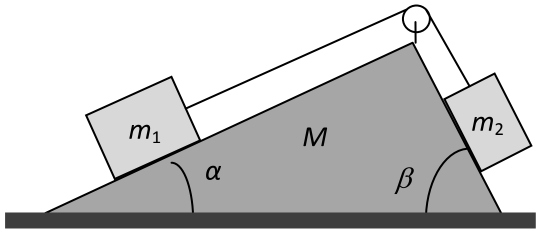
9-ASIS FIZIKOS TURNYRAS

12-oji užduotis Nr. FT9-12 / 2016 03 02 – 2016 03 29

Draugiškų tašelių judėjimas

Sąlyga / FT9-12 ▼

Ant horizontalaus paviršiaus paguldytas trikampės prizmės formos kūnas su skridiniu. Du tašeliai, sujungti plonu siūlu, permestu per skridinį, padėti ant prizmės formos kūno, kaip parodyta pav. $m_1 = 30$ g, $m_2 = 45$ g, $M = 70$ g, $\alpha = 20°$, $\beta = 40°$.



1) Kokiam mažiausiam trinties koeficientui esant tašeliai nejudės?
2) Kokiu pagreičiu pradės slinkti tašeliai, jei visiems paviršiams trinties koeficientas bus μ=0,2?
3) Kas pasikeis, jei trintis bus nykstamai maža?

Užduotį parengė mokyklos „Fizikos olimpas" steigėjų tarybos narys, ilgametis mokyklos direktorius (11 m.) ir šio Fizikos turnyro užduočių parengimo spręsti ir jų sprendimų vertinimo komisijos pirmininkas prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2016 03 02.*

Aiškinamasis sprendimas / FT9-12 ▼

Ieškomąjį trinties koeficientą pažymime μ'. Pirmąjį tašelį veiks nustumiančioji jėga

$$F_1 = m_1 g \sin\alpha, \quad F_1 = 0{,}03 \cdot 9{,}8 \cdot \sin 20° = 0{,}15 \ \text{(N)},$$

prispaudžiančiosios jėgos N_1 sukurta trinties jėga

$$F_{tr1} = \mu' N_1 = \mu' m_1 g \cos\alpha$$

ir siūlo įtempimo jėga *T*, antrąjį tašelį veiks nustumiančioji jėga

$$F_2 = m_2 g \sin\beta, \quad F_2 = 0{,}045 \cdot 9{,}8 \cdot \sin 40° = 0{,}28 \ \text{(N)},$$

prispaudžiančiosios jėgos sukurta trinties jėga

$$F_{tr2} = \mu' N_2 = \mu' m_2 g \cos\beta$$

ir siūlo įtempimo jėga *T*.

Akivaizdu, jog siūlo įtempimo jėgos viena kitą atsveria. Kadangi $F_2 > F_1$, tašeliai nejudės, kai

$$F_2 - F_1 \le F_{tr1} + F_{tr2},$$

$$\mu' = \frac{F_2 - F_1}{N_1 + N_2} = \frac{m_2 g \sin\beta - m_1 g \sin\alpha}{m_1 g \cos\alpha + m_2 g \cos\beta} = \frac{m_2 \sin\beta - m_1 \sin\alpha}{m_1 \cos\alpha + m_2 \cos\beta},$$

$$\mu' = \frac{0{,}045 \cdot \sin 40° - 0{,}03 \cdot \sin 20°}{0{,}03 \cdot \cos 20° + 0{,}045 \cdot \cos 40°} = 0{,}30.$$

Tašeliai slinks veikiant atstojamajai jėgai

$$F = F_2 - F_1 - F'_{tr1} - F'_{tr2}.$$

Čia $F'_{tr1} = \mu m_1 g \cos\alpha, \quad F'_{tr2} = \mu m_2 g \cos\beta.$

Tada ieškomasis pagreitis

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 g \sin\beta - m_1 g \sin\alpha - \mu(m_1 g \cos\alpha + m_2 g \cos\beta)}{m_1 + m_2},$$

$$a = \frac{g[m_2 \sin\beta - m_1 \sin\alpha - \mu(m_1 \cos\alpha + m_2 \cos\beta)]}{m_1 + m_2},$$

$$a = \frac{9{,}8[0{,}045 \cdot \sin 40° - 0{,}03 \cdot \sin 20° \ \ - 0{,}2(0{,}03 \cdot \cos 20° + 0{,}045 \cdot \cos 40°)]}{0{,}03 + 0{,}045} = 0{,}8(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}).$$

Tokiu pagreičiu tašeliai slinks prizmės paviršiumi (pirmasis – aukštyn, antrasis – žemyn), jei prizmė nejudės, t.y., jei prizmės trinties į pagrindą maksimali jėga bus didesnė už tašeliams suteikiančios pagreitį jėgos horizontaliąją dedamąją

$$F_h = a(m_1 \cos\alpha + m_2 \cos\beta), \ \ F_h = 0{,}8 \cdot (0{,}03 \cdot \cos 20° + 0{,}045 \cdot \cos 40°) = 0{,}050 \ \ (\mathrm{N}).$$

Prispaudžiančioji prizmę prie pagrindo jėga

$$F" = Mg + m_1(g + a \sin\alpha) + m_2(g - a \sin\beta),$$

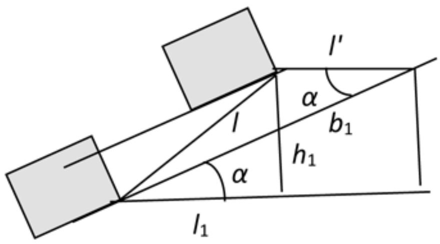
todėl prizmę veikianti trinties jėga

$$F"_{tr} = \mu F" = \mu[Mg + m_1(g + a \sin\alpha) + m_2(g - a \sin\beta)],$$

$$F"_{tr} = 0{,}2 \cdot [0{,}07 \cdot 9{,}8 + 0{,}03 \cdot (9{,}8 + 0{,}8 \cdot \sin 20°) + 0{,}045 \cdot (9{,}8 - 0{,}8 \cdot \sin 40°)] = 0{,}28 \ (\mathrm{N}).$$

Matome, kad $F"_{tr} > F_h$, taigi, prizmė nejudės.

Nesant trinties tašeliai slinks prizmės paviršiumi, o prizmė slinks pagrindu, bendras tašelių ir prizmės masės centras horizontalia kryptimi nejudės. Pažymime tašelių pagreičius a, prizmės pagreitį a'. Sakykim, kad per laiką t pirmasis tašelis pasislinko atstumą l, o prizmė l', kaip parodyta pav. 1. Tašelio horizontalus poslinkis l_1, vertikalus h_1.



Pav. 1

$$l^2 = l'^2 + b_1^2 - 2l' b_1 \cos\alpha,$$

$$b_1 = l' \cos\alpha + \sqrt{l'^2 \cos^2\alpha + l^2 - l'^2} =$$

$$= l' \cos\alpha + \sqrt{l^2 - l'^2 \sin^2\alpha},$$

$$h_1 = b_1 \sin\alpha = \sin\alpha(l' \cos\alpha + \sqrt{l^2 - l'^2 \sin^2\alpha}),$$

$$l_1 = b_1 \cos\alpha - l' =$$

$$= l' \cos^2\alpha + \cos\alpha\sqrt{l^2 - l'^2 \sin^2\alpha} - l' = \cos\alpha\sqrt{l^2 - l'^2 \sin^2\alpha} - l' \sin^2\alpha.$$

Analogiškai gauname antrajam tašeliui (pav. 2):

$$l^2 = l'^2 + b_2^2 - 2l' b_2 \cos\beta,$$

$$b_2 = l' \cos\beta + \sqrt{l'^2 \cos^2\beta + l^2 - l'^2} =$$

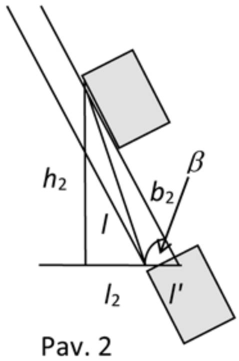
$$= l' \cos\beta + \sqrt{l^2 - l'^2 \sin^2\beta},$$

$$h_2 = b_2 \sin\beta = \sin\beta(l' \cos\beta + \sqrt{l^2 - l'^2 \sin^2\beta}),$$

$$l_2 = b_2 \cos\beta - l' =$$

$$= l' \cos^2\beta + \cos\beta\sqrt{l^2 - l'^2 \sin^2\beta} - l'$$

$$= \cos\beta\sqrt{l^2 - l'^2 \sin^2\beta} - l' \sin^2\beta.$$



Pav. 2

Tašeliai ir prizmė įgauna greičius $v = at$ ir $v' = a't$ bei nueina atstumus $l = l = at^2/2$ ir $l' = a't^2/2$. Kadangi tašelių ir prizmės masių centro padėtis horizontalia kryptimi nekinta, gauname

$$m_1 l_1 + m_2 l_2 = Ml'.$$

Iš energijos tvermės dėsnio gauname

$$g(m_2 h_2 - m_1 h_1) = \frac{(m_1 + m_2)v^2 + Mv'^2}{2}.$$

Atstumus ir greičius išreiškę per pagreičius ir suprastinę laiką gauname lygčių sistemą pagreičiams:

$$\begin{cases} m_1\left(\cos\alpha\sqrt{a^2 - a'^2\sin^2\alpha} - a'\sin^2\alpha\right) + m_2\left(\cos\beta\sqrt{a^2 - a'^2\sin^2\beta} - a'\sin^2\beta.\right) = Ma', \\ g[m_2\sin\beta(a'\cos\beta + \sqrt{a^2 - a'^2\sin^2\beta}) - m_1\sin\alpha(a'\cos\alpha + \sqrt{a^2 - a'^2\sin^2\alpha})] = (m_1 + m_2)a^2 + Ma'^2 \end{cases}$$

Pažymime:

$$x = \sqrt{a^2 - a'^2\sin^2\alpha}\,, \quad y = \sqrt{a^2 - a'^2\sin^2\beta},$$

$$a = \sqrt{\frac{x^2\sin^2\beta - y^2\sin^2\alpha}{\sin^2\beta - \sin^2\alpha}}, \quad a' = \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{\sin^2\beta - \sin^2\alpha}}.$$

Lygtys įgauna pavidalą

$$\begin{cases} m_1\cos\alpha\, x + m_2\cos\beta\, y = (M + m_1\sin^2\alpha + m_2\sin^2\beta.)\sqrt{\dfrac{x^2 - y^2}{\sin^2\beta - \sin^2\alpha}} \\ m_2\sin\beta y - m_1\sin\alpha x + (m_2\sin\beta\cos\beta - m_1\sin\alpha\cos\alpha)\sqrt{\dfrac{x^2 - y^2}{\sin^2\beta - \sin^2\alpha}} = \\ = \dfrac{m_1 + m_2}{g}\cdot\dfrac{x^2\sin^2\beta - y^2\sin^2\alpha}{\sin^2\beta - \sin^2\alpha} + \dfrac{M}{g}\cdot\dfrac{x^2 - y^2}{\sin^2\beta - \sin^2\alpha}. \end{cases}$$

Išraiškos griozdiškos, todėl įstatome skaitines vertes.

$$\begin{cases} 0{,}03\cos 20°\, x + 0{,}045\cos 40°\, y = (0{,}07 + 0{,}03\sin^2 20° + 0{,}045\sin^2 40°)\sqrt{\dfrac{x^2 - y^2}{\sin^2 40° - \sin^2 20°}} \\ 0{,}045\sin 40° y - 0{,}03\sin 20° x + (0{,}045\sin 40°\beta\cos 40° - 0{,}03\sin 20°\cos 20°)\sqrt{\dfrac{x^2 - y^2}{\sin^2 40° - \sin^2 20°}} = \\ = \dfrac{0{,}03 + 0{,}045}{9{,}8}\cdot\dfrac{x^2\sin^2 40° - y^2\sin^2 20°}{\sin^2 40° - \sin^2 20°} + \dfrac{M}{g}\cdot\dfrac{x^2 - y^2}{\sin^2 40° - \sin^2 20°} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0{,}0282x + 0{,}0345\, y = 0{,}169\sqrt{x^2 - y^2} \\ 0{,}0259y - 0{,}0103\, x + 0{,}0230\sqrt{x^2 - y^2} = 0{,}0348x^2 - 0{,}0271y^2. \end{cases}$$

Iš pirmos lygties gauname

$$0{,}167\; x + 0{,}204\, y = \sqrt{x^2 - y^2}$$

$$0{,}0279x^2 + 0{,}0681xy + 0{,}0416y^2 = x^2 - y^2,$$

$$y^2 + 0{,}0654xy - 0{,}933x^2 = 0,$$

$$y = -0{,}0327x + \sqrt{0{,}0327^2x^2 + 0{,}933x^2} = 0{,}934x.$$

Tada iš antrosios lygties

$$0{,}0259 \cdot 0{,}934x - 0{,}0103\,x + 0{,}0230\sqrt{x^2 - (0{,}934x)^2} = 0{,}0348x^2 - 0{,}0271 \cdot (0{,}934x)^2$$

$$x = 0{,}728\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2},\ y = 0{,}934 \cdot 0{,}728\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 0{,}680\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2},$$

$$a = \sqrt{\frac{0{,}728^2 \sin^2 40° - 0{,}680^2 \sin^2 20°}{\sin^2 40° - \sin^2 20°}} = 0{,}75\ \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right),$$

$$a' = \sqrt{\frac{0{,}728^2 - 0{,}680^2}{\sin^2 40° - \sin^2 20°}} = 0{,}48\ \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right).$$

Užduoties aiškinamąjį sprendimą pateikė jos autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2020 09 03.*

Turnyro dalyvių sprendimų aptarimas / FT9-12 ▼

Pirmąją ir antrąją užduoties dalis dauguma išsprendė, nors ne visi įsitikino, kad tašeliams slenkant prizmė nejudės. Trečiosios užduoties dalies pilnai neišsprendė niekas. Matyt, sudėtingoka matematika.

Užduoties sprendimų aptarimą parengė jos autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2020 09 03.*

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelė / FT9-12 ▼

Nr.	**Sprendimų vertinimo kriterijus**	**Vertė balais**
1.	Trinties koeficientas	2
2.	Pagreitis, kuriuo tašeliai slinks prizmės paviršiumi, jei prizmė nejudės	2
	Parodyta, kad prizmė nejudės	2
3.	Pagreitis, kuriuo slinks tašeliai	2
	Pagreitis, kuriuo slinks prizmė	2
4.	Pateikta ne pagal reikalavimus	-1
5.	Netikslumai (kiekvienam iš kriterijų Nr.1-3)	iki (-1)
Didžiausias galimas sprendimų įvertinimas		10

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelę parengė užduoties autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2020 09 03.*