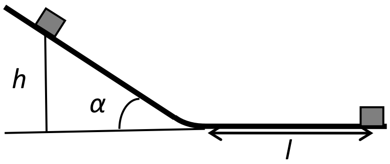
9-ASIS FIZIKOS TURNYRAS
10-oji užduotis Nr. FT9-10 / 2016 01 25 – 02 21

Slystančio tašelio kelionė

Sąlyga / FT9-10 ▼



Nuožulnioji plokštuma, sudaranti $\alpha = 15°$ kampą su horizontu, išlinksta mažo spindulio lanku, pereinančiu į horizontalų paviršių. Ant nuožulniosios plokštumos aukštyje $h = 20$ cm padedamas mažas tašelis ir paleidžiamas be pradinio greičio. Tašelis slysta nuožulniąja plokštuma, po to – horizontaliu paviršiumi. Horizontaliu paviršiumi nuslydęs atstumą $l = 50$ cm tašelis sustoja.

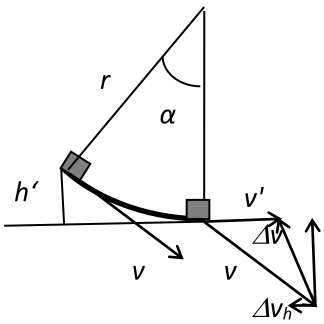
1) Kam lygus tašelio trinties koeficientas?
2) Kokiose ribose kistų tašelio pagreitis, jei nuožulniąją plokštumą ir horizontalų paviršių jungiančio lanko spindulio ilgis būtų $r = 1$ cm?

Užduotį parengė mokyklos „Fizikos olimpas" steigėjų tarybos narys, ilgametis mokyklos direktorius (11 m.) ir šio Fizikos turnyro užduočių parengimo spręsti ir jų sprendimų vertinimo komisijos pirmininkas prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.
▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2016 01 25.*

Aiškinamasis sprendimas / FT9-10 ▼

Trinties koeficientą pažymime μ. Tašeliui slystant nuožulniąja plokštuma jo potencinė energija virsta kinetine energija ir panaudojama atlikti darbą nugalint trinties jėgą:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + F_{tr}\frac{h}{\sin\alpha} = \frac{mv^2}{2} + \frac{\mu mgh\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$



Čia v – tašelio greitis nuožulniosios plokštumos apačioje. Tašelio slydimas lanku pavaizduotas pav. Tašeliui slystant išlenktu paviršiumi veikia kintanti įcentrinė jėga $F(t) = \frac{mv(t)^2}{r}$, kuri pakeičia greičio kryptį ir sukuria papildomą trinties jėgą, todėl išlinkusios dalies pabaigoje greitis tampa v':

$$\overrightarrow{v'} = \vec{v} - \overrightarrow{\Delta v}.$$

Kadangi r mažas, $F(t)$ didelė, todėl tašeliui slystant lanku į sunkio jėgą ir aukštį h‘ neatsižvelgiame. Panaudojame judesio kiekio pokyčio dėsnį:

$$\int_0^\tau F(t)dt = m\Delta v_v = mv\sin\alpha.$$

Čia τ – slydimo lanku trukmė. Tada

$$m\Delta v_h = \mu\int_0^\tau F(t)dt = \mu m\Delta v_v,$$

$$v' = v\cos\alpha - \mu v\sin\alpha.$$

Pagal energijos tvermės dėsnį

$$\frac{mv'^2}{2} = \mu mgl, \;\; v' = \sqrt{2\mu gl}.$$

Gauname lygčių sistemą

$$\begin{cases} mgh = \dfrac{mv^2}{2} + \dfrac{\mu mgh\cos\alpha}{\sin\alpha} \\ v' = v\,(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) \\ \dfrac{mv'^2}{2} = \mu mgl \end{cases}.$$

Eliminavę v ir v' gauname lygtį trinties koeficientui

$$h = \frac{\mu l}{(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)^2} + \frac{\mu h\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$h\sin\alpha\cos^2\alpha - 2\mu h\sin^2\alpha\cos\alpha + \mu^2 h\sin^3\alpha =$$
$$= \mu l\ \sin\alpha + \mu h\cos^3\alpha - 2\mu^2 h\sin\alpha\cos^2\alpha + \mu^3 h\sin^2\alpha\cos\alpha.$$

Lygtis trečiojo laipsnio, ją galima būtų išspręsti naudojant Kardano formulę. Spęsim lygtį apytiksliai skaitiniu metodu. Pažymime

$$f(\mu) = \mu^3 h\sin^2\alpha\cos\alpha - \mu^2(2h\sin\alpha\cos^2\alpha + h\sin^3\alpha) +$$
$$+\mu(l\ \sin\alpha + h\cos^3\alpha + 2h\sin^2\alpha\cos\alpha) - h\sin\alpha\cos^2\alpha,$$

$$f(\mu) = \mu^3 h\sin^2\alpha\cos\alpha - \mu^2 h\sin\alpha\,(1+\cos^2\alpha) +$$
$$+\mu[l\ \sin\alpha + h\cos\alpha(1+\sin^2\alpha)] - h\sin\alpha\cos^2\alpha.$$

Įrašome skaitines vertes:

$$f(\mu) = \mu^3 20\sin^2 15\cos 15 - \mu^2 20\sin 15\,(1+\cos^2 15) +$$
$$+\mu[50\ \sin 15 + 20\cos 15(1+\sin^2 15)] - 20\sin 15\cos^2 15,$$
$$f(\mu) = 1{,}294\mu^3 - 10{,}01\mu^2 + 33{,}55\mu - 4{,}83.$$

Mažiausia μ vertė yra 0, o didžiausia $\mu_{max} = \mathrm{tg}\,\alpha$ = 0,27. Tas vertes imame ribomis ir naudojame stygų metodą.

μ	0	0,25	0,1551	0,1508	0,1506
$f(\mu)$	–4,83	2,95	0,138	0,0061	0,00002

Taigi, $\mu = 0{,}1506 \approx 0{,}15$.

Nuožulniąja plokštuma tašelis slenka greitėdamas pagreičiu

$$a_1 = g\,(\sin\alpha - \mu\cos\alpha),\;\; a_1 = 9{,}8\,(\sin 15 - 0{,}15\cos 15) = 1{,}12\ (\mathrm{m/s^2}).$$

Horizontaliu paviršiumi tašelis slenka lėtėdamas pagreičiu

$$a_2 = -g\mu,\;\; a_2 = -9{,}8\cdot 0{,}15 = -1{,}47\ (\mathrm{m}/s^2).$$

Pasiekęs nuožulniosios plokštumos galą tašelis įgauna greitį

$$v = \sqrt{2gh\left(1 - \frac{\mu\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)},$$

todėl išlenkimo pradžioje jo įcentrinis pagreitis

$$a'_3 = \frac{v^2}{r} = \frac{2gh}{r}\left(1 - \frac{\mu\cos\alpha}{\sin\alpha}\right), \quad a'_3 = \frac{2 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}2}{0{,}01}\left(1 - \frac{0{,}15\cos 15}{\sin 15}\right) = 173\ (\mathrm{m/s^2}).$$

Matome, kad prielaida $a'_3 \gg g$ gali būti taikoma. Tašelis bus stabdomas trinties jėgos, kuri suteiks tangentinį pagreitį

$$a"_3 = -\mu a'_3, \quad a"_3 = -0{,}15 \cdot 173 = -26\ (\mathrm{m/s^2})$$

Tada visas pagreitis

$$a_3 = \sqrt{{a'_3}^2 + {a"_3}^2} = \frac{2gh}{r}\left(1 - \frac{\mu\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\sqrt{1+\mu^2}, \quad a_3 = 175\ (\mathrm{m/s^2}).$$

Pradėdamas slysti horizontaliu paviršiumi tašelis turi greitį

$$v' = \sqrt{2\mu g l},$$

todėl išlinkimo pabaigoje tašelio įcentrinis pagreitis

$$a'_4 = \frac{2\mu g l}{r}, \qquad a'_4 = \frac{2 \cdot 0{,}15 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}5}{0{,}01} = 147\ (\mathrm{m/s^2}).$$

Išlinkimo pabaigoje tašelio tangentinis pagreitis

$$a"_4 = -\mu a'_4, \quad a"_4 = -\ 0{,}15 \cdot 147 = 22\ \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right),$$

o visas pagreitis

$$a_4 = \sqrt{{a'_4}^2 + {a"_4}^2}. \quad a_4 = \sqrt{147^2 + 22^2} = 149\ \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right).$$

Taigi, pradžioje tašelis juda greitėdamas pagreičiu a_1 =1,12 m/s^2, nukreiptu išilgai nuožulniosios plokštumos, po to slysta išlinkimu, jo didžiausias įcentrinis pagreitis $a'_3 = 173\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, o lėtėjimo pagreitis $a“_3 = -26\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, po to slysta horizontaliu paviršiumi lėtėdamas pagreičiu $a_2 = -\,1{,}42\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

Užduoties aiškinamąjį sprendimą pateikė jos autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt *nuolat skelbiamas nuo 2020 08 25.*

Turnyro dalyvių sprendimų aptarimas / FT9-10 ▼

Dauguma sprendusiųjų neatsižvelgė, kad esant mažam kreivumo spinduliui judantį tašelį veikia didelė įcentrinė jėga, kuri sukuria ir didelę trinties jėgą, todėl praeinant išlinkimo vietą žymiai pakinta ne tik tašelio greičio kryptis, bet ir absoliuti vertė.

Kai kas iš sprendusiųjų neatsižvelgė, kad pagreitis, kaip vektorius, turi ne tik absoliutų didumą, bet ir kryptį, todėl reikia skirti greitėjantį ir lėtėjantį judesius bei įcentrinį, tangentinį ir pilnąjį pagreičius.

Užduoties sprendimų aptarimą parengė jos autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas svetainėje* www.olimpas.lt *nuolat skelbiamas nuo 2020 08 25.*

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelė / FT9-10 ▼

Nr.	**Sprendimų vertinimo kriterijus**	**Vertė balais**
1.	Lygtys, siejančios trinties koeficientą, tašelio greitį nuožulniosios plokštumos apačioje ir tašelio greitį horizontalaus paviršiaus pradžioje	3
	Apskaičiuotas trinties koeficientas	2
2.	Tašelio pagreitis jam slenkant nuožulniąja plokštuma	1
	Tašelio pagreitis jam slenkant horizontaliu paviršiumi	1
	Tašelio įcentrinis, tangentinis ir pilnas pagreičiai išlinkusioje dalyje	3
3.	Netikslumai (kiekvienam iš kriterijų Nr. 1-2)	iki (-1)
Didžiausias galimas sprendimo įvertinimas		10

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelę parengė užduoties autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2020 08 25.*