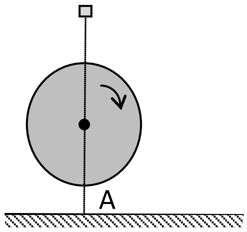
8-ASIS FIZIKOS TURNYRAS
10-oji užduotis Nr. FT8-10 / 2015 02 02 – 2015 03 01

Sąlyga / FT8-10 ▼

Tašelio, krentančio ant besisukančio ritinio, likimas

Ritinys, kurio spindulys $r = 20$ cm, sukasi kampiniu greičiu $\omega = 3{,}5\ s^{-1}$ apie horizontalią ašį, esančią $H = 30$ cm aukštyje virš horizontalaus paviršiaus. Iš aukščio $h = 10$ cm nuo ritinio paviršiaus ties jo viduriu be pradinio greičio paleidžiamas mažas tašelis. Tašelio ir ritinio bei tašelio ir horizontalaus paviršiaus trinties koeficientas $\mu = 0{,}3$.



1) Kokiu atstumu nuo taško A tašelis nukris ant horizontalaus paviršiaus, jei tašelio smūgis į ritinį tamprus, o smūgio trukmė maža?
2) Koks bus tašelio greitis prieš pat nukrintant ant paviršiaus?
3) Kokiu greičiu tašelis atšoks nuo paviršiaus, jei tašelio smūgis į paviršių tamprus, o smūgio trukmė maža?
4) Kas pasikeistų, jei tašelio smūgis į ritinį būtų plastiškas, o deformacijos smūgio metu būtų mažos?

Užduotį parengė mokyklos „Fizikos olimpas" steigėjų tarybos narys, ilgametis mokyklos direktorius (11 m.) ir šio Fizikos turnyro užduočių parengimo spręsti ir jų sprendimų vertinimo komisijos pirmininkas prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2015 02 02.*

Užduoties aiškinamasis sprendimas / FT8-10 ▼

1) Prieš pat atsimušant į ritinį tašelio greitis nukreiptas vertikaliai žemyn ir lygus

$$v = \sqrt{2gh},\ \ v = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}1} = 1{,}4\ \mathrm{m/s}.$$

Smūgio į ritinį metu tašelį vertikaliai aukštyn veikia tamprumo jėga $F(t)$, jos poveikyje vertikalioji tašelio greičio dedamoji pakeičia kryptį. Pagal judesio kiekio p pokyčio dėsnį gauname:

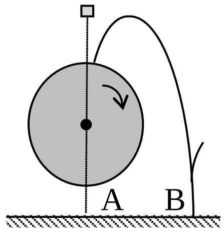
$$\Delta p = 2mv = \int_0^\tau F(t)dt.$$

Čia m – tašelio masė, τ - smūgio trukmė. Smūgio metu tašelį veikia trinties jėga $F_{tr}(t) = \mu F(t)$, nukreipta lygiagrečiai ritinio paviršiui. Kadangi smūgio trukmė maža, F_{tr} laikome horizontalia, o taip pat smūgio metu neatsižvelgiame į tašelio sunkį. Taip pat laikome, kad tašelis slysta ritinio paviršiumi nesivartydamas, o jo poslinkis mažas. Trinties jėga, veikdama visą smūgio laiką, tašeliui galėtų suteikti greitį

$$v' = \frac{\mu}{m}\int_0^\tau F(t)dt = 2\mu v,\ \ v' = 0{,}84\ \mathrm{m/s}.$$

Tačiau ritinio paviršiaus linijinis greitis tėra

$$v'' = \omega r,\ \ v'' = 0{,}7\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},$$



todėl tašelis slys ritinio paviršiumi ne visą smūgio laiką, o tik tol, kol jo greičio horizontalioji dedamoji taps v''. Taigi, atsimušęs į ritinį tašelis juda kaip kampu į horizontą mestas kūnas, jo greičio vertikalioji dedamoji yra v, o horizontalioji dedamoji v''. Patikriname, ar atšokęs nuo ritinio tašelis neatsimuš į ritinį antrą kartą. Tašelis pakils į tokį patį aukštį h per laiką

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

tiek pat laiko tašelis leisis iki ritinio viršaus lygio. Per tą laiką horizontalia kryptimi tašelis pasislinks atstumą

$$s_1 = 2v''t_1 = 2\omega r\sqrt{\frac{2h}{g}},\ \ s_1 = 2\cdot 3{,}5\cdot 0{,}2\sqrt{\frac{2\cdot 0{,}1}{9{,}8}} = 0{,}2\ \text{m}.$$

Taigi, tašelis į ritinį antrą kartą neatsimuš, visas jo leidimosi laikas iki horizontalaus paviršiaus

$$t_2 = \sqrt{\frac{2(h+H+r)}{g}}.$$

todėl ieškomasis atstumas

$$\text{AB} = v''(t_1+t_2) = \omega r\sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{h}+\sqrt{h+H+r}\right),$$

$$\text{AB} = 3{,}5\cdot 0{,}2\sqrt{\frac{2}{9{,}8}}\left(\sqrt{0{,}1}+\sqrt{0{,}1+0{,}3+0{,}2}\right) = 0{,}34\ \text{m}.$$

2) Ieškomasis tašelio greitis

$$v_1 = \sqrt{v''^2+(gt_2)^2} = \sqrt{(\omega r)^2+2g(h+H+r)},$$
$$v_1 = \sqrt{0{,}7^2+2\cdot 9{,}8(0{,}1+0{,}3+0{,}2)} = 3{,}5\frac{m}{s}.$$

3) Tašelis atšoka veikiant tamprumo jėgai $F'(t)$ $(0 < t < \tau^{'}$, $\tau^{'}$ – smūgio trukmė), jo greičio vertikalioji dedamoji gt_2 pakeičia kryptį, todėl tašelio judesio kiekio pokytis

$$\Delta p' = 2mgt_2 = \int_0^{\tau'} F'(t)dt.$$

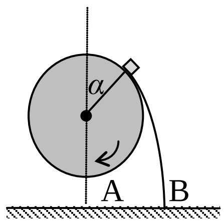
Trinties jėga $F^{'}_{tr}(t) = \mu F'(t)$ horizontaliąją tašelio greičio dedamąją galėtų sumažinti dydžiu

$$\Delta v'' = \frac{\mu}{m}\int_0^{\tau'} F^{'(t)}dt = 2\mu g t_2 = 2\mu\sqrt{2g(h+H+r)},$$
$$\Delta v'' = 2\cdot 0{,}3\sqrt{2\cdot 9{,}8(0{,}1+0{,}3+0{,}2)} = 2{,}1\ \text{m/s}.$$

Tačiau horizontalioji tašelio greičio dedamoji tėra $v'' = 0{,}7\frac{\text{m}}{\text{s}}$, todėl tašelis atšoks vertikaliai aukštyn greičiu

$$v_2 = gt_2 = \sqrt{2g(h+H+r)}$$
$$v_2 = \sqrt{2\cdot 9{,}8(0{,}1+0{,}3+0{,}2)} = 3{,}4\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4) Po plastiško smūgio tašelis nuo ritinio neatšoka ir juda likdamas ritinio paviršiuje. Jo padėtį aprašome kampu α, kurį sudaro iš ritinio centro į tašelį nubrėžta linija su vertikale. Plastiško smūgio metu vertikaliosios tašelio greičio dedamosios pakytis lygus v, t.y., dvigubai mažesnis, negu esant tampriam smūgiui, todėl smūgio metu trinties jėga gali sukurti dvigubai mažesnę horizontaliąją greičio dedamąją



$$v^{'}_{pl} = 0{,}42\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Kadangi ritinio paviršiaus greitis didesnis, tašelis kurį laiką slys ritinio paviršiumi kol veikiant trinčiai jo greitis taps v'', toliau tašelis kurį laiką suksis kartu su ritiniu juo neslysdamas. Tašelis vėl pradeda slysti ritinio paviršiumi esant kampui α_1, kai nustumiančioji sunkio jėgos dedamoji $mg\sin\alpha_1$ viršija trinties jėgą, kurią lemia prispaudžiančioji tašelį prie ritinio jėga:

statmenos ritinio paviršiui sunkio jėgos dedamosios $mg\cos\alpha_1$ ir išcentrinės jėgos $\frac{mv''^2}{r}$ skirtumas

$$mg\sin\alpha_1 \geq \mu\left(mg\cos\alpha_1 - \frac{mv''^2}{r}\right),$$

$$g\sqrt{1-\cos^2\alpha_1} = \mu\left(g\cos\alpha_1 - \frac{mv''^2}{r}\right)$$

$$(1+\mu^2)\cos^2\alpha_1 - 2\frac{\mu^2 v''^2}{gr}\cos\alpha_1 - 1 + \frac{\mu^2 v''^4}{(gr)^2} = 0,$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{\frac{\mu^2 v''^2}{gr} \pm \sqrt{1+\mu^2 - \frac{\mu^2 v''^4}{(gr)^2}}}{1+\mu^2}.$$

$$\alpha_1 = \arccos\frac{\frac{\mu^2 v''^2}{gr} + \sqrt{1+\mu^2 - \frac{\mu^2 v''^4}{(gr)^2}}}{1+\mu^2},$$

$$\alpha_1 = \arccos\frac{\frac{0{,}3^2 0{,}7^2}{9{,}8\cdot 0{,}2} + \sqrt{1+0{,}3^2 - \frac{0{,}3^2 0{,}7^4}{(9{,}8\cdot 0{,}2)^2}}}{1+0{,}3^2} = 12{,}6°.$$

Ženklas „-“ duoda neigiamą kosinuso vertę, t.y., $\alpha_1 > 90°$. Taigi, kai α_1 viršija 12,6° tašelis pradeda slysti, jo greitis padeda didėti. Tašelis atitrūks nuo ritinio pasiekęs tokį greitį v''', kai išcentrinė jėga tampa lygi statmenai ritinio paviršiui sunkio jėgos dedamajai:

$$\frac{mv'''^2}{r} = mg\cos\alpha_2.$$

Jei $v''' = v''$,

$$\alpha'_2 = \arccos\frac{v''^2}{gr}, \quad \alpha'_2 = \arccos\frac{0{,}7^2}{9{,}8{\cdot}0{,}2} = 75°.$$

Tačiau kai $\alpha > 12{,}6°$ tašelio greitis pradeda didėti, todėl atitrūkimo nuo ritinio sąlyga pasiekiama esant kampui $\alpha_2 < 75°$. Panaudojame energijos tvermės dėsnį tašeliui slystant. Tašeli potencinė energija pakinta dydžiu

$$\Delta E_p = mgr(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2),$$

tašelio kinetinė energija pakinta dydžiu

$$\Delta E_k = \frac{mv'''^2}{2} - \frac{mv''^2}{2}$$

ir atliekamas darbas nugalint trinties jėgą tarp ritinio ir tašelio

$$A = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} F_{tr}\, r\, d\alpha,$$

$$\Delta E_p = \Delta E_k + A.$$

Tašelio prispaudimo jėga jam slystant mažėja nuo

$$F_{max} = m(g\cos\alpha_1 - v''^2/r)$$

slydimo pradžioje iki

$$F = m(g\cos\alpha_2 - v'''^2/r) = 0$$

tašeliui atitrūkstant. Vertindami trinties jėgos atliktą darbą imame apytikslę vidutinę trinties jėgą

$$F_{tr\ vid} = \mu F_{max}/2.$$

Tada

$$A = \mu\frac{m(g\cos\alpha_1 - v''^2/r)}{2} r(\alpha_2 - \alpha_1).$$

Gauname lygtį

$$mgr(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) = \frac{mv'''^2}{2} - \frac{mv''^2}{2} + \mu\frac{m(g\cos\alpha_1 - v''^2/r)}{2} r(\alpha_2 - \alpha_1).$$

Kadangi

$$v'''^2 = rg\cos\alpha_2,$$

gauname lygtį kampui α_2

$$3g\cos\alpha_2 + \mu(g\cos\alpha_1 - v''^2/r)\alpha_2 - 2g\cos\alpha_1 - v''^2/r - \mu(g\cos\alpha_1 - v''^2/r)\,\alpha_1 = 0.$$

Lygties tikslus sprendimas nežinomas, sprendžiame apytiksliai skaitmeniškai (kampai α_1 ir α_2 imami radianais).

$$3\text{-}9{,}8\cos\alpha_2 + 0{,}3(9{,}8\cos 0{,}220 - 0{,}7^2/0{,}2)\alpha_2 - 2\text{-}9{,}8\cos 0{,}220 - 0{,}7^2/0{,}2 -$$

$$- 0{,}3(9{,}8\cos 0{,}220 - 0{,}7^2/0{,}2)0{,}220 = 0.$$

$$29{,}4\cos\alpha_2 + 2{,}13\alpha_2 - 22{,}0 = 0.$$

$$\cos\alpha_2 + 0{,}0724\alpha_2 - 0{,}748 = 0.$$

Pažymime

$$f(\alpha_2) = \cos\alpha_2 + 0{,}0724\alpha_2 - 0{,}748$$

ir sprendžiame lygtį stygų metodu, imdami pradines vertes $\alpha_2 = 12{,}6° = 0{,}22$ rad ir $\alpha_2 = 75° = 1{,}31$ rad.

α_2	0,22	1,31	0,636	0,775	0,804	0,809	0,810
$f(\alpha_2)$	0,244	–0,395	0,103	0,023	0,004	0,0008	0,0001

Taigi, tašelis atitrūksta nuo ritinio, kai

$$\alpha_2 = 0{,}81 \text{ rad} = 46{,}4°.$$

Tuo metu jo greitis

$$v''' = \sqrt{rg\cos\alpha_2},\quad v''' = \sqrt{0{,}2\text{-}9{,}8\cos 46{,}4°} = 1{,}16\,\frac{\text{m}}{\text{s}},$$

o aukštis virš paviršiaus

$$h = H + r\cos\alpha_2.$$

Iki paviršiaus tašelis krinta laiką t:

$$h = v'''\cos\alpha_2\ t + gt^2/2,$$

$$t = \frac{\sqrt{(v'''\cos\alpha_2)^2 + 2gh} - v'''\cos\alpha_2}{g} = \frac{\sqrt{2H + r(\cos^3\alpha_2 + 2\cos\alpha_2)} - \sqrt{r\cos^3\alpha_2}}{\sqrt{g}}.$$

Antrasis sprendinys neigiamas. Ieškomasis atstumas

$$AB = r\sin\alpha_2 + v'''\sin\alpha_2\, t =$$

$$= r\sin\alpha_2 + \sqrt{rg\cos\alpha_2}\sin\alpha_2\,\frac{\sqrt{2H + r(\cos^3\alpha_2 + 2\cos\alpha_2)} - \sqrt{r\cos^3\alpha_2}}{\sqrt{g}},$$

$$AB = \sin\alpha_2\left\{r + \sqrt{r\cos\alpha_2}\ \left[\sqrt{2H + r(\cos^3\alpha_2 + 2\cos\alpha_2)} - \sqrt{r\cos^3\alpha_2}\right]\right\},$$

$$AB = \sin 46{,}4°\{0{,}2 + \sqrt{0{,}2\cos 46{,}4°}\left[\sqrt{2\cdot 0{,}3 + 0{,}2(\cos^3 46{,}4° + 2\cos 46{,}4°)}\right] -$$

$$- \sqrt{0{,}2\cos^3 46{,}4°}\}$$

$$AB = 0{,}34 \text{ m}.$$

Kai tašelio smūgis į paviršių plastiškas, tašelis neatšoka, jo greičio vertikalioji dedamoji v_v tampa lygi 0, smūgio metu pakinta dydžiu

$$\Delta v_v = v''' \cos \alpha_2 + gt = \sqrt{(v''' \cos \alpha_2)^2 + 2gh},$$
$$\Delta v_v = \sqrt{1{,}16 \cos 46{,}4°)^2 + 2 \cdot 9{,}8(0{,}3 + 0{,}2 \cos 46{,}4°)} = 3{,}04 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$
Horizontalioji dedamoji prieš smūgį
$$v_h = v''' \sin \alpha_2, \quad v_h = 1{,}16 \sin 46{,}4° = 0{,}84 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \ .$$
Smūgio metu ji galį pakisti dydžiu
$$\Delta v_h = \mu v_v, \quad \Delta v_h = 0{,}3 \cdot 3{,}04 = 0{,}91 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$
Tačiau $v_h < 0{,}91 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, todėl tašelis smūgio metu sustos.
Jei smūgis į paviršių būtų tamprus, tašelis atšoktų vertikaliai aukštyn greičiu
$$v_v = \Delta v_v = 3{,}04 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Tikslesnis sprendinys gaunamas išsprendus slystančio tašelio judėjimo lygtį:
$$r \frac{d^2\alpha}{dt^2} = g \sin \alpha - \mu \left[g \cos \alpha - r \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 \right].$$
Tai antrojo laipsnio diferencialinė lygtis, tikslus jos sprendinys nežinomas. Apytiksliai išsprendus gaunama vertė
$$\alpha_2 = 47{,}0°.$$

Užduoties aiškinamąjį sprendimą pateikė jos autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt *nuolat skelbiamas nuo 2016 04 07.*

Turnyro dalyvių sprendimų aptarimas / FT8-10 ▼

Pirmąsias tris užduotis dauguma sprendusiųjų išsprendė, nors niekas nenagrinėjo, ar atšokęs tašelis neatsimuš į ritinį dar kartą.

Ketvirtosios užduoties pilnai neišsprendė niekas. Net ir užduoties formulavimas netikslus: kas nenurodo atitrūkimo sąlygos (išcentrinė jėga viršija sunkio jėgos dedamąją) kas neatsižvelgia į tašelio slydimą.

Užduoties sprendimų aptarimą parengė jos autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2016 04 07.*

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelė / FT8-10 ▼

Nr.	Sprendimų vertinimo kriterijus	Vertė balais
1.1	Nustatytas tašelio greitis po smūgio.	1
1.2	Nustatytas atstumas AB.	1
2.	Nustatytas tašelio greitis prieš pat nukrintant ant paviršiaus.	1
3.	Nustatyta, kokiu greičiu tašelis atšoks nuo paviršiaus.	1
4.1	Nustatytas kampas, kuriam esant atitruktų nejudantis ritinio atžvilgiu tašelis.	1
4.2	Nustatytas kampas, kuriam esant tašelis pradeda slysti ritinio paviršiumi.	1
4.3	Nustatytas kampas, kuriam esant tašelis atitrūksta nuo ritinio.	1
4.4	Nustatytas atitrūkstančio nuo ritinio tašelio greitis.	1
4.5	Nustatytas atstumas AB.	1

4.6	Nustatytas tašelio greitis prieš pat nukrintant ant paviršiaus.	1
Didžiausias galimas sprendimo įvertinimas		10

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelę parengė užduoties autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2016 04 07.*