6-ASIS FIZIKOS TURNYRAS
8-oji užduotis Nr. FT6-8 / 2012 11 26 – 2012 12 27

***Sąlyga / FT6-8* ▼**

Akmenukas baseino dugne

Gabija iš oro stebi mažą akmenuką, esantį 1,2 m gylio vandens sklidino baseino dugne. Eidama baseino pakraščiu ji pastebi, kad akmenukas jai atrodo esantis vis giliau. Ar tolsta nuo akmenuko Gabija? Kaip priklauso tariamas baseino „gylis“ nuo kampo, kurį su vandens paviršiumi sudaro į jos akis nuo akmenuko patekę šviesos spinduliai?

Užduotį parengė Vilniaus universiteto Taikomųjų mokslų instituto direktoriaus pavaduotojas, Vilniaus universiteto Fizikos fakulteto Puslaidininkių fizikos katedros docentas, mokyklos „Fizikos olimpas” direktorius, jos steigėjų tarybos narys ir dėstytojas dr. Stasys Tamošiūnas.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2012 11 26.*

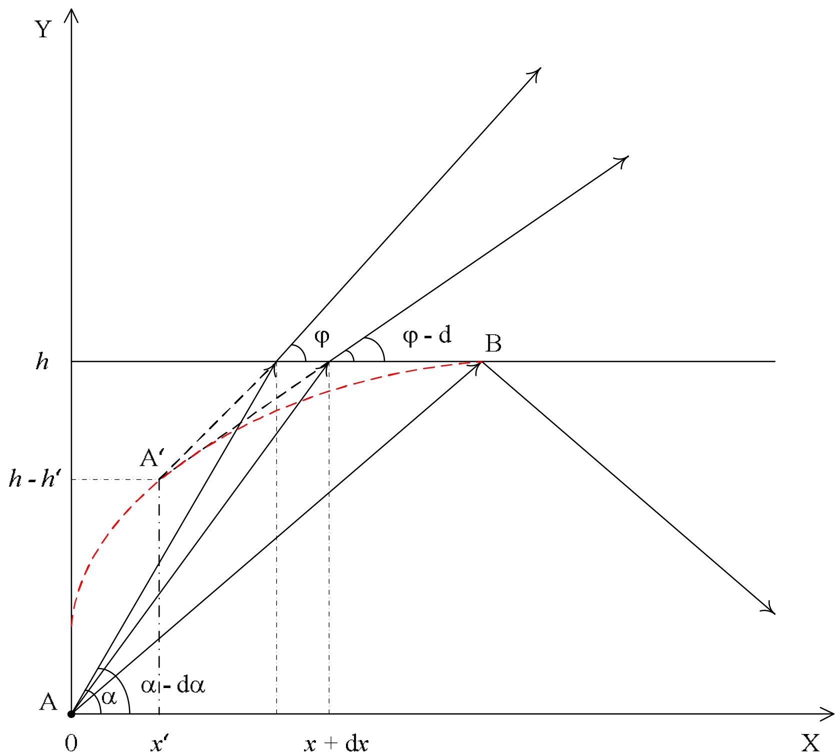
***Užduoties aiškinamasis sprendimas / FT6-8* ▼**

Gabija mato akmenuko A tariamą vaizdą A′ ten, kur susikerta išėjusių pro vandens paviršių nuo akmenuko sklindančios šviesos spindulių tęsiniai. Pagal šviesos lūžio dėsnį

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\varphi}=\frac{1}{n},\ \frac{\cos(\alpha-\mathrm{d}\alpha)}{\cos(\varphi-\mathrm{d}\varphi)}=\frac{1}{n},$$

tai

$$\cos(\varphi-\mathrm{d}\varphi)=n\cos(\alpha-\mathrm{d}\alpha),$$
$$\cos\varphi\cos\mathrm{d}\varphi+\sin\varphi\sin\mathrm{d}\varphi=n(\cos\alpha\cos\mathrm{d}\alpha+\sin\alpha\sin\mathrm{d}\alpha).$$



Jei $\mathrm{d}\varphi$ ir $\mathrm{d}\alpha$ yra labai maži (1 pav. dėl aiškumo jie ir $\mathrm{d}x$ yra žymiai padidinti) ir matuojami radianais, tai

$$\cos\mathrm{d}\varphi\approx 1,\ \cos\mathrm{d}\alpha\approx 1,$$

$$\sin \mathrm{d}\varphi \approx \mathrm{tgd}\varphi \approx \mathrm{d}\varphi << \sin \varphi < \mathrm{tg}\varphi, \ \ \sin \mathrm{d}\alpha \approx \mathrm{tgd}\alpha \approx \mathrm{d}\alpha << \sin \alpha < \mathrm{tg}\alpha$$

ir gauname

$$\cos\varphi + \sin\varphi \cdot \mathrm{d}\varphi = n\cos\alpha + n\sin\alpha \cdot \mathrm{d}\alpha,$$

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{n\sin\alpha}{\sin\varphi}\mathrm{d}\alpha,$$

nes $\cos\varphi = n\cos\alpha$.

Verta pastebėti, kad $\mathrm{d}\varphi > \mathrm{d}\alpha$, nes $n > 1$ ir $\sin\alpha > \sin\varphi$, čia $\alpha > \varphi$. Gabijai tolstant nuo akmenuko (mažėjant kampui φ) išėję pro vandens paviršių šviesos spinduliai yra prakleidžiami vis didesniu kampu nei nuo akmenuko į tą paviršių nukreipti spinduliai, o tariamas akmenuko vaizdas tolsta nuo jo ir artėja prie taško B, esančio visiško vidaus atspindžio riboje, kur kampas α sumažėja iki

$$\alpha' = 90^o - \arcsin\frac{1}{n}, \ \ \alpha' = 90° - \arcsin\frac{1}{1{,}33} \approx 41°.$$

Taigi, jei Gabija mato akmenuką vis giliau, tai ji ne tolsta, o eina link jo.

Tolesniam užduoties sprendimui yra pravartu išreikšti dydį $\mathrm{d}x$:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{h}{x}, \ \ \mathrm{tg}(\alpha - \mathrm{d}\alpha) = \frac{h}{x + \mathrm{d}x},$$

$$\mathrm{d}x = h\left[\frac{1}{\mathrm{tg}(\alpha - \mathrm{d}\alpha)} - \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}\right] = h\left(\frac{1 + \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tgd}\alpha}{\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tgd}\alpha} - \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}\right) \approx h\frac{\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}^2\alpha \cdot \mathrm{d}\alpha - \mathrm{tg}\alpha + \mathrm{d}\alpha}{(\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{d}\alpha)\mathrm{tg}\alpha} \approx$$

$$\approx h\frac{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}{\mathrm{tg}^2\alpha}\mathrm{d}\alpha = \frac{h \cdot \mathrm{d}\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{h \cdot \mathrm{d}\alpha}{1 - \cos^2\alpha} = \frac{h \cdot n^2 \cdot \mathrm{d}\alpha}{n^2 - \cos^2\varphi}.$$

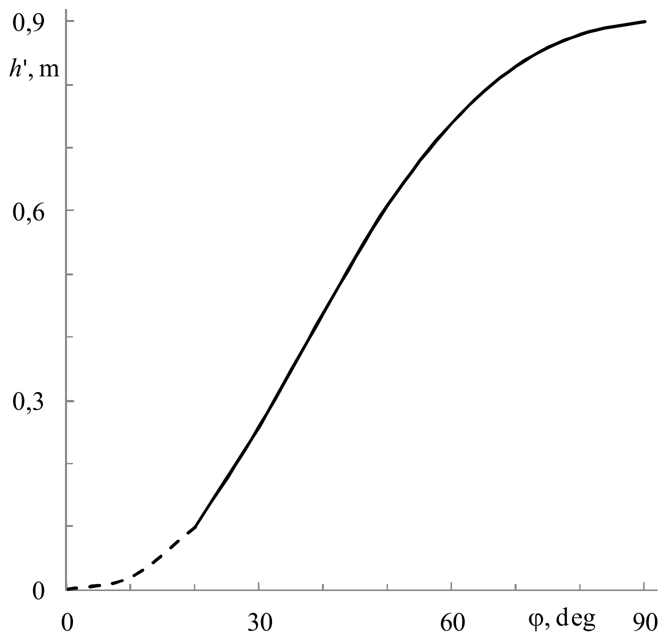
$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{h'}{x - x'}, \ \ \mathrm{tg}(\varphi - \mathrm{d}\varphi) = \frac{h'}{x - x' + \mathrm{d}x},$$

$$\mathrm{d}x = h'\left[\frac{1}{\mathrm{tg}(\varphi - \mathrm{d}\varphi)} - \frac{1}{\mathrm{tg}\varphi}\right] \approx \frac{h' \cdot \mathrm{d}\varphi}{\sin^2\varphi} = \frac{h' \cdot n\sin\alpha \cdot \mathrm{d}\alpha}{\sin^3\varphi} = \frac{h'\sqrt{n^2 - \cos^2\varphi} \cdot \mathrm{d}\alpha}{\sin^3\varphi}.$$

Sulyginame abi $\mathrm{d}x$ išraiškas:

$$\frac{h'\sqrt{n^2 - \cos^2\varphi}}{\sin^3\varphi} = \frac{h \cdot n^2}{n^2 - \cos^2\varphi}, \ \ h' = \frac{h \cdot n^2 \cdot \sin^3\varphi}{\left(n^2 - \cos^2\varphi\right)^{1{,}5}}.$$

Tariamo gylio priklausomybė nuo kampo φ yra pateikta 2 pav. Joje mažų kampų srityje yra nubrėžta štrichinė linija dėl to, kad labai nutolus nuo mažo akmenuko jį sunku pamatyti dėl ribotų akies galimybių, nes artėjant prie ribinio vidaus atspindžio vis mažiau šviesos patenka į orą, be to, čia jau $\mathrm{d}\varphi >> \mathrm{d}\alpha$, todėl itin maža nuo akmenuko patekusios į orą šviesos dalis pasiekia aktyvų Gabijos akių plotą ir informacijos apie akmenuką suvokimas „paskęsta” kitų šviesų fone.



Užduoties aiškinamąjį sprendimą pateikė jos autorius dr. Stasys Tamošiūnas.
▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt *nuolat skelbiamas nuo 2013 01 22.*

Turnyro dalyvių sprendimų aptarimas / FT6-8 ▼

Visi turnyro dalyviai teisingai nustatė, kad Gabija artėja prie akmenuko, tik neanalizavo galimybių jį pamatyti iš toli, todėl braižant „gylio" priklausomybę nuo kampo φ buvo priimtinas ir nulinio dydžio kampas. Dauguma dalyvių nesiaiškino, kaip kinta tariamo vaizdo vieta – ją laikė esančia statmenyje vandens paviršiui (taip yra tik kai $\varphi = 90°$, tada $h' = h/n$), einančiame per akmenuką, arba net tolstančia į kitą pusę nuo to statmens. Tam, kad įsitikintume, jog mažėjant kampams α ir φ tariamas akmenuko vaizdas tolsta nuo to statmens taško B link, pakanka laisvai pasirinkti kelis kampus α , pagal šviesos lūžio dėsnį apskaičiuoti kampus φ ir pasinaudojant kampamačiu bei liniuote kuo tiksliau nubrėžti į orą patekusios šviesos spindulius ir jų tęsinius, rasti tęsinių susikirtimo vietas. Užduotis buvo daugeliui sunkoka, matyt, ir dėl būtinumo taikyti trigonometriją.

Užduoties sprendimų aptarimą parengė jos autorius dr. Stasys Tamošiūnas.
▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2013 01 22.*

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelė / FT6-8 ▼

Nr.	**Sprendimų vertinimo kriterijus**	**Vertė balais**
1	Nustatyta judėjimo kryptis	3
2	Rasta „gylio" priklausomybė nuo kampo	5
3	Pateiktas $h'(\varphi)$ grafikas	2
4	Pateikta ne pagal reikalavimus	-1
5	Netikslumai p. 1-3	iki -0,5
Didžiausias galimas sprendimo įvertinimas		10

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelę parengė užduoties autorius dr. Stasys Tamošiūnas.
▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2013 01 22.*