8-ASIS FIZIKOS TURNYRAS
9-oji užduotis Nr. FT8-9 / 2014 12 22 – 2015 01 18

Sąlyga / FT8-9 ▼

Tašelio tempimas gumine juostele

Mažas tašelis, kurio masė m = 200 g, padėtas ant šiurkštaus horizontalaus paviršiaus, trinties koeficientas μ = 0,2. Prie tašelio pritvirtinta guminė juostelė, jos pradinis ilgis l = 1 m. Laisvasis ištiestos neįtemptos juostelės galas pradedamas traukti horizontalia kryptimi pastoviu greičiu υ = 0,5 m/s. Praėjus laikui τ = 2 s, tašelis pajuda iš vietos.

1) Kam lygus juostelės stangrumo koeficientas?
2) Parašykite tašelio judėjimo lygtį.
3) Kokiose ribose keisis tašelio greitis?
4) Kokiose ribose keisis tašelio pagreitis?
5) Kokiose ribose keisis juostelės ilgis traukiant tašelį?
6) Kokia vidutinė galia naudojama traukiant juostelę tašelio judėjimui nusistovėjus?

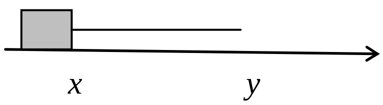
Užduotį parengė mokyklos „Fizikos olimpas” steigėjų tarybos narys, ilgametis mokyklos direktorius (11 m.) ir šio Fizikos turnyro užduočių parengimo spręsti ir jų sprendimų vertinimo komisijos pirmininkas prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2014 12 22.*

Užduoties aiškinamasis sprendimas / FT8-9 ▼

1) Pažymime tašelio koordinatę x, juostelės laisvojo galo koordinatę y, laiką t. Laikome, kad tašeliui pradedant judėti $t = 0$. Maksimali tašelį veikianti trinties jėga

$$F_t = \mu mg.$$



Tašelis pradeda slinkti, kai juostelės įtempimo jėga $F = k(y - x - l)$ tampa lygi maksimaliai trinties jėgai. Kai $t = 0$ gauname

$$k(l + v\tau - l) = \mu mg,$$

$$k = \frac{\mu mg}{v\tau}, \quad k = 0{,}39\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

2) Tašelio pagreitis

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F'}{m}, \quad F' = F - F_t = k(v(t + \tau) - x) - \mu mg = \frac{\mu mg}{v\tau}(vt - x).$$

Tašelio judėjimo lygtis

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\mu g}{v\tau}(vt - x).$$

3) Pažymime $z = vt - x$. Tada $\frac{dz}{dt} = v - \frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{d^2x}{dt^2}$, ir judėjimo lygtis tampa

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\mu g}{v\tau} z = 0.$$

Tai – harmoninių svyravimų lygtis, jos bendras sprendinys

$$z = A\sin(\omega t + \varphi), \quad \omega = \sqrt{\frac{\mu g}{v\tau}}, \quad \omega = \sqrt{\frac{0{,}2 \cdot 9{,}8}{0{,}5 \cdot 2}} = 1{,}4\ \mathrm{s}^{-1}$$

$$x = vt - A\sin\left(\sqrt{\frac{\mu g}{v\tau}}t + \varphi\right).$$

Konstantas A ir φ nustatome iš pradinių sąlygų:

$$x|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0$$

Iš pirmosios sąlygos gauname $\varphi = 0$. Iš antrosios gauname

$$\frac{dx}{dt} = v - A\sqrt{\frac{\mu g}{v\tau}}\cos\sqrt{\frac{\mu g}{v\tau}}t, \quad v - A\sqrt{\frac{\mu g}{v\tau}} = 0, \quad A = v\sqrt{\frac{v\tau}{\mu g}} = 0{,}5\sqrt{\frac{0{,}5 \cdot 2}{0{,}2 \cdot 9{,}8}} = 0{,}36\ \mathrm{m}.$$

Taigi,

$$x = vt - v\sqrt{\frac{v\tau}{\mu g}}\sin\sqrt{\frac{\mu g}{v\tau}}t.$$

Tada tašelio greitis

$$V(t) = \frac{dx}{dt} = v\left(1 - \cos\sqrt{\frac{\mu g}{v\tau}}t\right).$$

Matome, kad tašelio greitis $V(t)$ periodiškai kinta (periodas $T = 2\pi\sqrt{\frac{v\tau}{\mu g}} = 4{,}5$ s) nuo 0 (kai $\cos\sqrt{\frac{\mu g}{v\tau}}t = 1$) iki $2v = 1\ \mathrm{m/s}$ (kai $\cos\sqrt{\frac{\mu g}{v\tau}}t = -1$).

4) Tašelio pagreitis

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = \sqrt{\frac{\mu g v}{\tau}}\sin\sqrt{\frac{\mu g}{v\tau}}t.$$

Taigi, pagreitis periodiškai kinta nuo $a_{min} = -\sqrt{\frac{\mu g v}{\tau}} = -\sqrt{\frac{0{,}2 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}5}{2}}$ = –0,70 m/s^2 (kai $\sin\sqrt{\frac{\mu g}{v\tau}}t = -1$) iki $a_{max} = 0{,}70$ m/s^2 (kai $\sin\sqrt{\frac{\mu g}{v\tau}}t = 1$).

5) Juostelės ilgis pradžioje tolygiai didėja nuo *i* iki $l + v\tau$, $1 \le l' \le 2$ m, o toliau išreiškiamas taip:

$$l'(t) = y - x = (l + v\tau + vt) - \left(vt - v\sqrt{\frac{v\tau}{\mu g}}\sin\sqrt{\frac{\mu g}{v\tau}}t\right) = l + v\tau + v\sqrt{\frac{v\tau}{\mu g}}\sin\sqrt{\frac{\mu g}{v\tau}}t.$$

Matome, kad juostelės ilgis periodiškai kinta: didėja nuo $l' = l + v\tau$ iki

$l'_{max} = l + v\tau + v\sqrt{\frac{v\tau}{\mu g}} = 1 + 0{,}5 \cdot 2 + 0{,}5\sqrt{\frac{0{,}5 \cdot 2}{0{,}2 \cdot 9{,}8}} = 2{,}36$ m,

kai $\sin\sqrt{\frac{\mu g}{v\tau}}t = 1$, po to mažėja iki

$$l'_{min} = l + v\tau - v\sqrt{\frac{v\tau}{\mu g}} = 1 + 0{,}5 \cdot 2 - 0{,}5\sqrt{\frac{0{,}5\cdot 2}{0{,}2\cdot 9{,}8}} = 1{,}64 \text{ m},$$

kai $\sin\sqrt{\frac{\mu g}{v\tau}}t = -1$.

6) Kadangi tašelio greitis periodiškai kinta, tašeliui judant su pagreičiu kinta ir juostelės įtempimo jėga, o tuo pačiu – ir naudojama galia. Vidutinę galią nustatom imdami darbą, atliekamą per laiką t_1.Tada

$$N = \frac{1}{t_1}\int_0^{t_1} Fvdt = \frac{1}{t_1}\int_0^{t_1}(F_t + mv\omega\sin\omega t)\,vdt =$$
$$= \mu mgv + \frac{1}{t_1}\int_0^{t_1} mv^2\omega\sin\omega t\,dt =$$
$$= \mu mgv + \frac{1}{t_1}[mv^2(1-\cos\omega t_1)].$$

Matome, kad galios išraiškoje pirmasis narys yra pastovus, o antrasis artėja į nulį, kai $t_1 \to \infty$. Jei t_1 kartotinis svyravimo periodui, antrasis narys lygus nuliui, ir vidutinė galia

$$N = \mu mgv, \;\; N = 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}5 = 0{,}196 \text{ W}.$$

Momentinė galia

$$N' = Fv = (\mu mg + mv\omega\sin\omega t)\,v$$

kinta nuo

$N'_{max} = (\mu mg + mv\omega)v$, $N'_{max} = (0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 9{,}8 + 0{,}2 \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}4)0{,}5 = 0{,}266$ W

iki

$N'_{min} = (\mu mg - mv\omega)v$, $N'_{min} = (0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 9{,}8 - 0{,}2 \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}4)0{,}5 = 0{,}126$ W.

Užduoties aiškinamąjį sprendimą pateikė jos autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt *nuolat skelbiamas nuo 2016 04 07.*

Turnyro dalyvių sprendimų aptarimas / FT8-9 ▼

1) Pirmąją užduotį išsprendė visi sprendusieji.
2) Ne visi sprendusieji suprato, kad mechanikoje judėjimo lygtis – tai antrojo Newton'o dėsnio matematinė išraiška. Mažam tašeliui tos lygties sprendinys – koordinatės priklausomybės nuo laiko išraiška (trajektorija). Ne visi pastebėjo, kad judėjimo lygtis suvedama į harmoninių svyravimų lygtį, todėl ir parametrų kitimo ribos 2 – 5 užduotyse gautos netinkamos
6) Ne visi pastebėjo, kad juostelės įtempimo jėga nelygi trinties jėgai, nes tašelis juda su pagreičiu. Skaičiuojant galią reikia imti vidutinę jėgą ir parodyti, kad šiuo atveju ji lygi trinties jėgai.

Užduoties sprendimų aptarimą parengė jos autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas svetainėje* www.olimpas.lt *nuolat skelbiamas nuo 2016 04 07.*

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelė / FT8-9 ▼

Nr.	**Sprendimų vertinimo kriterijus**	**Vertė balais**
1.	Nustatytas juostelės stangrumo koeficientas.	1
2.	Parašyta tašelio judėjimo lygtis.	1
3.1	Nustatyta, kad tašelio judėjimo lygtis suvedama į harmoninių svyravimų lygtį.	2
3.2	Parašytas judėjimo lygties sprendinys.	1
3.3	Nustatytos tašelio greičio kitimo ribos.	1
4.	Nustatytos tašelio pagreičio kitimo ribos.	1
5.	Nustatytos juostelės ilgio kitimo ribos.	1
6.	Nustatyta vidutinė galia naudojama traukiant juostelę tašelio judėjimui nusistovėjus.	2
Didžiausias galimas sprendimo įvertinimas		10

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelę parengė užduoties autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2016 04 07.*