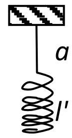
7-ASIS FIZIKOS TURNYRAS
6-oji užduotis Nr. FT7-6 / 2013 10 23 – 2013 11 20

Sąlyga / FT7-6 ▼

Besisupanti spyruoklė



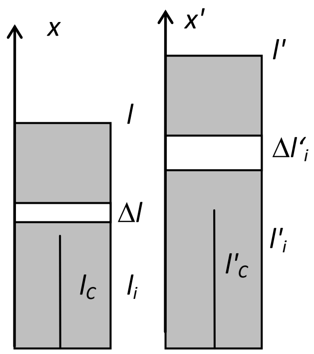
Cilindrinė spyruoklė padaryta iš plonos vielos. Tarp neištemptos spyruoklės vijų atstumas vienodas, vijų spindulys $r = 4$ cm, spyruoklės ilgis $l = 20$ cm, jos masė $m = 50$ g. Spyruoklė pakabinama ant lengvo netamprаus siūlo, kurio ilgis $a = 10$ cm, kaip parodyta paveikslėlyje. Pakabintos nejudančios spyruoklės ilgis $l' = 25$ cm.

1) Kam lygus spyruoklės tamprio koeficientas?
2) Koks kabančios spyruoklės mažų horizontalių svyravimų dažnis?

Užduotį parengė mokyklos „Fizikos olimpas" steigėjų tarybos narys, ilgametis mokyklos direktorius (11 m.) ir šio Fizikos turnyro užduočių parengimo spręsti ir jų sprendimų vertinimo komisijos pirmininkas prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2013 10 23.*

Užduoties aiškinamasis sprendimas / FT7-6 ▼



1) Spyruoklės tamprumo koeficientas k apibrėžiamas sąryšiu $k = \frac{F}{l" - l}$, čia l – neištemptos spyruoklės ilgis, l“ – ilgis spyruoklės, tempiamos pastovia jėga *F*. Pakabintos spyruoklės atskirus elementus veikia skirtingo didumo sunkio jėga. Paveiksle pateikta neištempta ir sunkio jėgos ištempta spyruoklės, panaudojant koordinačių sistemas x ir x'. lc ir $l'c$ – masės centro atstumas nuo spyruoklės galo $x = x' = 0$ $\quad (l_C = l/2)$. Spyruoklę padaliname į n lygių dalių $\Delta l = l/n$. Atskiros dalies tamprumo koeficientas $k' = nk$. Tada, atsižvelgiant tik į žemiau esančios spyruoklės dalies sunkį, *i*-tosios dalies ilgis

$$\Delta l'_i = \Delta l + \frac{(i-1)mg}{kn^2},$$

o visas pakabintos spyruoklės ilgis

$$l' = \sum_{i=1}^{n} \Delta l'_i = l + \frac{mg}{kn^2} \sum_{i=1}^{n} (i-1) = l + \frac{mg}{kn^2} \frac{n(n-1)}{2} = l + \frac{mg}{2k}\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Imdami ribą $n \to \infty$ gauname

$$l' = l + \frac{mg}{2k}, \quad k = \frac{mg}{2(l' - l)}, \qquad k = 4{,}9\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}.$$

2) Naudojame fizikinės svyruoklės dažnio formulę:

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{M}{I}},$$

čia M – maksimalus sunkio jėgos momentas pakabinimo taško atžvilgiu, I – inercijos momentas to taško atžvilgiu. Nustatome ištemptos spyruoklės masės centro padėtį:

$$l'_C = \frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{ml'_i}{n}}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} l'_i}{n}.$$

Kadangi

$$l'_i = \sum_{j=1}^{i}\Delta l'_j = \frac{li}{n} + \frac{mg}{kn^2}\sum_{j=1}^{i}(j-1) = \frac{li}{n} + \frac{2(l'-l)}{n^2}\frac{i(i-1)}{2} = \frac{(l'-l)i^2 + (nl+l-l')i}{n^2},$$

$$l'_C = \frac{(l'-l)\sum_{i=1}^{n} i^2 + (nl+l-l')\sum_{i=1}^{n} i}{n^3} =$$

$$= \frac{(l'-l)\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (nl+l-l')\frac{n(n+1)}{2}}{n^3}.$$

Imdami ribą $n \to \infty$ gauname

$$l'_C = \frac{l}{6} + \frac{l'}{3}.$$

Spyruoklės elementą $\Delta l'_j$ laikome plonu žiedu, jo inercijos momentas skersmens atžvilgiu

$$I_i = \frac{m}{n}\frac{r^2}{2}.$$

Tada kabančios spyruoklės inercijos momentas pakabinimo taško atžvilgiu

$$I = \sum_{i=1}^{n}\frac{m}{n}\left[(a+l'-l'_i)^2 + \frac{r^2}{2}\right] = \sum_{i=1}^{n}\frac{m}{n}\left[\left(a+l' - \frac{(l'-l)i^2 + (nl+l-l')i}{n^2}\right)^2 + \frac{r^2}{2}\right] =$$

$$= \frac{m}{n^5}\sum_{i=1}^{n}\left\{\left[(a+l')^2 + \frac{r^2}{2}\right]n^4 + (l'-l)^2 i^4 + 2(l'-l)(nl+l-l')i^3 + \right.$$

$$\left. + [(nl+l-l')^2 - 2(l'-l)(a+l')]i^2 - 2(a+l')(nl+l-l')i\right\}.$$

Siekiant supaprastinti skaičiavimą, reikia imti ribą $n \to \infty$ ir išraiškoje palikti tik narius, kurie vardiklyje neturi n. Taip pat pastebime, kad

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = A_{k+1}n^{k+1} + A_k n^k + \cdots + A_1 n \text{ ir } A_{k+1} = 1/(k+1).$$

Ieškomajam inercijos momentui gauname:

$$I = m\left[(a+l')^2 + \frac{r^2}{2} + \frac{(l'-l)^2}{5} + \frac{2l(l'-l)}{4} + \frac{l^2}{3}\right] =$$

$$= m\left[(a + l')^2 + \frac{r^2}{2} + \frac{l^2 + 3ll' + 6l'^2}{30}\right],$$

Įrašom gautas išraiškas į dažnio formulę:

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mg(a + l' - l_C)}{I}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g\left[a + l' - \left(\frac{l}{6} + \frac{l'}{3}\right)\right]}{(a + l')^2 + \frac{r^2}{2} + \frac{l^2 + 3ll' + 6l'^2}{30}}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{5g(6a + 4l' - l)}{30(a + l')^2 + 15r^2 + l^2 + 3ll' + 6l'^2}}, \quad \nu = 0{,}64\ \text{Hz}.$$

Užduoties aiškinamąjį sprendimą pateikė jos autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2014 01 06.*

Turnyro dalyvių sprendimų aptarimas / FT7-6 ▼

1) Tik apie pusė sprendusiųjų atsižvelgė į sunkio jėgos pasiskirstymą išilgai kabančios spyruoklės.

2) Masės centrą vienaip ar kitaip netolygiai ištemptoje spyruoklėje nustatinėjo taip pat pusė sprendusiųjų. Tačiau dauguma tuo ir apsiribojo, svyravimo dažniui naudojo matematinės svyruoklės formulę, nors akivaizdu, kad 25 cm ilgio spyruoklė nėra daug mažesnė už 10 cm ilgio siūlą. Na, o spyruoklės inercijos momento tiksliai nenustatė niekas.

Užduoties sprendimų aptarimą parengė jos autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2014 01 06.*

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelė / FT7-6 ▼

Nr.	**Sprendimų vertinimo kriterijus**	**Vertė balais**
1.	Nustatytas spyruoklės tamprumo koeficientas	3
2.1.	Nustatytas kabančios spyruoklės masės centras	3
2.2.	Nustatytas kabančios spyruoklės inercijos momentas	3
2.3.	Nustatytas svyruoklės dažnis	1
Didžiausias galimas sprendimo įvertinimas		10

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelę parengė užduoties autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2014 01 06.*