathrm{ch}u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}.$$

Laikui t_1 nustatyti panaudojame rutuliuko centro nueito kelio išraišką:

$$\pi(2r+a) = \int_0^{t_1} v(t)dt = -v_1 \int_0^{t_1} \frac{\mathrm{sh}[v_1 q(t-t_1)]}{\mathrm{ch}[v_1 q(t-t_1)]} dt =$$

$$= -\frac{1}{q}\ln \mathrm{ch}[v_1 q(t-t_1)] \Big|_0^{t_1} = = \frac{1}{q}\ln \mathrm{ch}(v_1 q t_1).$$

$$\mathrm{ch}(v_1 q t_1) = e^{\pi q(2r+a)}.$$

Tada pradinis greitis

$$v_0 = v(0) = v_1 \frac{\mathrm{sh}[qv_1(t_1)]}{\mathrm{ch}[qv_1(t_1)]} = v_1 \frac{\sqrt{\mathrm{ch}^2[qv_1(t_1)] - 1}}{\mathrm{ch}[qv_1(t_1)]} = v_1 \sqrt{1 - \mathrm{ch}^{-2}[qv_1(t_1)]},$$

$$v_0 = v_1\sqrt{1 - e^{-2\pi q(2r+a)}}, \qquad v_0 = 0{,}75 \text{ m/s.}$$

2) Padėtas ant bėgių, sudarančių su horizontu kampą β, rutuliukas, veikiamas sunkio jėgos, galėtų riedėti kampiniu pagreičiu

$$\varepsilon'' = (mg\sqrt{(d^{\uparrow}2 - a^{\uparrow}2)}\ \sin()/2I = (2g\sqrt{(d^{\uparrow}2 - a^{\uparrow}2)}\ \sin()/(7d^{\uparrow}2/5 - a^{\uparrow}2).$$

Trinties jėga jam galėtų suteikti kampinį pagreitį

$$\varepsilon^{\uparrow\prime} = (\mu mgd\ \cos()/(2I_{\downarrow}0) = (5\mu g\ \cos()/4d.$$

Rutuliukas riedės neslysdamas, jei

$$\varepsilon' \geq \varepsilon'', \qquad \mu \geq (4d\sqrt{(d^{\uparrow}2 - a^{\uparrow}2)})/(7d^{\uparrow}2 - 5a^{\uparrow}2)\ \mathrm{tg}(.$$

Kadangi $\mathrm{tg}[= dh/dx = 2kx,$ gauname

$$x \leq \frac{\mu(7d^2 - 5a^2)}{4kad}, \qquad h \leq \frac{[\mu(7d^2 - 5a^2)]^2}{16kd^2(d^2 - a^2)}, \qquad h = 0{,}087 \text{ m.}$$

Tokiame aukštyje padėto ir paleisto be pradinio greičio rutuliuko centras žemiausioje bėgių vietoje įgaus greitį

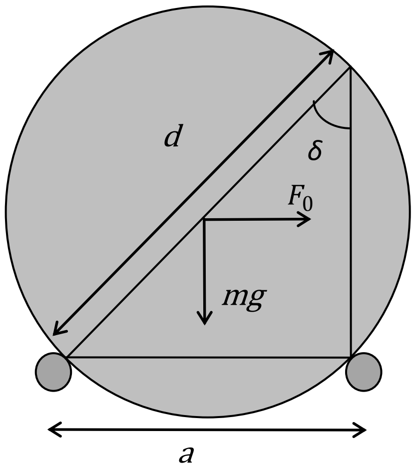
$$v' = \sqrt{\frac{2gh(d^2 - a^2)}{\frac{7d^2}{5} - a^2}}, \qquad v' = 0{,}99\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

3) Riedantį spirale v'' greičiu rutuliuką veiks išcentrinė jėga F_0, atramos į bėgį taško atžvilgiu sukuriantį jėgos momentą

$$N = (m\ [v'']^{\uparrow}2\ \sqrt{(d^{\uparrow}2 - a^{\uparrow}2)})/2(r + a/2),$$

kurį turi kompensuoti sunkio jėgos sukuriamas jėgos momentas

$$N' = \frac{mga}{2}.$$



Jeigu

$$\Delta N = N - N' \geq 0,$$

Rutuliukas remsis tik į išorinį bėgį ir riedės tuo bėgiu kildamas į viršų. Ribiniu atveju $N = N'$,

$$v'' = \sqrt{\frac{ga(2r + a)}{2\sqrt{d^2 - a^2}}}, \qquad v'' = 1{,}36\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Kai rutuliuko greitis bus didesnis už v'', rutuliukas nuvirs nuo bėgių. Matome, kad $v'' > v'$, taigi, rutuliukas turės būti padėtas aukščiau negu $h = 0{,}11$ m ir pradžioje riedės praslysdamas. Sakykime, kad rutuliukas paleidžiamas be pradinio greičio iš aukščio $h' > h$. Iki aukščio h'' jis riedės praslysdamas, jo centras įgaus greitį v''', o toliau jis riedės nepraslysdamas ir apačioje įgaus greitį v''. Rutuliukui slystant trinties jėga $F_{tr} = \mu mg\cos\varphi$, $\left(\mathrm{tg}\,[\varphi = \frac{dh}{dx}\right)]$ atlieka darbą

$$A = \int_{\downarrow}h''^{\uparrow}h' [F_{\downarrow}tr\ dl = \int_{\downarrow}(\sqrt{(h''/k)})^{\uparrow}(\sqrt{(h'/k)}) [\mu mg\ \cos\ [\varphi\ dx/\cos\varphi] = \mu mg/\sqrt{k}\ (\sqrt{(h')} - \sqrt{h''}$$

Panaudojame energijos tvermės dėsnį ir gauname lygčių sistemą:

Iš pirmųjų dviejų lygčių eliminuojame v''' ir įrašome A išraišką:

$$\mu mgI/(I_{\downarrow}0\ \sqrt{k})\ (\sqrt{(h')} - \sqrt{h''}) = mg(h^{\uparrow\prime} - h'') - \mu mg/\sqrt{k}\ (\sqrt{(h')} - \sqrt{(h'')}).$$

Padalinę iš $mg\left(\sqrt{h'} - \sqrt{h''}\right)$ gauname

$$\sqrt{h''} = (\mu(I + I_{\downarrow}0))/(I_{\downarrow}0\ \sqrt{k}) - \sqrt{(h')}.$$

Tada trečiąją lygtį galime parašyti taip:

$$h' - 2\frac{\mu}{\sqrt{k}}\sqrt{h'} + \frac{\mu^2(I+I_0)}{I_0 k} - \frac{2I{v''}^2}{[mg(d)]^2 - a^2} = 0.$$

Tos lygties teigiamas sprendinys

$$h' = \left(\frac{\mu}{\sqrt{k}} + \sqrt{\frac{\mu^2}{k} - \frac{\mu^2(I+I_0)}{I_0 k} + \frac{2I{v''}^2}{[mg(d)]^2 - a^2}}\right)^2, \qquad h' = \mathbf{0{,}22\ m.}$$

Užduoties aiškinamąjį sprendimą pateikė jos autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ Šis tekstas svetainėje *www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2013 04 02.*

Turnyro dalyvių sprendimų aptarimas / FT6-10 ▼

1) Beveik niekas iš sprendusiųjų neatsižvelgė, kad riedant spirale vidinio ir išorinio bėgių ilgiai skirtingi, todėl standus rutuliukas rieda praslysdamas.
2) Dalis sprendusiųjų vertindami trintį neatsižvelgė į tai, kad reikia naudoti prispaudimo prie bėgių jėgas, o ne sunkio jėgą.
3) Dauguma sprendusiųjų neatsižvelgė į tai, kad rutuliuką reikia padėti tokiame aukštyje, iš kurio jis pradeda riedėti praslysdamas.

Užduoties sprendimų aptarimą parengė jos autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2013 04 02.*

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelė / FT6-10 ▼

Nr.	Sprendimų vertinimo kriterijus	Vertė balais
1.1.	Parašyta energijos tvermės dėsnio išraiška riedančiam spirale rutuliukui	2
1.2.	Įvertintas trinties jėgos darbas rutuliukui riedant spirale	2
1.3.	Nustatytas minimalus riedėjimo greitis	1
2.1.	Nustatytas aukštis, kuriame padėtas rutuliukas riedės neslysdamas	1
3.1.	Nustatytas minimalus greitis, kuriam esant rutuliukas nuvirs nuo bėgių spiralėje	2
3.2.	Nustatytas aukštis, kuriame padėtas rutuliukas pasieks nuvirtimo greitį	2
Didžiausias galimas sprendimo įvertinimas		10

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelę parengė užduoties autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2013 04 02.*