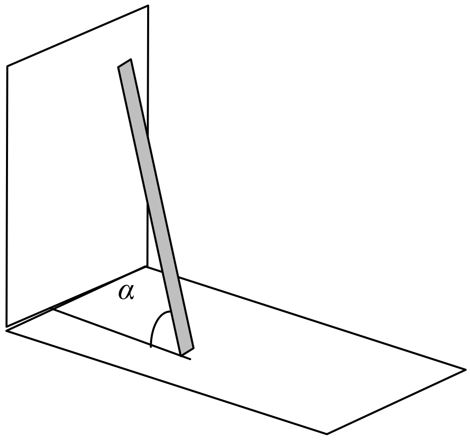
**8-ASIS FIZIKOS TURNYRAS**
**7-oji užduotis Nr. FT8-7 / 2014 11 11 – 2014 12 08**

***Sąlyga / FT8-7 ▼***



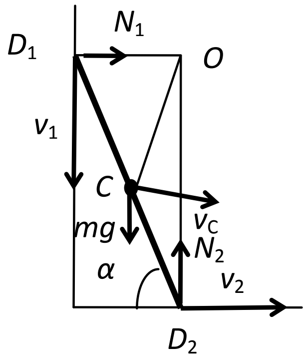

Stačiakampio gretasienio formos lenta, kurios ilgis $l = 2$ m, o storis mažas, pastatoma ant grindų atremiant į sieną ir paleidžiama be pradinio greičio. Trintis tarp lentos ir grindų bei sienos maža.

1) Parašykite lygtį, kurią išsprendę gautume kampo $\alpha$ kitimą laikui bėgant (lentos judėjimo lygtis).
2) Iš lentos judėjimo lygties gauname lentos kampiniam greičiui tokią išraišką:
$$\omega = \sqrt{A(B - \sin\alpha)}.$$
Nustatykite parametrus $A$ ir $B$, jei pradiniu momentu kampas tarp lentos ir grindų $\alpha_0 = 70°$.
3) Koks bus lentos masės centro greitis prieš pat atsitrenkiant lentai į grindis?

*Užduotį parengė mokyklos „Fizikos olimpas" steigėjų tarybos narys, ilgametis mokyklos direktorius (11 m.) ir šio Fizikos turnyro užduočių parengimo spręsti ir jų sprendimų vertinimo komisijos pirmininkas prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.*

▲ *Šis tekstas svetainėje [www.olimpas.lt](http://www.olimpas.lt) nuolat skelbiamas nuo 2014 11 11.*

***Užduoties aiškinamasis sprendimas / FT8-7 ▼***




Pav. 1

1) Pav. 1 pateikta lentos pradinio judėjimo schema: Lentą veikia sunkio jėga $mg$, sienos reakcijos jėga $N_1$ ir grindų reakcijos jėga $N_2$, jos galai $D_1$ ir $D_2$ slysta grindimis ir siena, taigi, lenta sukasi apie momentinį sukimosi centrą $O$ kampiniu greičiu $\omega = -\frac{d\alpha}{dt}$, jos masės centro greitis $v_C = \omega\, OC$, galų greičiai $v_1 = \omega\, OD_1$ ir $v_2 = \omega\, OD_2$. Lentos masės centro vertikaliajai dedamajai $v_{Cv}$ ir horizontaliajai dedamajai $v'_{Ch}$ gauname: $v_{Cv} = v_C \cos\alpha = v_1/2$,
$v_{Ch} = v_C \sin\alpha = v_2/2$. Lentos judėjimo lygtis

$$\varepsilon = \frac{M_O}{I_O},$$

čia $M_O$ – lentą veikiantis jėgos momentas taško $O$ atžvilgiu, $M_O = mg\, OC\, \cos\alpha = \frac{mg\, l}{2}\cos\alpha$, $I_O$ – lentos inercijos momentas taško $O$ atžvilgiu, $I_O = ml^2/3.$, $\varepsilon = -\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ – lentos kampinis pagreitis. Lentos judėjimo lygtis

$$-\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{3g}{2l}\cos\alpha.$$

Akivaizdu, kad lentai pradiniu momentu visi greičiai lygūs 0, o laikui bėgant jie didėja. Tačiau iš pateiktos $v_{Ch}$ išraiškos matyti, kad $v_{Ch} \to 0$ kai $\alpha \to 0$. Tai yra negalima. Kai kampas tarp lentos ir grindų įgauna vertę $\alpha'$, $v_{Ch}$ tampa maksimali, viršutinis lentos galas $D_1$ atitrūksta nuo sienos, lentos masės cento horizontalioji dedamoji nustoja didėti ir lieka pastovi. Lentą veikia sunkio jėga $mg$ ir grindų reakcijos jėga $N_2$. Lentos judėjimo lygtis įgauna pavidalą

$$\varepsilon = \frac{M_C}{I_C},$$

čia $M_C = N_2\, D_2C\, \cos\alpha$, $I_O = ml^2/12$. Grindų reakcijos jėgai nustatyti panaudojame lygtis lentos masės centro pagreičiui $a_C$:

$$a_C = \frac{mg - N_2}{m}$$

$$a_C = \varepsilon \frac{l}{2} \cos\alpha$$

Tada lentos judėjimo lygtis

$$-\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{6g\cos\alpha}{l(3\cos^2\alpha + 1)}..$$

Taigi, kampo $\alpha$ kitimą laikui bėgant gautume išsprendę lygtis

$$-\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \begin{cases} \dfrac{3g}{2l}\cos\alpha\,, & 70° > \alpha > \alpha', \\ \dfrac{6g\cos\alpha}{l(3\cos^2\alpha+1)}, & \alpha' \geq \alpha \geq 0. \end{cases}$$

2) Kadangi $\omega = -\frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{A(B - \sin\alpha)}$, ir $\omega|_{\alpha=70°} = 0$, gauname $B = \sin\alpha_0 = \sin 70° = 0{,}94$. Išdiferencijavę $\omega$ išraišką gauname

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{A\cos\alpha}{2\sqrt{A(B-\sin\alpha)}}\frac{d\alpha}{dt} = \frac{-A\cos\alpha}{2}.$$

Palyginę su judėjimo lygtimi gauname

$$A = \frac{3g}{l}.$$

Taigi,

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}(\sin\alpha_0 - \sin\alpha)}.$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3\cdot 9{,}8}{2}(\sin 70° - \sin\alpha)} = \sqrt{14{,}7(0{,}94 - \sin\alpha)}.$$

Akivaizdu, kad pateiktas sprendinys tinka tik esant $70° > \alpha > \alpha'$.

3) Nustatykime, kokiam kampui $\alpha'$ esant lenta atitrūksta nuo sienos. Masės centro greičio horizontaliajai dedamajai gauname išraišką

$$v_{Ch} = \frac{\omega l \sin\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{2}\sqrt{3gl(\sin\alpha_0 - \sin\alpha)}.$$

Iš maksimumo sąlygos $\frac{dv_{Ch}}{d\alpha} = 0$ gauname lygtį

$$\cos\alpha'\sqrt{\sin\alpha_0 - \sin\alpha'} - \frac{\sin\alpha'\cos\alpha'}{2\sqrt{\sin\alpha_0 - \sin\alpha'}} = 0,$$

o tos lygties sprendinys

$$\sin\alpha' = \frac{2\sin\alpha_0}{3} = \frac{2\sin 70°}{3} = 0{,}626, \quad \alpha' = 39°.$$

Tuo metu masės centro horizontalioji greičio dedamoji

$$v'_{Ch} = \frac{\sin\alpha'}{2}\sqrt{3gl(\sin\alpha_0 - \sin\alpha')} = \frac{\sin\alpha_0\sqrt{gl\sin\alpha_0}}{3}.$$

Toliau judant lentai horizontalioji masės centro dedamoji nekinta, o didėja vertikalioji masės centro dedamoji $v_{Cv}$ ir lentos kampinis greitis. Jiems nustatyti panaudojame energijos tvermės dėsnį. Prieš pat smūgį į grindis

$$\frac{mgl\sin\alpha_0}{2} = \frac{m({v'_{Ch}}^2 + {v_{Cv}}^2)}{2} + \frac{I_C\omega^2}{2}. \quad v_{Cv} = \omega l/2$$

Tada dedamajai $v_{Cv}$ gauname išraišką

$${v_{Cv}}^2 = \frac{3(gl\sin\alpha_0 - {v'_{Ch}}^2)}{4},$$

o masės centro greičiui

$$v_C = \sqrt{{v'_{Ch}}^2 + {v_{Cv}}^2} = \sqrt{gl\sin\alpha_0\,(\sin^2\alpha_0 + 27)}/6,$$

$$v_C = \frac{\sqrt{9{,}8\cdot 2\cdot\sin 70°\,(\sin^2 70° + 27)}}{6} = 3{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

*Užduoties aiškinamąjį sprendimą pateikė jos autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.*

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt *nuolat skelbiamas nuo 2016 04 07.*

***Turnyro dalyvių sprendimų aptarimas / FT8-7*** ▼

1) Atrodo, kad daugeliui dalyvių sąvoka „judėjimo lygtis“ su antruoju Newton‘o dėsniu dar nelabai siejasi. Ir nedaugelis pastebėjo, kad lentai slystant tam tikru momentu jos viršutinis galas atsiskiria nuo sienos, o dėl to pakinta lentos judėjimo dėsningumas. Lentos pakitusios judėjimo lygties tiksliai nepateikė niekas.
2) Užduotį išspendė beveik visi.
3) Tikslaus atsakymo nepateikė niekas. Nors daugelis rėmėsi energijos tvermės dėsniu, tačiau neatsižvelgė į lentos masės centro slenkamąjį judesį išilgai grindų.

*Užduoties sprendimų aptarimą parengė jos autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.*

▲ *Šis tekstas svetainėje* www.olimpas.lt *nuolat skelbiamas nuo 2016 04 07.*

***Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelė / FT8-7 ▼***

| Nr. | Sprendimų vertinimo kriterijus | Vertė balais |
|---|---|---|
| 1.1 | Nustatytos lentą veikiančios jėgos ir jos judėjimo pobūdis pradiniu momentu. | 1 |
| 1.2 | Parašyta kampo kitimą apibrėžianti lygtis. | 2 |
| 1.3 | Nustatytas judėjimo pokytis esant tam tikram kampui. | 1 |
| 1.4 | Parašyta kampo kitimą esant pakitusiam judėjimui aprašanti lygtis. | 2 |
| 2 | Nustatyti parametrai A ir B. | 1 |
| 3.1 | Nustatytas kampas, kuriam esant kinta lentos judėjimo pobūdis. | 1 |
| 3.2 | Nustatytas masės centro greitis. | 2 |
| Didžiausias galimas sprendimo įvertinimas | | 10 |

*Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelę parengė užduoties autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.*

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2016 04 07.*