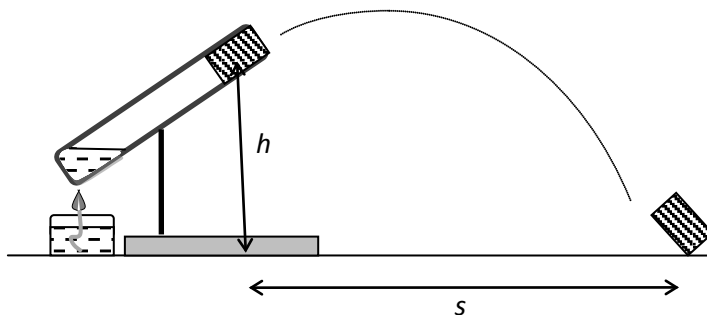


8-ASIS FIZIKOS TURNYRAS
13-oji užduotis Nr. FT8-13 / 2015 03 16 – 2015 04 12

Sąlyga / FT8-13 ▼

Mėgintuvėlio patrankos šūvis

„Patranką“ sudaro ant pagrindo įtvirtintas $V = 30$ ml talpos mėgintuvėlis, standžiai užkemšamas cilindro formos kamščiu, kurio skersmuo $d = 1,5$ cm, ilgis $l = 3$ cm, masė $m = 5$ g, ir spiritinė lemputė. Į mėgintuvėlį įpilama $V' = 1$ ml vandens ir užkemšant pilnai įstumiamas kamštis, kaip parodyta paveikslėlyje. Kamščio ir mėgintuvėlio trinties jėga proporcinga jų sąlyčio paviršiaus plotui. Visa užtaisytos „patrankos“ masė $M = 50$ g. Aplinkos temperatūra $t = 20$ °C, slėgis $p = 10^5$ Pa, santykinė drėgmė $\sigma = 20$ %. „Patranka“ pastatoma ant horizontalaus paviršiaus taip, kad mėgintuvėlis būtų nukreiptas $\alpha = 45^\circ$ kampų horizontą, o kamščio vidurys būtų $h = 17$ cm aukštyje virš horizontalaus paviršiaus. Lemputė uždegama, ir kai mėgintuvėlyje temperatūra tampa $t' = 40$ °C kamštis iššauna ir nukrinta ant paviršiaus nulėkęs $s = 5$ m atstumą nuo savo pradinės padėties, o „patranka“ po šūvio pasislenka $s' = 1$ cm atstumą. Kamščiui slenkant mėgintuvėlyje slėgis nekinta.



- 1) Kokių greičių iš mėgintuvėlio išlėkė kamštis?
- 2) Kiek padidino kamščio greitį iš mėgintuvėlio besiveržiančios dujos kamščiui išlėkus?
- 3) Kam lygus trinties koeficientas tarp horizontalaus paviršiaus ir „patrankos“ pagrindo?

Užduotį parengė mokyklos „Fizikos olimpas“ steigėjų tarybos narys, ilgametis mokyklos direktorius (11 m.) ir šio Fizikos turnyro užduočių parengimo spėsti ir jų sprendimų vertinimo komisijos pirmininkas prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2015 03 16.

Užduoties aiškinamasis sprendimas / FT8-13 ▼

1) Užkemšant mėgintuvėlyje uždaramų dujų sudėtis yra oras ir vandens garai. Vandens garų slėgis

$$p'_{20} = 0,2p_{20},$$

čia

$$p_{20} = 2339 \text{ Pa}$$

yra sočiųjų vandens garų slėgis esant 20 °C temperatūrai. Tada

$$p'_{20} = 0,2 \cdot 2339 \text{ Pa} = 468 \text{ Pa},$$

mėgintuvėlyje uždaramų garų masė

$$m_1 = \frac{\mu p'_{20} (V - V')}{RT}, \quad m_1 = \frac{0,018 \cdot 468 (0,00003 - 0,000001)}{8,31 \cdot 293} = 0,0000001 \text{ kg},$$

čia $\mu = 0,018$ kg yra vandens molio masė, o $T = 273 + t = 293$ K yra pradinė absoliučioji temperatūra. Oro slėgis $p_{oro} = p - p'_{20}$, $p_{oro} = 99532$ Pa. Įstačius kamštį oras suslegiamas, tūris sumažėja iki

$$V'' = V - V' - \pi d^2 l / 4, V'' = 0,00003 - 0,000001 - \pi 0,015^2 \cdot 0,03 / 4 = 0,0000237 \text{ m}^3.$$

Esantis mėgintuvėlyje vanduo garuoja, vandens garai tampa sočiaisiais, jų slėgis tampa p_{20} , tūryje V'' esančių sočiųjų garų masė $m'_1 = 0,00000041 \text{ kg}$. Tokios masės vandens tūris lyginant su V'' yra mažas, todėl į dujų tūrio kitimą vandeniui garuojant neatsižvelgiame. Kaitinant temperatūra ir slėgis didėja, pasiekus t' sočiųjų vandens garų slėgis tampa $p_{40} = 7381 \text{ Pa}$, jų masė

$$m_2 = \frac{\mu p_{40} V''}{RT'}, \quad m_2 = \frac{0,018 \cdot 7381 \cdot 0,0000237}{8,31 \cdot 313} = 0,0000083 \text{ kg}$$

Tokio vandens kiekio tūris taip pat mažas. Oro slėgį mėgintuvėlyje p'_{oro} esant t' nustatome iš dujų būvio lygties:

$$\frac{p_{oro}(V - V')}{T} = \frac{p'_{oro} V''}{T'}, \quad p'_{oro} = \frac{p_{oro}(V - V')T'}{V'' T},$$

$$p'_{oro} = \frac{99532 \cdot (0,00003 - 0,000001) \cdot 313}{0,0000237 \cdot 293} = 130112 \text{ Pa}.$$

Kadangi kamštis pradeda slinkti, maksimali kamščio ir mėgintuvėlio trinties jėga

$$F_{tr} = (p'_{oro} + p_{40} - p)\pi d^2 / 4.$$

Besiplėsdamos dujos atlieka darbą

$$A = (p'_{oro} + p_{40})\pi d^2 l / 4,$$

jis panaudojamas nugalėti trinčiai ir išoriniam slėgiui bei suteikia kamščiui kinetinę energiją. Gauname:

$$(p'_{oro} + p_{40})\pi d^2 l / 4 = (p'_{oro} + p_{40} - p)\pi d^2 l / 8 + p\pi d^2 l / 4 + \frac{mv^2}{2},$$

$$v = \sqrt{(p'_{oro} + p_{40} - p)\pi d^2 l / 4m},$$

$$v = \sqrt{(130112 + 7381 - 100000)\pi 0,015^2 \cdot 0,03 / 4 \cdot 0,005} = 6,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

2) Kamščiui išlėkus iš mėgintuvėlio besiveržiančios dujos adiabiškai plečiasi į visas puses ir stumia kamštį tol, kol jų slėgis susilygina su išoriniu slėgiu. Kadangi išlekiant kamščiui slėgis mėgintuvėlyje viršija išorinį slėgį apie 37 %, besiveržiančios iš mėgintuvėlio dujos veiks kamštį tik arti mėgintuvėlio, tas atstumas žymiai mažesnis už kamščio nulėktą atstumą, todėl laikome, kad kamštis juda kaip greičiu $v' = v + \Delta v$ aukštyje $h' = h + l \sin \alpha$ kampu α į horizontą mestas kūnas. Pažymime kamščio lėkimo aukštyn laiką t_1 , leidimosi laiką t_2 , didžiausią pakilimo virš paviršiaus aukštį H . Vertindami kamščio nulėktą atstumą s į kamščio matmenis neatsižvelgiame. Gauname lygčių sistemą:

$$\begin{cases} s = v' \cos \alpha (t_1 + t_2) \\ v' \sin \alpha = gt_1 \\ H - h' = v' \sin \alpha t_1 - \frac{gt_1^2}{2} \\ H = \frac{gt_2^2}{2} \end{cases}$$

Iš tų lygčių gauname

$$v' = s \sqrt{\frac{g}{2 \cos \alpha (s \sin \alpha + h' \cos \alpha)}} = s \sqrt{\frac{g}{2 \cos \alpha (s \sin \alpha + h \cos \alpha + l \sin \alpha \cos \alpha)'}}$$

$$v' = 5 \sqrt{\frac{9,8}{2 \cos 45^\circ (5 \sin 45^\circ + 0,17 \cos 45^\circ + 0,03 \sin 45^\circ \cos 45^\circ \alpha)}} = 6,9 \text{ m/s.}$$

Taigi, greičio padidėjimas

$$\Delta v = v' - v, \quad \Delta v = 6,9 - 6,3 = 0,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Lengva matyti, kad v' išraiškoje paskutinis vardiklio narys nereikšmingas, t.y., galima imti $h' = h$. Patikrinkime, ar aukščiau padarytoje prielaidoje $h' = h + l \sin \alpha$ nereikėtų atsižvelgti į kamščio poslinkį s' veikiant besiveržiančioms iš mėgintuvėlio dujoms. Besiveržiančios iš mėgintuvėlio dujos veikia kamštį vidutine jėga

$$F = (p'_{oro} + p_{40} - p)\pi d^2/8$$

ir suteikia kamščiui vidutinį pagreitį

$$a = \frac{(p'_{oro} + p_{40} - p)\pi d^2}{8m}, \quad a = \frac{(130112 + 7381 - 100000)\pi 0,015^2}{8 \cdot 0,005} = 660 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Judant tokiu pagreičiu kamščio greitis nuo v iki v' padidėja per laiką

$$t' = \frac{\Delta v}{a}, \quad t' = \frac{0,6}{660} = 0,001 \text{ s,}$$

kamštis per tą laiką nueina atstumą

$$s'' = \frac{(v + v')t'}{2}, \quad s'' = \frac{(6,3 + 6,9)0,001}{2} = 0,0066 \text{ m.}$$

Taigi, kamščio poslinkis s'' nereikšmingas.

3) Panaudojame judesio kiekio pokyčio dėsnį. Kamštis, veikiamas atstojamosios jėgos $F'(\tau)$, kurią sukuria dujų slėgis ir trintis, įgauna judesio kiekį

$$mv' = \int_0^{\tau'} F'(\tau) d\tau,$$

čia τ' – šūvio trukmė. Mėgintuvėlyje esančių dujų masė

$$m' = m_2 + m_{oro}$$

$$m_{oro} = \frac{\mu_{oro} p_{oro} (V - V')}{RT}, \quad m_{oro} = \frac{0,029 \cdot 99532(0,00003 - 0,000001)}{8,31 \cdot 293} = 3,5 \cdot 10^{-5} \text{ kg,}$$

$$m' = 0,0000083 + 0,000035 = 0,000043 \text{ kg.}$$

Tai daug mažiau už kamščio masę, todėl į dujų judesio kiekį neatsižvelgiame, o ir dujų masės centras juda dvigubai mažesniu greičiu, negu kamštis. „Patranka“ veikia sunkio jėga, atatrunkos jėga $F''(\tau) = -F'(\tau)$ ir trinties su horizontaliu paviršiumi jėga. Kadangi šūvio trukmė maža, į sunkį ir „patrankos“ poslinkį šūvio metu neatsižvelgiame. Jėgos $F''(\tau)$ vertikalioji dedamoji sukuria trinties jėgą

$$F_{tr}(\tau) = \mu F''(\tau) \sin \alpha,$$

o $F''(\tau)$ horizontalioji dedamoji nugalė trinties jėgą ir suteikia „patrankai“ horizontalų greitį v_{patr} :

$$(M - m)v_{patr} = \cos \alpha (1 - \mu) \int_0^{\tau'} F'(\tau) d\tau = \cos \alpha (1 - \mu) m v'.$$

$$v_{patr} = \frac{\cos \alpha (1 - \mu) m v'}{M - m}.$$

Taigi, po šūvio „patranka“ įgauna kinetinę energiją $E_k = \frac{(M-m)v_{patr}^2}{2}$, kuri panaudojama nugalėti trinties jėgą $F'_{tr} = \mu(M - m)g$ ir tuo atliekant darbą

$$A = F'_{tr} s' = \mu(M - m)g s',$$

$$\mu(M - m)g s' = \frac{(M - m)v_{patr}^2}{2},$$

$$\mu g s' = \frac{[\cos \alpha (1 - \mu) m v']^2}{2(M - m)^2},$$

$$\mu^2 - 2 \left(\frac{(M - m)^2 g s'}{m^2 v'^2 \cos^2 \alpha} + 1 \right) \mu + 1 = 0,$$

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{(M - m)^2 g s'}{m^2 v'^2 \cos^2 \alpha} + 1 \pm \sqrt{\left[\frac{(M - m)^2 g s'}{m^2 v'^2 \cos^2 \alpha} + 1 \right]^2 - 1} = \\ &= \frac{(M - m)^2 g s'}{m^2 v'^2 \cos^2 \alpha} + 1 \pm \sqrt{\frac{(M - m)^2 g s'}{m^2 v'^2 \cos^2 \alpha} \left[\frac{(M - m)^2 g s'}{m^2 v'^2 \cos^2 \alpha} + 2 \right]}. \end{aligned}$$

Ženklas „+“ neturi prasmės, nes gauname $\mu > 1$. Tada

$$\frac{(M - m)^2 g s'}{m^2 v^2 \cos^2 \alpha} = \frac{(0,05 - 0,005)^2 9,8 \cdot 0,01}{0,005^2 6,9^2 \cdot 0,707^2} = 0,333,$$

$$\mu = 0,333 + 1 - \sqrt{0,333(0,333 + 2)} = 0,45.$$

Užduoties aiškinamąjį sprendimą pateikė jos autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2016 04 07.

Turnyro dalyvių sprendimų aptarimas / FT8-13 ▼

Pirmąją užduotį – kamščio judėjimą veikiant pastoviai dujų slėgio jėgai ir kintamai trinties jėgai – dauguma sprendusiųjų suvokė teisingai.

Antroji užduotis – kampu į horizontą mesto kūno judėjimas – sukėlė problemų bent pusei sprendusiųjų.

Trečioji užduotis – „patrankos“ judėjimas dėl atatrancos – sprendėsi prasčiausiai. Kampu į horizontą nukreipta jėga ne tik stūmė „patranką“ atgal, bet ir spaudė ją prie paviršiaus, todėl ne visas kamščio judesio kiekis persidavė „patrankai“. Tolesnį „patrankos“ judėjimą lemia energijos tvermės dėsnis.

Užduoties sprendimų aptarimą parengė jos autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2016 04 07.

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelė / FT8-13 ▼

Nr.	Sprendimų vertinimo kriterijus	Vertė balais
1.1	Nustatytas dujų slėgis mėgintuvėlyje pajudant kamščiui.	2
1.2	Nustatyta, koku greičiu iš mėgintuvėlio išlėkė kamštis.	2
2.	Nustatyta, kiek padidino kamščio greitį iš mėgintuvėlio besiveržiančios dujos.	2
3.1	Nustatytas greitis, kurį įgyja „patranka“ dėl atatrancos.	2
3.2	Nustatytas trinties koeficientas tarp horizontalaus paviršiaus ir „patrankos“ pagrindo.	2
Didžiausias galimas sprendimo įvertinimas		10

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelę parengė užduoties autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2016 04 07.