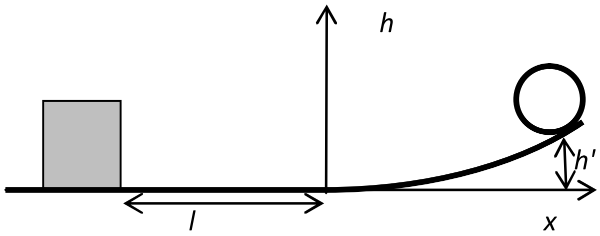
6-ASIS FIZIKOS TURNYRAS
5-oji užduotis Nr. FT6-5 / 2012 09 24 – 2012 10 22

Sąlyga / FT6-5 ▼

Ritinėlio ir kubelio pasidaužymai



Ant išlenkto paviršiaus padėti kubelis ir plonasienis tuščiaviduris ritinys, kaip parodyta paveiksle.

$$h = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ kx^2, & x \geq 0, \end{cases}$$

čia $k = 0{,}1\ \text{m}^{-1}$, $l = 0{,}6$ m, $h' = 0{,}1$ m, ritinio masė m, kubelio masė $m' = 2m$, slydimo trinties koeficientas visiems paviršiams $\mu = 0{,}4$, ritinio riedėjimo trintis maža. Ritinys paleidžiamas be pradinio greičio.

1) Kokį maksimalų greitį įgaus ritinio centras?
2) Kokį greitį įgaus kubelis po ritinio smūgio, jei smūgis tamprus, o jo trukmė maža?
3) Kokiam laiko tarpui praėjus po smūgio ritinys atsimuš į kubelį antrą kartą?
4) Kokiame didžiausiame aukštyje padėtas ant paviršiaus ritinys riedės neslysdamas?

Užduotį parengė mokyklos „Fizikos olimpas" steigėjų tarybos narys, ilgametis mokyklos direktorius (11 m.) ir šio Fizikos turnyro užduočių parengimo spręsti ir jų sprendimų vertinimo komisijos pirmininkas prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2012 09 24.*

Užduoties aiškinamasis sprendimas / FT6-5 ▼

1) Ritinys riedės neslysdamas (4 dalis), jo visą kinetinę energiją sudarys slenkamojo judėjimo kinetinės energijos $mv^2/2$ (v– ritinio centro greitis) ir sukamojo judėjimo kinetinės energijos $I\omega^2/2$ suma ($I = mr^2$ ritinio inercijos momentas centro atžvilgiu, r – ritinio spindulys, $\omega = u/r$ – ritinio kampinis greitis, $u = v$ ritinio paviršiaus greitis jo centro atžvilgiu). Tada visa ritinio kinetinė energija

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = mv^2.$$

Panaudojame energijos tvermės dėsnį:

$$mv^2 = mgh',\ v = \sqrt{gh'},\ v = 0{,}99\ \text{m/s}.$$

2) Pradžioje panagrinėkime dviejų tašelių tamprų smūgį. Tegu masės M_1 tašelis, judėdamas greičiu V_1, atsimuša į nejudantį masės M_2 tašelį. Tašelių greičiai po smūgio atitinkamai V_1' ir V_2'. Panaudojame judesio kiekio ir energijos tvermės dėsnius:

$$M_1V_1 = M_1V_1' + M_2V_2',$$
$$\frac{M_1V_1^2}{2} = \frac{M_1V_1'^2}{2} + \frac{M_2V_2'^2}{2},$$

tada

$$V_1' = V_1\frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2}.$$

Smūgio trukmė τ, tašelių sąveikos jėga, kintanti smūgio metu, $F(\tau')$, $(0 \le \tau' \le \tau)$. Tada

$$M_1V_1' = M_1V_1 - \int_0^\tau F(\tau')\mathrm{d}\tau',$$
$$M_1V_1' = M_1V_1 - \int_0^\tau F(\tau')\mathrm{d}\tau'.$$

Toliau nagrinėjame ritinio ir kubelio judėjimą smūgio metu. Į pagrindo ir ritinio trintį smūgio metu neatsižvelgiame, nes smūgio trukmė τ maža, tačiau į kubelio ir ritinio trintį bei kubelio ir pagrindo trintį turime atsižvelgti, nes smūgio metu gali veikti didelės sąveikos jėgos $F'(\tau')$, bent 2–3 eilėm viršijančios sunkio jėgą. Kubelio ir ritinio sąveikos jėga sukurs jų trinties jėgą $F''(\tau') = \mu F'(\tau')$, kuri kubelį veiks vertikaliai žemyn, o ritinį – vertikaliai aukštyn, todėl ritinio sukimasis smūgio metu lėtės ir ritinys be horizontalios greičio dedamosios $\boldsymbol{v_1}$ įgaus ir vertikaliai aukštyn nukreiptą greičio dedamąją v'. Smūgio metu besisukantis ritinys veikia kubelį trinies jėga $\mu F'(\tau')$, nukreipta vertikaliai žemyn ir sukuriančia kubelio ir pagrindo trinties jėgą $\mu^2 F'(\tau')$. Pažymim kubelio greitį po smūgio v_k. Gauname:

$$mv_1 = mv - \int_0^\tau F'(\tau')\mathrm{d}\tau',$$
$$2mv_k = (1-\mu^2)\int_0^\tau F'(\tau')\mathrm{d}\tau'.$$

Matome, kad išraiškos atitinka aukščiau išnagrinėtą tašelių smūgį, imant

$$M_1 = m,$$
$$M_2 = \frac{2m}{1-\mu^2}.$$

Tada ritinio centro horizontalioji greičio dedamoji po smūgio

$$v_1 = v\frac{m - \dfrac{2m}{1-\mu^2}}{m + \dfrac{2m}{1-\mu^2}} = -v\frac{1+\mu^2}{3-\mu^2},\ v_1 = -0{,}40\ \text{m/s},$$

$$\int_0^\tau F'(\tau')d\tau' = mv - mv_1 = \frac{4mv}{3-\mu^2}.$$

Sukimosi sąlygotas ritinio paviršiaus linijinis greitis centro atžvilgiu smūgio metu sumažėja:

$$u_1 = u - \frac{\mu}{m}\int_0^\tau F'(\tau')\mathrm{d}\tau' = \frac{(3-4\mu-\mu^2)v}{3-\mu^2},\ u_1 = 0{,}43\ \text{m/s},$$

o jo centro vertikalioji greičio dedamoji bus

$$v_1' = \frac{\mu}{m}\int_0^{\tau} F'(\tau')\mathrm{d}\tau' = \frac{4\mu v}{3-\mu^2} v_1' = 0{,}56 \text{ s.}$$

Kubelio greitis po smūgio bus

$$v_k = \frac{1-\mu^2}{2m}\int_0^{\tau} F'(\tau')\mathrm{d}\tau' = \frac{2v(1-\mu^2)}{3-\mu^2} = \frac{2(1-\mu^2)\sqrt{gh'}}{3-\mu^2},\ v_k = 0{,}59 \text{ m/s,}$$

iki sustodamas kubelis nuslinks atstumą

$$s_k = \frac{v_k^2}{2\mu g},\ s_k = 0{,}44 \text{ m}$$

per laiką

$$t_k = \frac{v_k}{\mu g},\ t_k = 0{,}15 \text{ s.}$$

Ritinys po smūgio atšoka nuo kubelio kaip kampu į horizontą mestas kūnas ir nulekia atstumą

$$l_1 = \frac{2v_1 v_1'}{g},\ l_1 = 0{,}046 \text{ m}$$

per laiką

$$t_1 = \frac{2v_1'}{g},\ t_1 = 0{,}11 \text{ s.}$$

Laikome, kad ritinys į pagrindą atsimuša tampriai ir atšoka. Tada jo vertikalioji greičio dedamoji pakeičia kryptį. Laikom, kad ritinio smūgio į pagrindą trukmė maža, ją pažymim τ_1, o jų sąveikos jėgą smūgio metu $F_1(\tau')(0 \le \tau' \le \tau_1)$. Ritinio greičio vertikaliosios dedamosios pokytis smūgio metu

$$\Delta v' = 2v_1' = \frac{1}{m}\int_0^{\tau_1} F'(\tau')\mathrm{d}\tau',\ \frac{1}{m}\int_0^{\tau_1} F'(\tau')\mathrm{d}\tau' = 1{,}12 \text{ m/s.}$$

Smūgio metu horizontalioji ritinio slenkamojo judėjimo greičio dedamoji galėtų didėti, o sukamojo judėjimo greitis – mažėti vienodu dydžiu

$$\Delta v = \mu\Delta v',\ \Delta v = 0{,}45 \text{ m/s.}$$

Tačiau $u_1 < \Delta v$, todėl horizontalioji greičio dedamoji ir sukamojo judėjimo greitis tik susilygins, įgaudami vertes

$$v_2 = u_2 = \frac{(v_1 + u_1)}{2},\ v_2 = u_2 = 0{,}014 \text{ m/s,}$$

ir toliau nebesikeis. Tokiu greičiu ritinys pradės artėti prie kubelio vienodais šuoliukais, atsimušdamas į pagrindą vienodais laiko tarpais t_1. Į kubelį jis atsimuš praėjus laikui

$$t = (l_1 + s_k)/v_2,\ t = 6{,}4 \text{ s.}$$

3) Ant kampu α pasvirusio paviršiaus padėtam ritiniui sunkio jėga gali suteikti kampinį pagreitį

$$\varepsilon = \frac{mg\sin\alpha}{I + mr^2},$$

čia $I = mr^2$ – tuščiavidurio plonasienio ritinio inercijos momentas centro atžvilgiu. Trinties jėga ritiniui gali suteikti kampinį pagreitį

$$\varepsilon' = \frac{\mu mg\cos\alpha}{I}.$$

Ritinys riedės neslysdamas, kai

$$\varepsilon' \geq \varepsilon,\ 2\mu \geq tg\alpha,\ tg\alpha_{\max} = \frac{\mathrm{d}h_{\max}}{\mathrm{d}x} = 2kx_{\max} = 2\mu,\ h_{\max} = kx_{\max}^2 = \frac{\mu^2}{k},\ h_{\max} = 1{,}6\ \text{m}.$$

Pastaba

Užduoties FT6-3 sprendime į kubelio ir ritinio tarpusavio trintį neatsižvelgta. Tai teisinga, kai ta trintis maža. Tačiau sąlygoje nurodyta, kad visiems paviršiams trinties koeficientas yra vienodas: $\mu = 0{,}4$. Todėl smūgio metu ritinio ir kubelio greičių pokyčiai bei ritinio sukimosi greitis turi būti apskaičiuojami kaip parodyta aukščiau , dalyje 2, imant

$$M_1 = m,\ M_2 = \frac{m}{1-\mu^2}.$$

Ritinio centro greičio dedamoji, lygiagreti nuožulniajai plokštumai po smūgio

$$v_1 = v\frac{m - \dfrac{m}{1-\mu^2}}{m + \dfrac{m}{1-\mu^2}} = -v\frac{\mu^2}{2-\mu^2},\ v_1 = -0{,}19\ \text{m/s},$$

$$\int_0^{\tau} F'(\tau')\mathrm{d}\tau' = \frac{2mv}{2-\mu^2}.$$

Ritinio centro greičio dedamoji, statmena nuožulniajai plokštumai po smūgio

$$v_1' = \frac{\mu}{m}\int_0^{\tau} F'(\tau')\mathrm{d}\tau' = \frac{2v\mu}{2-\mu^2},\ v_1' = 0{,}97\ \text{m/s},$$

o jo paviršiaus greitis centro atžvilgiu

$$u_1 = u - \frac{\mu}{m}\int_0^{\tau} F'(\tau')\mathrm{d}\tau' = \frac{(2-2\mu-\mu^2)v}{2-\mu^2},\ u_1 = 1{,}27\ \text{m/s}.$$

Kubelio greitis po smūgio bus

$$v_k = \frac{1-\mu^2}{m}\int_0^{\tau} F'(\tau')\mathrm{d}\tau' = \frac{2v(1-\mu^2)}{2-\mu^2} = \frac{2(1-\mu^2)\sqrt{gh'}}{2-\mu^2},$$

$$v_k = 2{,}05\ \text{m/s},$$

o jo pagreitis

$$a_k = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha),\ a_k = -0{,}33\ \text{m/s}^2.$$

Atsimušus į kubelį ritinio centras judės kaip kampu į horizontą mestas kūnas, kaip parodyta pav. Vienodais laiko tarpais

$$t_1 = 2v_1'/g\cos\alpha,\ t_1 = 0{,}21\ \text{s}.$$

Ritinys tampriai atsimuš į nuožulniąją plokštumą, tuo momentu jo centro greičio dedamoji, statmena nuožulniajai plokštumai, keis kryptį. Ritinio centro greičio dedamoji, lygiagreti nuožulniajai plokštumai, didės tarp smūgių dėl sunkio jėgos, o smūgių metu ritinio sukimosi sukurta trinties jėga iš pradžių didins lygiagrečiąją dedamąją, kol ritinio paviršiaus greitis jo centro atžvilgiu bus didesnis už centro greitį, o vėliau tą dedamąją mažins. Sudarome ritinio ir kubelio judėjimą aprašančių dydžių kitimo lentelę, naudodami tokias išraiškas:

- ritinio greičio lygiagrečioji dedamoji po smūgio $v_n = \begin{cases} v_{n-1} + g\sin\alpha t_1 + 2\mu v_1', v_n < u_n, \\ (v_{n-1} + g\sin\alpha t_1 + u_{n-1})/2, v_n > u_n, \end{cases}$
- ritinio nulėktas atstumas po n-tojo smūgio $l_n = v_n t_1 + g\sin\alpha t_1^2/2$,
- ritinio paviršiaus greitis jo centro atžvilgiu po smūgio $u_n = \begin{cases} u_{n-1} - 2\mu v_1', v_n < u_n, \\ v_n, v_n > u_n, \end{cases}$
- ritinio nulėktas atstumas $l = \sum l_n$,
- visas judėjimo laikas $t = nt_1$,
- kubelio nueitas atstumas $s = v_k t + a_k t^2/2$.

n	v_n	l_n	u_n	t	l	s
1	-0,19	0,03	1,27	0,21	0,03	0,43
2	0,89	0,26	0,89	0,42	0,30	0,84
3	1,25	0,34	1,25	0,64	0,64	1,23
4	1,60	0,41	1,60	0,85	1,05	1,61
5	1,96	0,49	1,96	1,06	1,54	1,98
6	2,31	0,56	2,31	1,27	2,10	2,33
7	2,67	0,64	2,67	1,48	2,74	2,67

Matome, kad septintą smūgį atitinka $l > s$. Taigi, po šešto smūgio ritinys atsimuš į kubelį (laikom, kad kubelis didelis, ir ritinys atsimuš į jo šoną). Tada

$$l\big|_{n=6} + v_6 t' + \frac{g\sin\alpha t^2}{2} = v_k(6t_1 + t') + \frac{a_k(6t_1 + t')}{2}.$$

Įstačius parametrų vertes it išsprendus lygtį gaunama

$$t' = 0{,}21 \text{ s},$$

todėl antrą kartą ritinys į kubelį atsimuš po

$$t = 6t_1 + t',\ t = 1{,}48 \text{ s}.$$

Užduoties aiškinamąjį sprendimą pateikė jos autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt *nuolat skelbiamas nuo 2012 12 19.*

Turnyro dalyvių sprendimų aptarimas / FT6-5 ▼

1) Užduotį dauguma išsprendė teisingai, tik du sprendusieji neatsižvelgė į sukamojo judėjimo energiją.

2) Pilnai užduoties niekas neišsprendė. Dauguma neatsižvelgė į tai, kad smūgio metu veikia didelė kubelio ir ritinio sąveikos jėga, sukurianti ir didelę trinties tarp jų jėgą, kuri prispaudžia

kubelį prie pagrindo ir tuo padidina kubelio ir pagrindo trintį. O esant kubelio ir pagrindo trinčiai negalima taikyti judesio kiekio ir energijos tvermės dėsnių: dalis ritinio perduodamos energijos panaudojama kubelio slinkimui.

3) Tai, kad po smūgio ritinys gali pašokti, pastebėjo tik vienas iš sprendusiųjų, tačiau ir jis tokios galimybės neišnagrinėjo. O sąlygoje pateikta nuoroda „smūgio trukmė maža“ turėjo būti išnagrinėta. Galima parodyti, kad 1 cm matmenų plieniniam kubeliui, slenkančiam 1 m/s greičiu ir atsimušusiam į tokį pat nejudantį kubelį smūgio trukmė yra apie 10^{-6} s, o smūgio metu veikiančios tamprumo jėgos yra apie 10^5 kartų didesnės už sunkio jėgą. Taigi, net esant gerokai ilgesnei smūgio trukmei besisukantį ritinį smūgio metu veikianti vertikaliai aukštyn nukreipta jėga būtų daug didesnė už jo sunkio jėgą.

4) Dalis sprendusiųjų neatsižvelgė, kad ritinys (ir bet koks kitas kūnas) rieda neslysdamas esant mažesnei trinties jėgai, negu jėga, neleidžianti kūnui slysti.

Užduoties sprendimų aptarimą parengė jos autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2012 12 19.*

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelė / FT6-5 ▼

Nr.	Sprendimų vertinimo kriterijus	Vertė balais
1.	Iš energijos tvermės dėsnio nustatytas ritinio riedėjimo greitis	iki 1
2.	Nustatyti kubelio ir ritinio greičiai po smūgio	iki 4
3.1.	Nustatytas kubelio judėjimo dėsningumas po smūgio	iki 1
3.2.	Nustatytas ritinio judėjimo dėsningumas po smūgio	iki 2
3.3.	Nustatytas laiko tarpas tarp smūgių	iki 1
4.	Nustatytas aukštis, kuriame padėtas ant paviršiaus ritinys riedės neslysdamas	iki 1
5.	Pateikta ne pagal reikalavimus	iki -1
Didžiausias galimas sprendimo įvertinimas		10

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelę parengė užduoties autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2012 12 19.*