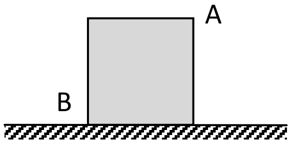
9-ASIS FIZIKOS TURNYRAS
7-oji užduotis Nr. FT9-7 / 2015 11 25 – 2015 12 22

Kubelio vartymas

***Sąlyga / FT9-7* ▼**

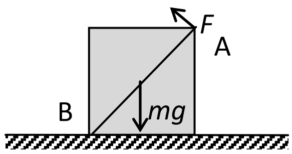


Ant šiurkštaus horizontalaus paviršiaus padėtas kubelis. Kubelio masė m = 4 kg, jo briaunos ilgis a = 10 cm.

1) Kokia mažiausia jėga veikiant kubelį briaunos A viduryje kubelis gali apvirsti per briauną B?
2) Kokiam mažiausiam trinties koeficientui tarp kubelio ir paviršiaus esant kubelis virs, o ne slys?
3) Koks bus virstančio kubelio kampinis greitis prieš pat atsitrenkiant į paviršių, jei pirmojoje užduotyje nustatyta jėga išliks pastovi?
4) Kokį greitį įgaus kubelio masės centras po smūgio į paviršių esant antrojoje užduotyje nustatytam trinties koeficientui, jei smūgis plastiškas ir trumpas, o deformacijos smūgio metu mažos?

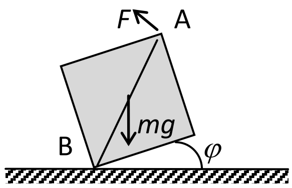
Užduotį parengė mokyklos „Fizikos olimpas” steigėjų tarybos narys, ilgametis mokyklos direktorius (11 m.) ir šio Fizikos turnyro užduočių parengimo spręsti ir jų sprendimų vertinimo komisijos pirmininkas prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.
▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2015 11 25.*

***Aiškinamasis sprendimas / FT9-7* ▼**



Kubelį veikia sunkio jėga mg ir išorinė jėga F. Kubelis pradės virsti, jei jėgos F sukurtas momentas M_F bus didesnis už sunkio jėgos sukurtą momentą $M_m = \frac{mga}{2}$. Didžiausią momentą M_F sukurs statmena atkarpai AB jėga. Taško B atžvilgiu gauname:

$$\frac{mga}{2} < Fa\sqrt{2},\ \ F > \frac{mg}{2\sqrt{2}},\ \ F > \frac{4\cdot 9{,}8}{2\sqrt{2}} = 13{,}9\ (\text{N}).$$



Kubeliui virstant M_m ir M_F kinta. Pasvirus kampu φ

$$M_m(\varphi) = \frac{mga}{\sqrt{2}}\cos(45° + \varphi) = \frac{mga}{2}(\cos\varphi - \sin\varphi),$$

$$M_F(\varphi) = \frac{mg}{2\sqrt{2}}a\sqrt{2}\cos\varphi = \frac{mga}{2}\cos\varphi.$$

Matome, kad bet kokiam kampui $0 < \varphi < \pi/2$ esant $M_F(\varphi) > M_m(\varphi)$, t.y., pradėjęs virsti kubelis toliau virs greitėdamas.

Kad kubelis ne slystų, o virstų, trinties jėga F_{tr} turi būti didesnė už kitų kubelį veikiančių jėgų horizontaliųjų dedamųjų sumą. Jėgos F horizontalioji dedamoji $F_h = F/\sqrt{2}$. Trinties jėga $F_{tr} = \mu N$, o kubelio prispaudimo prie paviršiaus jėga pradžioje yra

$$N = mg - \frac{F}{\sqrt{2}} = \frac{3mg}{4}.$$

Tada

$$F_{tr} = \mu\frac{3mg}{4} \geq F_h = \frac{mg}{4},\ \ \mu \geq 1/3.$$

Virsdamas kubelis įgauna kampinį greitį ω, todėl atsiranda išcentrinė jėga $F_\omega = m\omega^2 a/\sqrt{2}$, nukreipta išilgai tiesės, einančios per atramos tašką ir kubelio vidurį. Jei virsdamas kubelis nepradėtų slysti, prieš pat atsitrenkiant į paviršių ($\varphi = \pi/2$) jo kampinis greitis būtų maksimalus, išcentrinės jėgos kryptis sutaptų su F kryptimi. Apvirstant kubeliui jėga F atliktų darbą

$$A = \int_0^{\pi/2} F\cos\varphi \cdot a\sqrt{2}d\varphi = Fa\sqrt{2}.$$

Kadangi kubeliui apvirtus jo potencinės energijos pokytis lygus nuliui, jėgos F atliktas darbas virstų kubelio kinetine energija:

$$A = E_k = \frac{I\omega^2}{2},$$

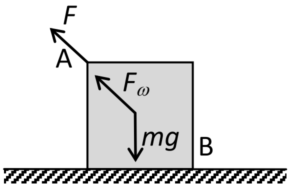
čia $I = 2ma^2/3$ yra kubelio inercijos momentas atramos taško B atžvilgiu. Tada

$$\omega^2 = \frac{2A}{I} = \frac{3\sqrt{2}F}{ma},$$

o išcentrinė jėga lygi

$$F_\omega = m\omega^2 \frac{a}{\sqrt{2}} = 3F.$$

Tada kubelio prispaudimo jėga



$$N = mg - \frac{F + F_\omega}{\sqrt{2}} = mg - \frac{\frac{mg}{2\sqrt{2}} + 3\frac{mg}{2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = 0.$$

Matome, kad prispaudimo jėga, o tuo pačiu – ir trinties jėga – išnyktų. Taigi, verčiamas kubelis pradės slysti prieš atsitrenkdamas į paviršių, esant tam tikram pasvyrimo kampui $0 < \varphi' < \pi/2$. Iki to momento jėga F atliks darbą

$$A' = \int_0^{\varphi'} F\cos\varphi \cdot a\sqrt{2}d\varphi = Fa\sqrt{2}\sin\varphi' = \frac{mga}{2}\sin\varphi',$$

kubelio potencinė energija pakis dydžiu

$$\Delta E'_p = mga\sqrt{2}\frac{\sin(45° + \varphi') - \sin 45°}{2} = mga\frac{\sin\varphi' + \cos\varphi' - 1}{2},$$

ir kubelis įgaus kinetinę energiją

$$E'_k = \frac{I\omega'^2}{2} = \frac{ma^2\omega'^2}{3}.$$

Iš energijos tvermės dėsnio gauname:

$$E'_k = A' - \Delta E'_p = \frac{mga}{2}(1 - \cos\varphi'),\quad \omega'^2 = \frac{3g}{2a}(1 - \cos\varphi').$$

Kubelį veiks išcentrinė jėga

$$F'_\omega = m\omega'^2\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{3mg}{2\sqrt{2}}(1 - \cos\varphi'),$$

jos horizontalioji $F'_{\omega h}$ ir vertikalioji $F'_{\omega v}$ dedamosios atitinkamai yra

$$F'_{\omega h} = F'_\omega\cos(45° + \varphi') = \frac{3mg}{4}(1 - \cos\varphi')(\cos\varphi' - \sin\varphi'),$$

$$F'_{\omega v} = F'_\omega\sin(45° + \varphi') = \frac{3mg}{4}(1 - \cos\varphi')(\cos\varphi' + \sin\varphi').$$

Tuo metu kubelio masės centras judės pagreičiu

$$w(\varphi') = [M_F(\varphi') - M_m(\varphi')]\frac{a}{I\sqrt{2}} = \frac{3g}{4\sqrt{2}}\sin\varphi'.$$

Jo horizontalioji ir vertikalioji dedamosios atitinkamai

$$w_h(\varphi') = w(\varphi')\cos(45° - \varphi') = \frac{3g}{8}\sin\varphi'(\cos\varphi' + \sin\varphi'),$$

$$w_v(\varphi') = w(\varphi')\sin(45° - \varphi') = \frac{3g}{8}\sin\varphi'(\cos\varphi' - \sin\varphi').$$

Kubelio prispaudimo prie paviršiaus jėga yra

$$N' = mg - \frac{F}{\sqrt{2}} - F'_{\omega v} + m\,w_v(\varphi') =$$

$$= \frac{3mg}{4}[1 - (1 - \cos\varphi')(\cos\varphi' + \sin\varphi') + \sin\varphi'(\cos\varphi' - \sin\varphi')/2].$$

Trinties jėga

$$F'_{tr} = \mu N' = \frac{N'}{3} = \frac{mg}{4}[1 - (1 - \cos\varphi')(\cos\varphi' + \sin\varphi') + \sin\varphi'(\cos\varphi' - \sin\varphi')/2].$$

Kad kubelis neslystų, trinties jėga turi atsverti horizontalia kryptimi veikiančią jėgą

$$F'_h = \frac{F}{\sqrt{2}} - F'_{\omega h} = \frac{mg}{4}[1 - 3(1 - \cos\varphi')(\cos\varphi' - \sin\varphi')].$$

Kubelis pradės slysti kai

$$F'_{tr} = F'_h - m\,w_h,$$

$$\frac{mg}{4}[1 - (1 - \cos\varphi')(\cos\varphi' + \sin\varphi') + \sin\varphi'(\cos\varphi' - \sin\varphi')/2] =$$

$$= \frac{mg}{4}[1 - 3(1 - \cos\varphi')(\cos\varphi' - \sin\varphi')] - m\frac{3g}{8}\sin\varphi'(\cos\varphi' + \sin\varphi').$$

$$\frac{mg}{4}[-(1 - \cos\varphi')(4\sin\varphi' - 2\cos\varphi') + \sin\varphi'(2\cos\varphi' + \sin\varphi')] = 0.$$

Gautąją lygtį sprendžiame apytiksliai stygų metodu. Pažymime

$$f(\varphi') = \frac{mg}{4}[-(1 - \cos\varphi')(4\sin\varphi' - 2\cos\varphi') + \sin\varphi'(2\cos\varphi' + \sin\varphi')]$$

ir sudarome lentelę

φ'	45	90	58	74	65	66,4	66,5	66,53
$f(\varphi')$	10,9	-26,2	6,0	-7,0	1,2	0,1	0,02	-0,003

Taigi, kubelis virsdamas pradeda slysti pasviręs kampu $\varphi' = 66{,}5°$. Toliau kubelis virsta slysdamas. Kadangi $\varphi' > 45°$, kubelis virsta ne tik dėl trinties jėgos bei jėgos F sukuriamo jėgos momento, bet ir sunkio bei pagrindo reakcijos jėgų sukuriamo jėgos momento, todėl prieš pat atsitrenkiant į paviršių kubelio kampinis greitis

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{2a}}, \quad \omega = \sqrt{\frac{3 \cdot 9{,}8}{2 \cdot 0{,}1}} = 12{,}1\ (\mathrm{s}^{-1}).$$

Kubelio pasvyrimo kampas pakis nuo φ' iki 90° jam virstant kampiniu pagreičiu

$$\varepsilon = \frac{3g}{2a}\sin\varphi$$

per laką τ. Per tą laiką kampinis greitis pakis nuo $\omega(\varphi')$ iki $\omega(90°)$

$$\omega(\varphi') = \sqrt{\frac{3g}{2a}(1-\cos\varphi')}\,,\ \ \omega(\varphi') = \sqrt{\frac{3\cdot 9{,}8}{2\cdot 0{,}1}(1-\cos 66{,}5°)} = 9{,}4\ (\mathrm{s}^{-1}),$$

$$\omega(90°) = 12{,}1\ \mathrm{s}^{-1}.$$

Imdami vidutinį kampinį pagreitį

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon(90°)+\varepsilon(\varphi')}{2} = \frac{3g}{4a}(1+\sin\varphi'),\ \ \bar{\varepsilon} = \frac{3\cdot 9{,}8}{4\cdot 0{,}1}(1+\sin 66{,}5°) = 141\ (\mathrm{s}^{-2})$$

įvertiname laiką τ:

$$\tau = \frac{\omega(90°)-\omega(\varphi')}{\bar{\varepsilon}},\qquad \tau = \frac{12{,}1-9{,}4}{141} = 0{,}021\ (\mathrm{s}).$$

Kubeliui pradedant slysti jo masės centro greičio horizontalioji dedamoji

$$v_h(\varphi') = \omega(\varphi')\frac{a}{\sqrt{2}}\cos(\varphi'-45°),\quad v_h(\varphi')$$
$$= 9{,}4\frac{0{,}1}{\sqrt{2}}\cos(66{,}5°-45°) = 0{,}62\ (\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}).$$

Kubelio masės centras slysta horizontaliu pagreičiu

$$w(\varphi) = \frac{F_h - F_{tr}}{m},\quad w(\varphi') = 0,\ \ w(90°) = \frac{g}{4} = 2{,}45\ (\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}).$$

Laikome, kad vidutinis pagreitis

$$\bar{w} = \frac{w(90°)+w(\varphi')}{2},\quad \bar{w} = \frac{2{,}45+0}{2} = 1{,}2\ (\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}).$$

Per laiką τ kubelio masės centro greičio horizontalioji dedamoji galėtų tapti

$$v_h(90°) = v_h(\varphi') + \bar{w}\tau,$$

$$v_h(90°) = 0{,}62 + 1{,}2\cdot 0{,}021 = 0{,}65\ (\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}).$$

Plastiško smūgio į paviršių metu vertikalioji dedamoji virsta nuliumi. Smūgio trukmę pažymime τ', jo metu veikiančią deformacijos sukurtą jėgą $F"(t)$. Tada:

$$\int_0^{\tau'} F"(t)dt = m\,\omega(90°)a/\sqrt{2}.$$

Horizontaliosios dedamosios pokytį smūgio metu lemia trinties jėga:

$$\Delta p_h = \int_0^{\tau'} F"_{tr}(t)dt = \int_0^{\tau'} \mu F"(t)dt = \mu m\,\omega(90°)a/\sqrt{2}.$$

Tada ieškomasis greitis

$$v" = v_h(90°) - \Delta p_h/m = v_h(90°) - \mu\omega(90°)a/\sqrt{2},$$

$$v" = 0{,}65 - \frac{1}{3}\cdot 12{,}1\cdot 0{,}1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}36\ (\mathrm{m/s}).$$

Užduoties aiškinamąjį sprendimą pateikė jos autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2020 08 25.*

Turnyro dalyvių sprendimų aptarimas / FT9-7 ▼

Pirmąją užduoties dalį beveik visi sprendusieji suprato ir išsprendė.

Antrojoje užduoties dalyje kai kas neatsižvelgė, kad kampu į horizontą veikianti jėga keičia kubelio svorį, o tuo pačiu – ir trinties jėgą.

Beveik niekas iš sprendusiųjų trečiąją dalį neatkreipė dėmesio į tai, kad kubeliui virstant kinta jo prispaudimo prie paviršiaus jėga, ir kubelis pradeda slysti.

Ketvirtojoje dalyje svarbu, kad slystančio kubelio masės centras prieš smūgį turi horizontalią dedamąją, kurią smūgio metu trinties jėga pakeičia.

Užduoties sprendimų aptarimą parengė jos autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2020 08 25*

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelė / FT9-7 ▼

Nr.	**Sprendimų vertinimo kriterijus**	**Vertė balais**
1.	Mažiausia jėga, kuriai veikiant briaunos A viduryje kubelis gali apvirsti per briauną B	2
2.	Mažiausias trinties koeficientas tarp kubelio ir paviršiaus, kai kubelis virsta, o ne slysta	2
3.	Pasvyrimo kampas, kuriam esant kubelis pradeda slysti	2
	Virstančio kubelio kampinis greitis prieš pat atsitrenkiant į paviršių	1
4.	Kubelio masės centro greitis prieš smūgį į paviršių	2
	Kubelio masės centro greitis po smūgio į paviršių	1
5.	Pateikta ne pagal reikalavimus	-1
6.	Netikslumai (kiekvienam iš kriterijų Nr.1-4)	iki (-1)
Didžiausias galimas sprendimų įvertinimas		10

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelę parengė užduoties autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2020 08 25.*