VINCAS KAMINSKAS, JONAS ALGIRDAS MARTIŠIUS

MATERIALAUS TAŠKO DINAMIKA

Paskaitų konspektas
ypatingai gabių mokinių
papildomojo ugdymo mokyklos
“Fizikos Olimpas” moksleiviams

FIZIKOS OLIMPAS
Vilnius 2001

UDK 531(075.3)
Ma618

Dėkojame ypatingai gabių mokinių papildomojo ugdymo mokyklos “Fizikos Olimpas” steigėjų tarybos pirmininkui Petrui Jonušui už iniciatyvą ir rūpestį leidžiant šį leidinį

Rinko ir maketavo mokyklos “Fizikos Olimpas” absolventas,
VU FF III k. studentas Rytis Juršėnas

Ypatingai gabių mokinių papildomo ugdymo mokykla „Fizikos olimpas“
Įstaigos kodas 9174341
Saulėtekio al. 9, III rūmai, LT-10222 Vilnius
Tel. 8-5 2698676, 8-686 13779, 8-698 20707
El. paštas olimpas@ff.vu.lt
Interneto svetainė www.olimpas.lt

ISBN 9986-778-10-7

DINAMIKA

Dinamika, kaip ir kinematika, yra mechanikos dalis. Jau kinematikos įvade rašėme, kad dinamika tiria jėgų veikiamų kūnų judėjimą. Jėga yra kūnų sąveikos matas. Kūnų sąveikų, tuo pačiu ir jėgų, yra įvairių. Apie tai kalbėsime vėliau. Apie kai kurių jėgų savybes Jūs jau mokėtės 8 klasėje. Jėgos suteikia kūnams pagreičius. Įvairius pagreičius nagrinėjome kinematikoje. Taigi, dabar susipažinsime su pagreičio atsiradimo priežastimi ir jo nustatymo būdais.
Pagrindinis dinamikos uždavinys yra, žinant veikiančias jėgas (drauge ir pagreičius), nustatyti jo judėjimą, t.y., rasti kūno greitį ir pagreitį erdvėje bet kuriuo laiko momentu, o taip pat ir trajektoriją. Kinematikoje dažnai ėjome priešinga kryptimi – žinodami kūno padėtį, skaičiavome jo greitį ir pagreitį. Šie du metodai vienas kitą papildo. Tačiau dinamika dažnai laikoma pagrindine mechanikos dalimi, nes ji daugiau atsako į klausimą „kodėl?“, kai tuo tarpu kinematikoje buvo atsakoma į klausimą „kaip?“.
Kuriant dinamikos mokslą, daugiausia pasidarbavo italų fizikas ir astronomas Galilėjas Galilėjus (Galileo Galilei), gyvenęs 1564-1642 metais ir anglų fizikas bei matematikas Izaokas Niutonas (Isaac Newton), gyvenęs 1643-1727 metais.

I. NIUTONO DĖSNIAI. ĮVAIRIOS JĖGOS

1.1 Niutono dėsniai

Išstudijavus užrašytą ilgaamžę kūnų judųjimo stebėjimų patirtį, atlikus naujų eksperimentų, G. Galilėjui, o daugiausia I. Niutonui, pavyko geriausiu būdu suformuluoti pagrindinius dinamikos dėsnius. Mes juos pateiksime pagal Zigmo Žemaičio veikalą „Izaokas Niutonas“, išleistą Kaune 1927 m., truputį paredagavę.

Pirmasis Niutono dėsnis: *kiekvienas kūnas stengiasi likti rimties arba tolyginio tiesiaeigio judėjimo būsenoje, jei (kol) veikiančios jėgos nepakeičia to būvio.*

Šis dėsnis dar vadinamas **inercijos dėsniu.** Dažnai sakoma, kad kiekvienas kūnas stengiasi judėti iš inercijos. Nejudėjęs kūnas pajuda, tik paveikus jėga, o judantį kūną sustabdyti galima taip pat veikiant jėga. Tai Jūs jau mokėtės 8 klasėje.

Antrasis Niutono dėsnis: *kūną veikiančioji jėga lygi jo masės ir pagreičio sandauai.* Analogiškai tai užrašoma matematiškai:

$$\vec{F} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{a} = \frac{1}{m}\vec{F}. \qquad (1)$$

Kadangi masė m yra teigiamas skaliarinis dydis, tai, remdamiesi vektorių savybėmis (žr. Kinematikos konspektą), galime teigti, kad pagreitis $\vec{a}$ visada turi tą pačią kryptį, kaip ir jėga $\vec{F}$ (čia visur kalbama apie greičius, žymiai mažesnius už šviesos greitį, t.y., neatsižvelgiama į reliatyvistinius efektus). Be to, $\vec{F}$ čia gali būti arba viena atskira kūną veikianti jėga, arba atskirų jėgų atstojamoji:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i. \qquad (2)$$

Kūno pagreitis $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ (žr. Kinematikos konspektą), todėl $m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$, nes Niutono arba klasikinėje mechanikoje kūno masė m=const.

Dydis

$$m\vec{v} = \vec{p} \qquad (3)$$

vadinamas **kūno judesio kiekiu.** Iš šio apibrėžimo matyti, kad kūno judesio kiekis $\vec{p}$ visada turi tą pačią kryptį, kaip ir greitis $\vec{v}$.

Taigi, $m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}$. Todėl (1) galima ir taip parašyti:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Leftrightarrow d\vec{p} = \vec{F}dt. \qquad (4)$$

Tai kitas II Niutono dėsnio pavidalas. Žodžiais jį būtų galima taip suformuluoti: *kūno judesio kiekio pokytis yra lygus veikiančios jėgos impulsui* (jėgos ir laiko sandauga vadinama jėgos impulsu). Toks formulavimas yra artimas paties Niutono tekstui.

Iš (4) matyti, kad kūną veikianti jėga $\vec{F}$ ir kūno judesio kiekis (impulsas) $\vec{p}$ gali turėti skirtingas kryptis, arba kampas tarp jėgos $\vec{F}$ ir greičio $\vec{v}$ gali būti bet koks.

(4) lygybėje $d\vec{p}$ yra nykstamai mažas impulso pokytis (diferencialas). Baigtinį pokytį gausime integruodami:

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt.$$

Kai jėga $\vec{F} = \overrightarrow{const.}$, gauname:

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \vec{F}(t_2 - t_1)$$

arba

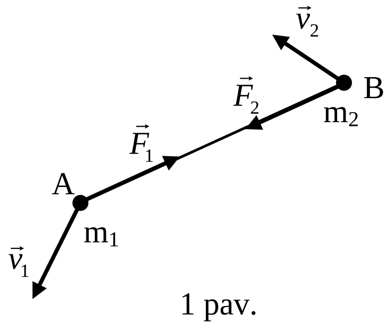
$$m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \vec{F}(t_2 - t_1). \qquad (5)$$

Ši lygybė žodžiais formuluojama panašiai, kaip ir (4): *judesio kiekio poktis per baigtinį laiką yra lygus jėgos impulsui per tą laiko tarpą.*

Trečiasis Niutono dėsnis: *dviejų kūnų sąveikos jėgos visuomet yra vienodo didumo, bet priešingų krypčų.*

Šis dėsnis dar vadinamas **veikimo ir atoveikio dėsniu.**

Čia jau reikia kalbėti apie du kūnus. Jei kūnas B veikia kūną A jėga $\vec{F}_1$, tai kūnas A veikia kūną B jėga



1 pav.

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1, \qquad F_2 = F_1. \qquad (6)$$

Būtina turėti galvoje, kad tos dvi jėgos (1 pav.) veikia skirtingus kūnus.

Niutono dinamikos dėsniai dažnai vadinami aksiomomis. Prie minėtų trijų aksiomų verta pridėti dar vieną.

Ketvirtoji dinamikos aksioma arba **jėgų nepriklausomybės principas:** *kai kūną tuo pačiu metu veikia keletas jėgų, tai kiekviena jų suteikia tokį pagreitį, kokį suteiktų veikdama viena.*

Kitaip tariant, kiekviena jėga suteikia pagreitį, kuris nepriklauso nuo to, ar tuo metu veikia kitos jėgos, ar ne. Tikras (atstojamasis) kūno pagreitis lygus pavienių jėgų suteiktų pagreičių sumai:

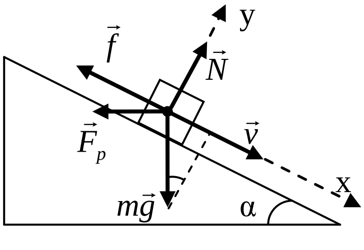
$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + ... + \vec{a}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i. \qquad (7)$$

Su tuo susijusi ir (2) lygybė.

Tarp aptartų dinamikos aksiomų svarbiausiu dažnai vadinamas II Niutono dėsnis.

Pratybos

1. Remdamiesi (7) lygybe ir II Niutono dėsniu, gaukite (2) lygybę.
2. Masės m tašelis, padėtas ant nuožulnios plokštumos, kurios polinkio kampas α, slysta žemyn greičiu v.



2 pav.

Horizontali oro srovė veikia tašelį jėga $\vec{F}_p$ (2 pav.).

Koks turi būti trinties tarp tašelio ir plokštumos koeficientas μ, kad tašelio greitis v būtų pastovus?

Sprendimas

Pažymėkime trinties jėgą $\vec{f}$. Tuomet, remdamiesi kinematikos 1.2 paragrafo pratybų 2 uždaviniu, rašome:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{f} + \vec{N} + \vec{F}_p.$$

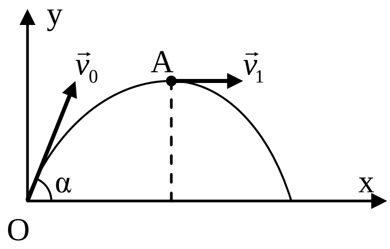
Šią lygybę projektuojame į x ir y ašis:

$$\begin{cases} ma_x = mg\sin\alpha - f - F_p\cos\alpha, \\ ma_y = -mg\cos\alpha + N - F_p\sin\alpha. \end{cases}$$

Be to, $f = \mu N,\ a_x = a_y = 0.$ Iš čia ieškomasis trinties koeficientas

$$\mu = \frac{mg\sin\alpha - F_p\cos\alpha}{mg\cos\alpha + F_p\sin\alpha}.$$

Kai $F_p = 0 \Rightarrow \mu = \tan\alpha.$



3 pav.

3. Raskite visų sviedinį veikiančių jėgų atstojamosios impulsą per laiką, kol sviedinys iš pradinės padėties O pasiekė aukščiausią tašką A (3 pav.). $v_0 = 500 m/s, \alpha = 60^0, v_1 = 200 m/s$, $m = 100 kg$.

Ats.: $p_x = m(v_1 - v_0\cos\alpha), p_y = -mv_0\sin\alpha.$

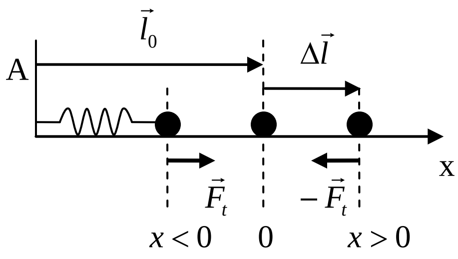
Dar reikia apskaičiuoti ir gauti p.

1.2 Įvairios jėgos

Jėgų priežastis yra kūnų tarpusavio sąveika. Šiuolaikinė fizika žino keletą sąveikos rūšių: **gravitacinę, elektromagnetinę, stipriąją, silpnąją.** Gal daugiausia išnagrinėta gravitacinė arba visuotinės traukos sąveika, kurią nustatė dar I. Niutonas. Ji veikia tarp kūnų, turinčių masę. Masę turi visi dangaus kūnai, visi kūnai Žemėje. Dėl to gravitacinė sąveika ir vadinama visuotinės traukos sąveika. Masę turi ir daugelis elementariųjų dalelių, bet visuotinės traukos jėgos tarp jų yra nykstamai mažos, palyginus su kitomis jėgomis. Elektromagnetinės jėgos veikia tarp įelektrintų kūnų ir dalelių. Kai įelektrinti kūnai vienas kito atžvilgiu nejuda, tarp jų veikia tik elektrinės jėgos, o kai juda, prisideda dar viena jėga – magnetinė. Elektromagnetinės jėgos veikia tarp atomą sudarančių įelektrintų dalelių, tarp atomų molekulėje ir kt. Mechanikoje dažnai sutinkamos tamprumo ir trinties jėgos taip pat yra elektromagnetinės prigimties. Taigi jėgų rūšys persipina priklausomai nuo to, kaip mes jas skirstome. Minėtos stipriosios jėgos veikia tarp atomų branduolius sudarančių elementariųjų dalelių, nebūtinai įprastinių atomų branduoliuose. Stipriąsias jėgas mokslas jau nemažai ištyrė, išmoko gauti atominę energiją, pavyzdžiui, Ignalinos atominėje elektrinėje. Silpnosios jėgos pasireiškia tarp dalies elementariųjų dalelių, joms sąveikaujant, vienoms virstant kitomis. Tai mažiausiai ištirtos jėgos.
Aptarsime konkrečiau pagrindines vid. mokyklos kurse nagrinėjamas jėgas.

Tamprumo jėgos

Pagal **Huko (Hooke) dėsnį** deformuoto kūno (pvz., spyruoklės) tamprumo jėga proporcinga kūno deformacijai ir nukreipta priešinga jai kryptimi. (Robertas Hukas – anglų fizikas, gyvenęs 1635-1703 metais).



4 pav.

Pažymėkime nedeformuotos spyruoklės ilgį vektoriumi $\vec{l}_0$, išvestu iš įtvirtinimo taško A, o spyruoklės deformaciją vektoriumi $\Delta\vec{l}$ (4 pav.). Prie spyruoklės galo pritvirtintą kūną (rutuliuką) veikianti tamprumo jėga pagal Huko dėsnį:

$$\vec{F}_t = -k\Delta\vec{l}. \qquad (1)$$

Proporcingumo koeficientas k vadinamas tamprumo koeficientu (spyruoklės standumas). Kiekvienai spyruoklei jis skirtingas. Iš (1) matome, kad standumo k dimensija yra N/m.

Suprojektuokime (1) lygybę į x ašį, kurios pradžios taškas 0 yra kūno pusiausvyros padėtyje. Išvesto iš pusiausvyros padėties kūno koordinatę pažymėkime x. Tada gausime:

$$(F_t)_x = -kx. \qquad (2)$$

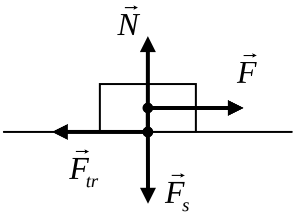
Ši lygybė tinka suspaustos ir ištemptos spyruoklės atvejais, nes ištemptai spyruoklei $(F_t)_x < 0, x > 0$, o suspaustai spyruoklei $(F_t)_x > 0, x < 0$.

Dažnai vietoje $(F_t)_x$ rašoma trumpiau – F_t arba F, o vietoje x – Δx.

Siūlome patiems įsitikinti, kad (2) lygybė bu teisinga ir pakeitus x ašies kryptį į priešingą.

Be to, reikia pastebėti, kad Huko dėsnis galioja nedidelėms (grįžtamoms) deformacijoms.

Trinties jėgos



5 pav.

Jeigu ant kokio nors paviršiaus gulintį kūną traukiame arba stumiame jėga $\vec{F}$, o kūnas nejuda, tai reiškia, kad tas paviršius veikia kūną jėga $\vec{F}_{tr}$, kuri kompensuoja traukiančią jėgą. Todėl

$$\vec{F} + \vec{F}_{tr} = \vec{0},$$

o jų didumai patenkina lygybę:

$$F = F_{tr}. \qquad (3)$$

Jėga F_{tr} vadinama **rimties trinties jėga.** Iš (3) lygybės matyti, kad traukiančiai arba stumiančiai jėgai didėjant, rimties trinties jėga taip pat didėja. Taip bus tol, kol kūnas nepajudės. Tada rimties trinties jėga bus didžiausia. Bandymais nustatyta (pirmasis tai atliko Kulonas), kad didžiausia rimties trinties jėga

$$(F_{tr})_{\max} \approx \mu N. \qquad (4)$$

Dar toliau didinant veikiančiąją jėgą F, kūnas slysta greitėdamas, bet trinties jėga daugiau nedidėja. Ji lieka tokio didumo, kaip (4) lygybėje ir vadinama **slydimo trinties jėga.** Pažymėkime ją f. Taigi

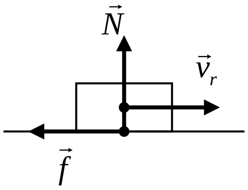
$$f = \mu N. \qquad (5)$$

Koeficientas μ vadinamas **trinties koeficientu.** Jis priklauso tik nuo besitrinančių kūnų paviršių savybių ir nurodomas lentelėse. Iš (5) formulės matyti, kad trinties koeficientas μ yra bedimensinis dydis. Paprastai $\mu < 1$.

Jėga N (žr. 5 pav.) vadinama slėgimo jėga arba paviršiaus, kuriuo slysta kūnas, **statmenoji reakcijos jėga.** Ji visada statmena sąlyčio paviršiui. Kai paviršius horizontalus (5 pav.), $N=F_s=mg$. Tačiau, kai paviršius pasviręs arba šliaužiantį kūną veikia kokia nors papildoma jėga (pvz., jau išnagrinėtas 2 pav.), reakcijos jėga N nelygi sunkio jėgai $F_s=mg$. Tai reikia gerai įsidėmėti. Net 5 pav. atveju, jeigu tik traukiančioji jėga F nebus horizontali, jėga N nebus lygi mg. Įsitikinkite tuo patys.
(5) lygybė teisinga tik vektorių didumams. Tačiau vektorius

$$\vec{f} \neq \mu\vec{N}, \qquad (6)$$

nes $\vec{f} \perp \vec{N}$.



6 pav.

Slydimo trinties jėga $\vec{f}$ visada nukreipta prieš kūno slydimo tuo paviršiumi greičio kryptį, t.y., reliatyviojo greičio $\vec{v}_r$ kryptį (6 pav.). Todėl slydimo trinties jėgos vektorių galima parašti:

$$\vec{f} = -\mu N \frac{\vec{v}_r}{|\vec{v}_r|}. \qquad (7)$$

Siūlome tuo įsitikinti, remiantis kinematikos konspekte aptarta vienetinio vektoriaus sąvoka.

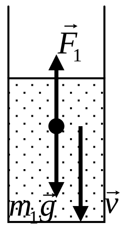
Aplinkų pasipriešinimo jėgos

Kūnus, judančius dujose arba skysčiuose, veikia tų aplinkų pasipriešinimo jėgos. Jos priklauso nuo kūnų formos, greičio v ir aplinkų savybių. Kaip ir slydimo trinties jėga, tos jėgos nukreiptos prieš greičio kryptį. Mažų greičių atveju aplinkų pasipriešinimo jėgos proporcingos greičiui, didesnių greičių atveju – greičio kvadratui. Didelių greičių atveju priklausomybės dar sudėtingesnės. Analogiškai (7) lygybei pirmiems dviem atvejams tos jėgos gali būti išreikštos taip:

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &= -k_1\vec{v}, \\ F_1 &= k_1 v. \end{aligned} \qquad (8)$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_2 &= -k_2 v^2 \frac{\vec{v}}{v} = -k_2 v\vec{v}, \\ F_2 &= k_2 v^2. \end{aligned} \qquad (9)$$

Koeficientai k_1 ir k_2 kiekvienam kūnui ir kiekvienoms dujoms ar skysčiams yra kitokie. Koeficientas k_1 matuojamas kg/s, o koeficientas k_2 – kg/m. Aplinką, kurioje kūnas juda, laikome nejudančia, todėl (8) ir (9) nebūtina nurodyti, kad v – reliatyvus greitis.
Iš (8) ir (9) matyti, kad greičiui didėjant, pasipriešinimo jėgos didėja. Klampesniame skystyje, dar esant pasipriešinimo jėgai, proporcingai greičio pirmajam laipsniui (7 pav.), ji susilygina su kūno sunkiu mg (atsižvelgus į Archimedo jėgą), ir greitis tampa pastovus.

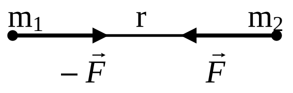


7 pav.

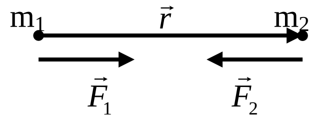
Iššokus didesniame aukštyje iš lėktuvo, žmogaus greitis nusistovi, esant pasipriešinimo jėgai, proporcingai greičio kvadratui. Išskleidus parašiutą, koeficientas k_2 žymiai padidėja, ir nusistovi jau nepavojingas gyvybei nedidelis greitis. Nusistovi ir nuo aukštesnių kalnų besileidžiančių slidininkų greičiai.

Visuotinės traukos jėga

Tą jėgą nusako I. Niutono ir R. Huko nustatytas **visuotinės traukos dėsnis:** *du kūnai traukia vienas kitą jėga, kurios didumas tiesiog proporcingas jų masių sandaugai ir atvirkščiai proporcingas atstumo tarp jų kvadratui.*



8 pav.



9 pav.

Jeigu kūnų masės m_1 ir m_2, o atstumas tarp jų r, tai visuotinės traukos jėgos didumas (8 pav.):

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}. \qquad (10)$$

Koeficientas G vadinamas **visuotinės traukos** arba **gravitacine konstanta.** Be to, $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{N\cdot m^2}{kg^2}$. Ją dar dažnai žymi raide Tai viena svarbiausių gamtos konstantų. Tokios svarbios konstantos dar yra šviesos greitis vakuume c, elementarusis krūvis e, Planko konstanta h, elektrono rimties masė m_e.

Parašykime visuotinės traukos dėsnį vektoriškai. Jėgą, kuria m_1 masės kūnas traukia m_2 masę, pažymėkime $\vec{F}_2$ (9 pav.). Tada, panašiai, kaip (7) ir (9) lygybės,

$$\vec{F}_2 = -G\frac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r}. \qquad (11)$$

Jėga, kuria m_2 masė traukia m_1 masę, yra $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2; F_1 = F_2 = F$.

Visuotinės traukos dėsnis tinka, kai sąveikaujančios masės yra taškiniai kūnai arba vienalyčiai rutuliai (tada atstumas r yra tarp rutulių centrų ir turi būti didesnis už rutulių radiusą), arba atstumas r yra daug didesnis už sąveikaujančių kūnų matmenis. Jis tinka, kai kūnai nejuda ir kai juda, kai jie yra vakuume arba bet kokioje aplinkoje.

Sunkio jėga

Tai **jėga, kuria Žemė traukia kūną, esantį jos paviršiuje.** Pažymėkime kūno masę m, Žemės masę bei radiusą M ir R. Tada pagal (10) sunkio jėga

$$F_s = G\frac{mM}{R^2}. \qquad (12)$$

Sunkio jėgos suteikiamą kūnui pagreitį žymi raide g. Todėl pagal II Niutono dėsnį:

$$F_s = mg. \qquad (13)$$

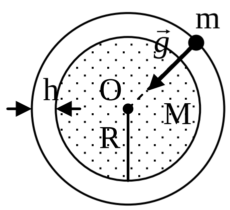
Iš (12) ir (13) gauname:

$$g = \frac{GM}{R^2}. \qquad (14)$$

Taigi, pagreitis g nuo kūno masės m nepriklauso. Visų kūnų jis yra vienodas (neatsižvelgiant į aplinkos pasipriešinimą) ir vadinamas **laisvojo kritimo pagreičiu.** Dėl Žemės suplojimo, sukimosi ir tankio nedidelio nevienodumo Žemės plutoje laisvojo kritimo pagreitis įvairiose vietose šiek tiek skiriasi. Be to, turi nedidelę įtaką ir kiti dangaus kūnai. Skaičiuojant 3 ženklų tikslumu, taip pat matuojant, ašigaliuose $g \approx 9{,}83 m/s^2$, pusiaujyje $g \approx 9{,}78 m/s^2$. Lietuvoje g svyruoja nuo $9{,}813 m/s^2$ Druskininkuose iki $9{,}816 m/s^2$ Mažeikiuose. Didesniu tikslumu išmatuota g vertė dažnai laikoma paslaptyje, nes tai susiję su žemės gelmių turtais.
Vektoriškai (13) lygybę parašysime:

$$\vec{F}_s = m\vec{g}. \tag{15}$$

Pagreičio $\vec{g}$ kryptis yra tikrosios vertikalės kryptimi. Ašigaliuose ir pusiaujyje ji sutampa su Žemės spinduliu (nukreipta į Žemės centrą), o 45^0 geografinėje platumoje $\vec{g}$ kryptis su Žemės spinduliu sudaro 6 minučių kampą. Labai tiksliai skaičiuojant, į tai reikia atsižvelgti.



10 pav.

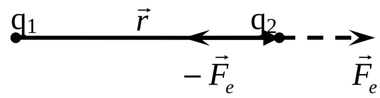
Tai, kas pasakyta apie sunkio jėgą F_s ir laisvojo kritimo pagreitį g, tinka ne tik prie pat Žemės paviršiaus, bet ir nedideliuose aukščiuose h virš Žemės paviršaus. Didesniuose aukščiuose, kai h nėra nykstamai mažas, palyginus su Žemės spinduliu R (10 pav.), vietoje (12) lygybės reikia rašyti:

$$F_s = G\frac{mM}{(R+h)^2},$$

o vietoje (14):

$$g = \frac{GM}{(R+h)^2}. \tag{16}$$

Elektrinė jėga



11 pav.

Tarp dviejų taškinių elektros krūvių q_1 ir q_2 veikiančios jėgos didumas nusakomas visai analogiškai visuotinės traukos dėsniui (10). Elektrinės jėgos didumas

$$F_e = K\frac{q_1 q_2}{r^2}. \tag{17}$$

Koeficientas K priklauso nuo medžiagos aplinkos. Kai krūviai priešingų ženklų, elektrinė jėga yra traukos jėga; kai krūviai vienodų ženklų (abu teigiami ar neigiami), tai jėga yra stūmos. (17) lygtimi parašytas dėsnis vadinamas **Kulono dėsniu.** Vektoriškai Kulono dėsnį galime parašyti pagal analogiją su (11) lygybe. Elektrinė jėga, kuria krūvis q_1 veikia krūvį q_2 (11 pav.):

$$\vec{F}_e = K\frac{q_1 q_2}{r^3}\vec{r}. \tag{18}$$

Kai krūviai peižšingų ženklų, $q_1 q_2 < 0$, kai vienodų, $q_1 q_2 > 0$.

Įvedus elektrinio lauko stiprio $\vec{E}$ sąvoką, elektrinę jėgą galima taip išreikšti: taškinį krūvį q veikianti jėga

$$\vec{F}_e = q\vec{E}. \tag{19}$$

Mat, elektrinio lauko stipriu $\vec{E}$ vadinama jėga, kuri tame taške veikia vienetinį teigiamą krūvį. Kai $q > 0$, jėga $\vec{F}_e$ nukreipta $\vec{E}$ kryptimi; kai $q < 0$, priešinga kryptimi.

Magnetinė jėga

Elektros krūvį, esantį magnetiniame lauke, jėga veikia tik tada, krūvis tame lauke juda. Magnetinė jėga

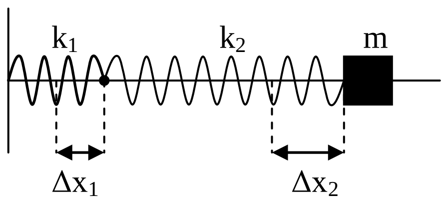
$$\vec{F}_m = q\left[\vec{v}, \vec{B}\right]. \tag{20}$$

Čia v – krūvio greitis; B – magnetinė indukcija. Magnetinės indukcijos sąvoka nagrinėjama elektrodinamikoje. Prisiminę iš kinematikos vektorių vektorinės sandaugos sąvoką, matome, kad magnetinė jėga $\vec{F}_m \perp \vec{v}$, $\vec{F}_m \perp \vec{B}$. F_m=0 ne tik, kai v=0, bet ir kai kampas tarp $\vec{v}$ ir $\vec{B}$ lygus 0 arba 180^0. Kai kampas tarp vektorių $\vec{v}$ ir $\vec{B}$ yra 90^0, magnetinė jėga yra maksimali.
Kai elektros krūvis juda erdvėje, kurioje yra magnetinis ir elektrinis laukai, tai pagal (19) ir (20) lygtis jį veikia jėga

$$\vec{F}_L = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q\left(\vec{E} + \left[\vec{v}, \vec{B}\right]\right). \tag{21}$$

Ši jėga vadinama **Lorenco jėga,** tačiau dažnai Lorenco jėga vadinama ir jos magnetinė dalis.

Pratybos



12 pav.

1. Dvi lengvos spyruoklės, kurių standumai k_1 ir k_2, sujungtos nuosekliai (žr. 12 pav.). Koks visos sujungtinės spyruoklės standumas k?
Sprendimas
Pakabinus prie sujungtinės spyruoklės kokį nors m masės kūną, abi spyruoklės pailgės. Pažymėję jų pailgėjimus Δx_1 ir Δx_2, rašome:

$$k_1\Delta x_1 = k_2\Delta x_2 = k\left(\Delta x_1 + \Delta x_2\right).$$

Mat spyruoklės įtempimas visur vienodas, o sujungtinės spyruoklės pailgėjimas $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2$. Iš parašytų sąryšių gauname, kad ieškomas

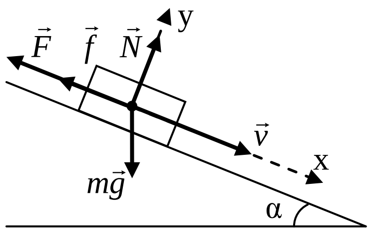
$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

$$\Rightarrow k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}.$$

2. Raskite slydimo trinties jėgą f praeito 1.1 paragrafo pratybų 2 uždavinyje.
3. Per greitojo nusileidimo varžybas slidininkas leidžiasi α=45 ^{0} statumo kalno šlaitu, neatsistumdamas lazdomis. Slidžių trinties su sniegu koeficientas μ=0,1. Įsibėgėjus oro pasipriešinimo jėga apytiksliai proporcinga greičio kvadratui ir proporcingumo koeficientas $k = 0{,}0635 \cdot 9{,}81 kg/m$. Slidininko su slidėmis masė m=90kg. 1) Kokį didžiausią greitį įgis slidininkas? 2) Kiek padidėtų didžiausias greitis, jei, parinkęs

geresnį tepalą, slidininkas sumažintų trinties koeficientą 2 kartus? 3) Kaip tas greitis pasikeistų, jeigu slidininko masė sumažėtų 2 kartus?

Sprendimas



13 pav.

Pažymėkime slidininką veikiančias jėgas: mg – sunkis; f – slydimo trintis; F – oro pasipriešinimas; N – sniego reakcijos jūga. Kai greitis v yra maksimalus, pagreitis a=0. Todėl

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{f} + \vec{F} = \vec{0}.$$

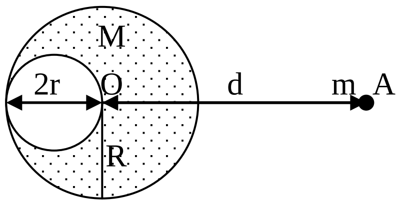
Suprojektavę į x ir y ašis, gausime:

$$\begin{cases} mg\sin\alpha - f - F = 0, \\ -mg\cos\alpha + N = 0. \end{cases}$$

Be to, $f = \mu N$, $F = kv_{\max}^2$. Iš tų lygybių gauname:

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{k}}.$$

Apskaičiavus: 1) $v_{\max} = 30{,}0 m/s = 108 km/h$; 2) $v_{\max} = 30{,}9 m/s = 111 km/h$; 3) $v_{\max} = 21{,}2 m/s = 76 km/h$.



14 pav.

4. R spindulio ir M masės rutulyje padaryta ertmė, kurios radiusas r=R/2 (14 pav.). Nedideliu atstumu d nuo rutulio yra nedidelis kūnas A, kurio masė m. Raskite visuotinės traukos jėgą F tarp šių taškų.

Ats.: $F = GmM\left(\frac{1}{d^2} - \frac{1}{8\left(d + \frac{R}{2}\right)^2}\right)$.

1.3 Inercinės atskaitos sistemos

Kalbėdami apie Niutono dėsnius, kol kas nekėlėme klausimo, ar visose atskaitos sistemose tie dėsniai galioja, ar yra tokių sistemų, kuriose jie negalioja. Pasirodo yra! Apie tokias sistemas kalbėsime kitame skyriuje, o dabar pasakysime, kad tokios atskaitos sistemos ir su jomis susietos koordinačių sistemos, kuriose galioja Niutono dėsniai, vadinamos inercinėmis atskaitos sistemomis. Tolesniam svarstymui mums pakaks II Niutono dėsnio. Taigi, tegul yra žinoma, kad koordinačių sistemoje K galioja II Niutono dėsnis:

$$\vec{F} = m\vec{a}. \qquad (1)$$

Tai, kaip žinome, pagrindinė mechanikos lygtis. Kai ta lygtis galioja, tai bet koks pagreitis gali atsirasti, tiktai paveikus kitiems kūnams. Labai gera inercinė sistema, yra sistema, susieta su žvaigždėmis danguje. Palyginti nebloga inercinė sistema yra Žemė.

Tegul sistema K\` juda nesisukdama inercinės sistemos K atžvilgiu tiesia linija ir pastoviu greičiu $\vec{v}$ . Tuomet (pagal Kinematikos 3.1 paragrafą) nagrinėjamo kūno arba materialaus taško pagreitis sisetmoje K\` bus toks pat, kaip ir sistemoje K.

Pažymėkime tą pagreitį $\vec{a}'$. Tuomet $\vec{a}' = \vec{a}$. Tegul sistemos K` greičio didumas $v << c$. Tuomet masė sistemoje K` bus tokia pati, kaip ir sistemoje K, t.y., m`=m. Tai patvirtina ilgaamžė žmonijos patirtis. Sistemoje K` kūną veikianti jėga $\vec{F}'$ taip pat lygi sistemoje K veikiančiai jėgai $\vec{F}$, nes atskaitos (koordinačių) sistemos pakeitimas kūnų sąveikos nepakeičia (čia nekalbama apie kvantinius efektus). Turėdami omenyje tai, kas anksčiau pasakyta, galime tvirtinti, kad pagrindinė mechanikos lygtis sistemoje K`:

$$\vec{F}' = m'\vec{a}' \tag{2}$$

visiškai sutampa su pagrindine mechanikos lygtimi sistemoje K. Todėl sistema K` bus taip pat inercinė. Remdamiesi Kinematikos 1.3 paragrafu, galime sakyti, kad tolių sistemų K` gali būti kaip norima daug. Kartojame, kad tai bus visos sistemos, kurios juda pastoviais greičiais ir tiesia linija inercinės sistemos K atžvilgiu. Visose jose galios ta pati pagrindinė mechanikos lygtis, visose jose vyks vienodi mechaniniai procesai. Tuo remiantis, mechanikoje formuluojamas **Galilėjaus reliatyvumo principas: visi mechaniniai reiškiniai visose inercinėse sistemose vyksta vienodai.** Pavyzdžių, patvirtinančių to principo teisingumą, yra kiekviename vadovėlyje. Pabandykime ir mes tą principą pailiustruoti. Pvz., jeigu krepšininkas sėkmingai mėto baudas Kauno sporto halėje, tai visai taip pat galės sėkmingai jas mėtyti ir salėje, įrengtoje tiesiaeigiai ir tolygiai plaukiančiame laive. Stalo tenisas bus vienodai žaidžiamas ir viloje Palangoje, ir važiuojančiame traukinyje arba net skrendančiame lėktuve. Nesvarumo reiškiniai kosminiame laive bus tie patys, ar laivas, būdamas toli nuo Žemės, stovės vietoje, pvz., Žemės atžvilgiu, ar tols nuo jos pastoviu greičiu.

Visose inercinėse sistemose visai vienodai galima atlikti įvairius mechaninius bandymus, pavyzdžiui, mokyklinius laboratorinius darbus. Kartais sunku ir atskirti, kuri inercinė sistema juda, o kuri stovi vietoje. Visi žinom, kaip dažnai susidaro įspūdis, žiūrint pro vagono langą, kad važiuoja kitas traukinys, o ne tas, kuriame sėdite Jūs. Stovint ant tilto ir žiūrint į upę plaukiantį ledą, netrunka susidaryti įspūdis, kad juda ne ledas, o tiltas ir panašiai.

Pereinant iš vienos inercinės sistemos į kitą, materialaus taško koordinatės transformuojamos pagal Galilėjaus koordinačių transformacijos formules (Kinematikos 3.1 paragrafas), nes tos formulės taip pat gaunamos, kai sistema K` sistemos K atžvilgiu juda tiesia linija ir pastoviu greičiu. Taško pagreitis pagal apibrėžimą priklauso nuo taško koordinačių. Tačiau mes parodėme, kad, koordinates transformuojant pagal Galilėjaus koordinačių transformacijas, pagreitis nesikeičia, ir tą pagreičio savybę vadinome invariantiškumu. Galima sakyti, kad pagreitis yra invariantas Galilėjaus koordinačių transformacijos atžvilgiu. Kartais sakoma, kad dėl to pagreitis yra absoliutus inercinėse sistemose, o greitis nėra absoliutus; greitis yra reliatyvus ir transformuojasi pagal Kinematikos 3.1 paragrafe esančias lygtis. Be to, dabar, remdamiesi pirmuoju šios pastraipos sakiniu, matome, kad dėl Galilėjaus koordinačių transformacijos nesikeičia pagrindinė dinamikos ir apskritai mechanikos lygtis (1). Tokia lygčių savybė vadinama **kovariantiškumu** (invariantiškumo sąvoka daugiau naudojama tada, kai kalbama apie vieno kurio nors dydžio nesikeitimą, o ne apie nesikeitimą lygčių, į kurias gali įeiti keli dydžiai). Todėl sakoma, kad **dinamikos dėsniai yra kovariantiški Galilėjaus koordinačių transformacijos atžvilgiu.**

Pagrindiniai dinamikos dėsniai buvo suformuluoti XVII a. Kaip žinoma, šioje srityje daug padarė italų fizikas Galilėjas Galilėjus ir įžymus anglų fizikas Izaokas Niutonas. Vėliau, XIX a. buvo nustatyti pagrindiniai elektrinių ir magnetinių reiškinių dėsniai

(M. Faradėjus, Dž. K. Maksvelas). Susiformavo elektrodinamikos mokslas, kurio pagrindinės lygtys vadinamos Maksvelo-Lorenco lygtimis. Reliatyvumo teorijoje (A. Einšteinas) parodoma, kad Maksvelo-Lorenco lygtys yra kovariantiškos Lorenco koordinačių transformacijos atžvilgiu (Kinematikos 3.2 paragrafas) ir nėra kovariantinės Galilėjaus koordinačių transformacijos atžvilgiu. Taigi, tolesnį fizikos vystymąsi skatino ne tik optinių, bet ir magnetinių bei elektrinių reiškinių tyrimas. XX a. pradžioje Galilėjaus reliatyvumo principas buvo patikslintas, apimant ne tik mechaninius, bet ir apskritai visus fizikinius reiškinius. Toks apibendrintas principas vadinamas **Einšteino reliatyvumo principu.** Tai pagrindinis reliatyvumo teorijos principas, tačiau jo nagrinėjimas neįeina į mūsų programą.

Praeituose 1.1 ir 1.2 paragrafuose jau išsprendėme keletą dinamikos uždavinių. Tai padarėme inercinėse atskaitos sistemose. Apie kitokias (neinercines) sistemas kalbėsime vėliau, o dabar pabrėšime, kad inercinėse atskaitos sistemose galima spręsti visus dinamikos uždavinius. Juos sprendžiant, svarbu mokėti nustatyti ir nubrėžti kūną veikiančias jėgas ir jų atstojamąją, žinoti dažniausiai sutinkamų jėgų savybes, o taip pat konkrečiais atvejais taikyti visus tris Niutono dėsnius.

Kai veikiančios jėgos yra pastovios, iš II Niutono dėsnio darome išvadą, kad pagreitis $\vec{a} = \frac{1}{m}\vec{F}$ taip pat yra pastovus. Tuomet, įrašę tą pagreičio išraišką į Kinematikos 2.4 paragrafo (19) lygtį, gauname:

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \vec{F}\dfrac{t^2}{2m}, \\ \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{F}\dfrac{t}{m}. \end{cases} \tag{3}$$

Parašysime dar tas lygtis Dekarto koordinatėse. Projektuodami (3) lygtis, turime:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x} t + F_x \dfrac{t^2}{2m}, \\ y = y_0 + v_{0y} t + F_y \dfrac{t^2}{2m}, \\ z = z_0 + v_{0z} t + F_z \dfrac{t^2}{2m} \end{cases} \tag{4}$$

ir

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} + F_x \dfrac{t}{m}, \\ v_y = v_{0y} + F_y \dfrac{t}{m}, \\ v_z = v_{0z} + F_z \dfrac{t}{m}. \end{cases} \tag{5}$$

(3), (4) ir (5) labai gerai naudoti, norint nustatyti judančio kūno padėtį ir greitį bet kuriuo metu. Dar kartą kartojame, kad šios lygtys tinka, kai F=const.

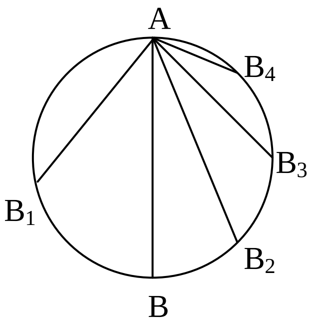
Sprendžiant kreivaeigio judėjimo uždavinius, neretai būna naudinga jėgas projektuoti į trajektorijos lietėją ir normalę.

Kai turime ne vieną, o kelis kūnus, dažnai būna naudinga II Niutono dėsnį taikyti kuriam nors kūnui atskirai. Neretai patogu naudotis energijos, impulso ir judesio kiekio momento tvermės dėsniais bei II Niutono dėsniu, užrašytu šia forma:

$$\vec{F} = \frac{m}{t}\left(\vec{v} - \vec{v}_0\right). \qquad (6)$$

Tą patį, kiek kitaip esame parašę 1.1 paragrafe. Visų pastabų apie dinamikos uždavinių sprendimą surašyti neįmanoma. Svarbiausia įgyti įgūdžių juos sprendžiant savarankiškai. Pačius uždavinius galima rinktis iš įvairių vadovėlių, papildomos literatūros, olimpiadinių uždavinynų ir pan. Keletą sąlygų pateiksime čia.

1. Kokia jėga reikia traukti P sunkio kūną, kad jis judėtų tolygiai, jei jėgos kryptis su horizontale sudaro 30^0 kampą, o trinties koeficientas k?

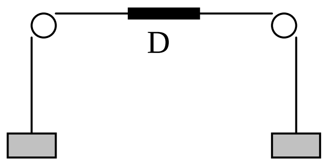


15 pav.

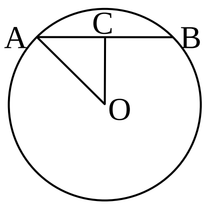
2. Vertikalioje plokštumoje pastatytas diskas, kurio diametras yra AB. Iš aukščiausio disko taško A nutiesti keli tiesūs grioveliai AB, AB_1, AB_2 ir t.t. (15 pav.). Iš taško A be trinties tuo pačiu metu pradeda slinkti keli kūnai, kiekvienas atskiru grioveliu. Per kiek laiko kiekvienas kūnas pasieks disko kraštą? (Galilėjaus uždavinys)

Ats.: $t = \sqrt{\dfrac{2 \cdot AB}{g}}$.

3. Per du nejudančius skridinius permestas siūlas, prie kurio galų pakabintos svarstyklių lėkštelės su svarsčiais po 3kg kiekvienas (16 pav.). Siūlas tarp blokų perpjautas ir pririštas prie dinamometro D. Ką rodys dinamometras? Kokią masę reikia pridėti į vieną lėkštelę, kad dinamometro parodymas nepasikeistų, kai nuo kitos lėkštelės nuimtas 1kg? Lėkštelių, skridinių, siūlo, dinamometro masių nepaisyti.



16 pav.



17 pav.

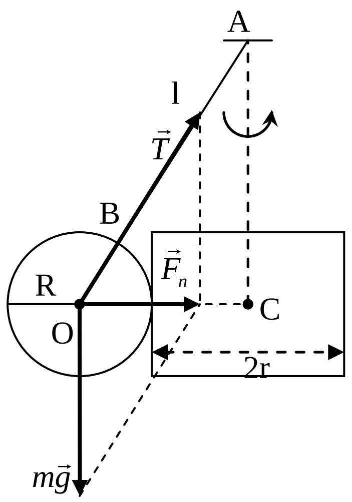
4. Tarp dviejų miestų A ir B iškastas tiesus tunelis (17 pav.), kuriuo be trinties neturėdamas nuosavos traukos jėgos, važiuoja traukinys. Raskite traukinio pagreitį (kaip jis priklauso nuo traukinio atstumo iki tunelio vidurio C?). Laikykite, kad Žemės traukos jėga Žemės viduje yra tiesiog proporcinga atstumui iki Žemės centro O, o Žemės spindulys yra R.

Ats.: $a(x) = g\dfrac{x}{R}$, kur x yra traukinio atstumas iki tunelio vidurio C.

5. Rutulys, kurio soindulys R, kabo ant AB=l ilgio siūlo ir liečia vertikalų ritinį, įtaisytą išcentrinėje mašinoje. Ritinio spindulys r (18 pav.). Kokiu kampiniu greičiu ω turi suktis mašina, kad rutulys nespaustų ritinio?

Sprendimas

Tame pačiame 18 pav. nubraižome ruutlį veikiančias jėgas, kai rutulys nespaudžia ritinio.



18 pav.

Rutulio judėjimo lygtis atrodo taip:

$$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_n = m\vec{a}_n.$$

Įcentrinės jėgos didumas

$$F_n = m\omega^2 (R + r),$$

čia $\omega^2 (R + r)$ yra įcentrinis arba normalinis pagreitis. Iš panašių trikampių turime:

$$\frac{F_n}{T} = \frac{R + r}{R + l},$$

be to,

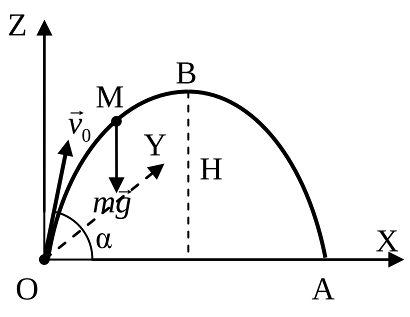
$$T^2 = (mg)^2 + F_n^2.$$

Iš paskutiniųjų trijų lygčių sužinome, kad ieškomas dydis

$$\omega = \sqrt[4]{\frac{g^2}{(R + l)^2 - (R + r)^2}}.$$

1.4 Kampu į horizontą mesto kūno judėjimas

Istoriškai mechanikos metodų taikymas vystėsi daugiausia dviem kryptimis. Tai artilerija ir dangaus mechanika. Labiau teoriškai, tai parabolinių trajektorijų teorija ir judėjimo centriniame jėgų lauke teorija. Centrinės yra tokios jėgos, kurių veikimo linijos susikerta viename taške. Kūno, mesto pradiniu greičiu v_0 vienalyčiame žemės traukos lauke (t.y., laisvojo kritimo pagreitis pastovus), uždavinį pirmą kartą nagrinėjo G. Galilėjus 1638 m. Vėliau šis klausimas buvo smulkiau ištirtas šaudymo teorijoje. Antrąjį – materialaus taško judėjimo centriniame jėgų lauke uždavinį griežtai matematiškai suformulavo I. Niutonas 1687 m. Jo atrastas visuotinės traukos dėsnis tapo svarbiausiuoju dėsniu, sprendžiant Visatos sandaros klausimus. Šiame taško dinamikos skyriuje panagrinėsime pirmąjį uždavinį – judėjimą vienalyčiame Žemės traukos lauke. Tokios sąlygos yra pakankamai artimos realioms, kai materialaus taško pakilimo aukštis ir lėkimo nuotolis yra pakankamai maži, lyginant su Žemės spinduliu. Tuomet materialų tašką veikianti jėga bus pastovi sunkio jėga $\vec{F}_s = m\vec{g}$.



19 pav.

Tegul kūnas m yra išmestas kampu α į horizontą. Panagrinėkime jo judėjimą, laikydami žemę nejudančia ir nepaisydami oro pasipriešinimo. Tegul kūnas (taškas) M pradiniu laiko momentu t=0 yra koordinačių pradžios taške O ir greičio vektorius $\vec{v}_0$ guli plokštumoje XOZ (19 pav.).

Pagrindinė dinamikos lygtis dabar atrodys taip: $m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$, todėl

$$\begin{cases} a_x = g_x = 0, \\ a_y = g_y = 0, \\ a_z = g_z = -g. \end{cases}$$

Iš Kinematikos 2.4 paragrafo žinome, kad

$$a_x = \frac{dv_x}{dt},\ a_y = \frac{dv_y}{dt},\ a_z = \frac{dv_z}{dt}.$$

Todėl gauname:

$$\begin{cases} \dfrac{dv_x}{dt} = 0, \\ \dfrac{dv_y}{dt} = 0, \\ \dfrac{dv_z}{dt} = -g. \end{cases} \qquad (1)$$

Tai diferencialinės mūsų judančio kūno judėjimo lygtys. Integruojame jas:

$$\begin{cases} v_x = c_1 = v_{0x} = v_0 \cos\alpha, \\ v_y = c_2 = v_{0y} = 0, \\ v_z = -gt + c_3. \end{cases}$$

Kai $t = 0, v_z = v_0 \sin\alpha \Rightarrow c_3 = v_0 \sin\alpha$. Kadangi $v_x = \dfrac{dx}{dt}, v_y = \dfrac{dy}{dt}, v_z = \dfrac{dz}{dt}$, tai:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha, \\ \dfrac{dy}{dt} = 0, \\ \dfrac{dz}{dt} = v_0 \sin\alpha - gt. \end{cases} \qquad (2)$$

Dar kartą integruojame:

$$\begin{cases} x = v_0 t \cos\alpha + c_4, \\ y = c_5 = y_0 = 0, \\ z = v_0 t \sin\alpha - \dfrac{gt^2}{2} + c_6. \end{cases}$$

Kai $t = 0, x = x_0 = 0 \Rightarrow c_4 = 0; z = z_0 = 0 \Rightarrow c_6 = 0.$ Taigi gavome:

$$\begin{cases} x = v_0 t \cos\alpha, \\ y = 0, \\ z = v_0 t \sin\alpha - \dfrac{gt^2}{2}. \end{cases} \qquad (3)$$

(3) lygtys yra materialaus taško, judančio vienalyčiame $\vec{g}$ stiprumo gravitacijos lauke, judėjimo lygtys. Jas galėjome gauti ir be integravimo, įrašę sunkio jėgos $\vec{F}_s$ ir pradinio greičio $\vec{v}_0$ projekcijų reikšmes į 1.3 paragrafo (4) lygtis.

Iš (3) matyti, kad kūnas juda plokštumoje XOZ, nes y=0. Kūno trajektorija yra plokščia. Trajektorijos lygtį gausime iš (3) lygčių eliminavę laiką t:

$$z = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}. \qquad (4)$$

Tai parabolės lygtis, kurios ašis yra lygiagreti ašiai OZ (19 pav.).
Taško M skrydžio nuotolį galimaa surasti (4) lygtyje paėmus z=0. Išsprendę gautąją kvadratinę lygtį, turime:

$$x_1 = 0;\ x_2 = OA = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}. \qquad (5)$$

Pirmasis sprendinys rodo, kad parabolė (4) kerta x ašį taške x=0, z=0. Antrasis sprendinys reiškia taško M skrydžio nuotolį x ašies kryptimi. Iš (5) lygties matyti, kad didžiausias skrydžio nuotolis bus tada, kai $\sin 2\alpha = 1$, t.y., tada, kai $\alpha=45^0$. Vadinasi,

$$(OA)_{\max} = \frac{v_0^2}{g}. \qquad (6)$$

Artilerijoje kampas α vadinamas metimo kampu. Iš (5) lygties matyti, kad, esant tam pačiam v_0, skrydžio nuotolis bus toks pats, esant dviems kampams: α ir $\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$.

Mat $\sin 2\alpha = \sin\left[2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]$. Taigi, į norimą tašką, esant tam pačiam pradiniam greičiui v_0, galima pataikyti dvejomis skirtingomis trajektorijomis (skirtingi metimo kampai).

Parabolinė trajektorija dažnai dar charakterizuojama didžiausiu pakilimo aukščiu. Aukščiausiame taške $v_z = \frac{dz}{dt} = 0$. Tada pagal (2) lygtis:

$$t = \frac{v_0\sin\alpha}{g},$$

o iš (3) sistemos trečiosios lygties: didžiausias pakilimo aukštis

$$H = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}. \qquad (7)$$

Keičiant kampą α, kinta ir H. Kai $\alpha=90^0$,

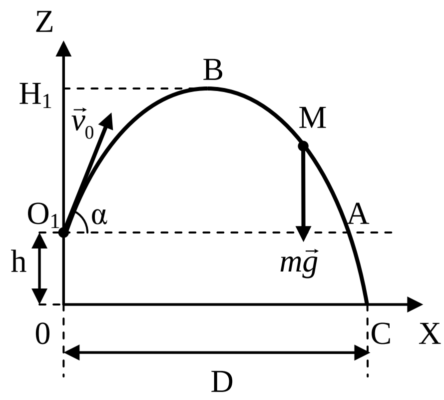
$$H_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Visos gautos išvados tiktų mėtant kūnus ir Mėnulio, Merkurijaus, kitų dangaus kūnų, kur reta atmosfera, paviršiuje. Tik reiktų imti atitinkamą laisvojo kritimo pagreitį g. Pavyzdžiui, Mėnulyje, $g_M \approx \frac{g_{\check{Z}}}{6}$. Veneroje tikriausiai reikėtų atsižvelgti į atmosferos pasipriešinimą, o tūlame asteroide – apsiriboti pakankamai mažais greičiais.

Pratybos

1. Kūnas išmestas nuo h aukščio kalno arba bokšto pradiniu greičiu v_0, kampu αį horizontą. Raskite judėjimo lygtis, trajektorijos lygtį, skrydžio nuotolį ir didžiausią pakilimo aukštį.

Sprendimas



20 pav.

Koordinačių ašis parenkame 20 pav. parodytu būdu; y ašis nepažymėta, nes nukreipta į mus. Nesunku matyti, kad šiuo atveju vietoj (3) lygčių gauname:

$$\begin{cases} x = v_0 t \cos\alpha, \\ z = h + v_0 t \sin\alpha - \dfrac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

Tai ieškomos judėjimo lygtys. Iš jų eliminavę laiką t, gauname:

$$z = h + x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}.$$

Tai ieškoma trajektorijos lygtis – taip pat parabolė. Remiantis (7) lygybe, matome, kad ieškomas didžiausias pakilimo aukštis

$$H_1 = h + \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

Norėdami gauti skrydžio nuotolį D, turime rasti taško C koordinatę x. Šiame taške z=0, tai iš trajektorijos lygties seka:

$$0 = h + x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}.$$

Išsprendę šią kvadratinę lygtį x atžvilgiu, gauname:

$$x_{1,2} = \frac{v_0\cos\alpha}{g}\left(v_0\sin\alpha \pm \sqrt{v_0^2\sin^2\alpha + 2gh}\right).$$

Tada ieškomas atstumas:

$$D = x_1 = \frac{v_0\cos\alpha}{g}\left(v_0\sin\alpha + \sqrt{v_0^2\sin^2\alpha + 2gh}\right).$$

Kai h=0, gauname (5) lygybes.

2. Gaukite kampu į horizontą mesto kūno judėjimo lygtis (3), remdamiesi 1.3 paragrafo (4) lygtimis.

3. Berniukas stengiasi kuo toliau nusviesti akmenuką. Iš daugelio bandymų toliausiai – 50 m – nulėkė apvalus 4 cm skersmens akmenukas. Kokiu didžiausiu kampiniu greičiu lėkdamas akmenukas galėjo suktis? Oro pasipriešinimo nepaisykite.

Ats.: $\omega_{\max} = 1100 rad/s.$

1.5 Niutono dinamikos dėsnių taikymo ribos

Niutono dinamikoje ir visoje Niutono mechanikoje, arba klasikinėje mechanikoje nagrinėjami makroskopinių kūnų judėjimo dėsniai, kai greičiai yra maži, palyginus su šviesos greičiu c vakuume. Apie tai mes jau kalbėjome. Niutono mechanika atliko neįkainojamą vaidmenį, vystant mokslą ir techniką. Ir dabar svarbiausi kosmonautikos, mašinų, tiltų ir kelių statybos skaičiavimai grindžiami Niutono mechanika.

Šimtmečiais mokslininkai buvo įsitikinę, kad Niutono mechanikos dėsniai yra vieninteliai pagrindiniai gamtos dėsniai. Visas pasaulio turtingumas ir įvairumas – tai

pagal Niutono dėsnius judančių Visatos kūnų sandaros dalelių judėjimo skirtingumų rezultatas.
Mes jau kalbėjome, kad maždaug nuo XIX a. vidurio, tyrinėjant optinius, elektromagnetinius reiškinius, nagrinėjant molekulių, atomų ir elementarių dalelių savybes, pasirodė, kad čia jau negalioja klasikinės kinematikos dėsniai. Nesunku suprasti, kad tokiu atveju nebegalioja ir klasikinės dinamikos dėsniai, ir visa klasikinė mechanika.
Dabar susipažinsime su kai kuriomis naujomis fizikos išvadomis. 1897 m. balandžio 29 d. katodiniuose spinduliuose anglų fizikas Džeimsas Tomsonas atrado pirmąją elementariąją dalelę – elektroną. Jo rimties masė $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31} kg$, krūvis (elementarusis krūvis) $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19} C$. 1903 m., veikiant elektronus elektriniu ir magnetiniu laukais, buvo nustatyta, kad, didėjant greičiui, jų masė irgi didėja. Reliatyvumo teorija surado kiekybinį to padidėjimo dėsnį:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{1}$$

Kai greitis v=0, masė $m=m_0$, kur m_0 – dalelės rimties masė. Dalelės, kurios turi rimties masę, vadinamos **medžiaginėmis dalelėmis.** Šios dalelės – protonai, elektronai, neutronai ir kt. – sudarytos iš kvarkų. Dalelės, kurios neturi rimties masės, vadinamos **lauko dalelėmis**, pavyzdžiui, fotonai. Galima sakyti, kad iš fotonų sudarytas elektromagnetinis laukas. Ir medžiaga, ir laukas yra materialūs.
Kai dalelės greitis $v << c$, iš (1) seka, kad $m \approx m_0 = const$. Gauname, kas tvirtinama Niutono mechanikoje – kūno masė yra pastovus dydis. Kai $m_0 \neq 0$ ir v=c, seka, kad $m = \infty$. Kadangi dalelės masė negali būti begalinė, tai reiškia, kad v negali būti lygus c. Tuo galima pagrįsti jau anksčiau minėtą teiginį, kad **medžiaginės dalelės negali judėti šviesos greičiu vakuume**. Fotonų $m_0=0$, todėl, kai v=c, $m \neq \infty$. Tai reiškia, kad fotonas gali judėti tik šviesos greičiu. Eksperimentai rodo, kad taip ir yra.
Masės priklausomybe nuo greičio (1) remiamasi, projektuojant ir statant elementariųjų dalelių greitintuvus, nes greitinamų dalelių masė ten padidėja šimtus kartų.
Niutono mechanikoje kūno kinetinė energija

$$T = E_k = \frac{mv^2}{2}. \tag{2}$$

Kai kūno greitis v=0, $E_k=0$.
Reliatyvumo teorijoje energija

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{3}$$

Klasikinėje mechanikoje tokia formulė nebuvo žinoma. Ji dažnai dar vadinama ryšiu tarp masės ir energijos. Jo prasmę trumpai galima taip nusakyti: kur yra masė, visada yra ir energija, ir atvirkščiai: kur yra energija, ten yra ir masė. Elektromagnetinis ir gravitacinis laukai turi energiją, vadinasi, turi ir mases. Formulė $E = mc^2$ atominėje technikoje dabar jau nesuskaičiuojamą skaičių kartų yra patvirtinta. Pagal ją skaičiuojamas atominės energijos didumas. O kai A. Einšteinas pirmąkart gavo tą

formulę, vienam draugui rašė: „...Nežinia, ar Dievulis nevedžioja čia manęs už nosies...“ (B. Voronkovas, Albertas Einšteinas, V., 1962, p. 42). Ir stebėtis tuo visai nereikia. Juk tai buvo absoliučiai naujas mokslo rezultatas.
Kai kūno greitis v=0, jo energiją pažymėkime E_0. Iš (3) gauname, kad

$$E_0 = m_0 c^2 \neq 0, \text{ kai } m_0 \neq 0. \qquad (4)$$

Tai vadinamoji **rimties energija**. Niutono mechanikoje ji taip pat nebuvo žinoma. Iš (3) ir (4) išplaukia, kad

$$E - E_0 = E_k^{rel.} = (m - m_0)c^2 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right).$$

Tai reliatyvistinė kinetinė energija. Matome, kad ji nėra lygi įprastai kinetinei energijai: $E_k^{rel.} \neq E_k$. Gautą reliatyvistinę kinetinę energiją išskleidę Teiloro eilute v atžvilgiu, gauname, kad, kai $v << c, E_k^{rel} \approx \frac{m_0 v^2}{2} \approx \frac{mv^2}{2} = E_k$. Vadinasi, mažų greičių atveju vėl gavome klasikinės mechanikos formulę.
Dar kartą norime atkreipti dėmesį į tai, kad nors mažų greičių atveju gauname klasikinės mechanikos dėsnius, elementariosioms dalelėms ir apskritai mikropasauliui klasikinės mechanika netinka ir tada, kai greičiai maži, palyginus su šviesos greičiu c vakuume. Mat, pasirodo, kad negalima tiksliai nustatyti, pavyzdžiui, elektrono padėties ir greičio, kitaip sakant, negalima taikyti klasikinės mechanikos judėjimo dėsnių. Mikrodalelės juda pagal kitus, kvantinius dėsnius, kuriuos nagrinėja naujos fizikos šaka – kvantinė mechanika. Viena svarbiausių kvantinės mechanikos išvadų yra ta, kad mikrodalelės energija ir kai kurie kiti dydžiai (pavyzdžiui, judesio kiekio momentas) negali būti bet kokio didumo. Jie gali keistis, tiktai pridedant arba atimant tam tikrą, griežtai apibrėžtą energijos arba kito dydžio kiekį arba porciją. Tokia porcija vadinama **kvantu**. Kvantinė teorija pradėjo vystytis 1900 m.

Pratybos

1. Kiek kartų padidėja kuriuo nors kosminiu greičiu judančio kosminio laivo masė?
2. Kam lygi elektrono masė, kai jo greitis v=c/2?

Ats.: $m \approx 1{,}155 m_e \approx 10{,}5 \cdot 10^{-31} kg.$

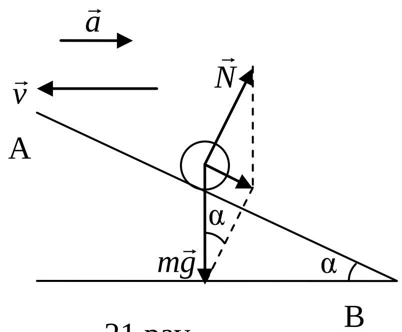
3. Kiek kainuoja 1 g šviesos, gautos iš elektros lemputės, kurios naudingumo koeficientas yra 5%? Laikykite, kad 1kWh elektros energijos kainuoja 27 ct.

II. RELIATYVIOJO JUDĖJIMO DINAMIKA

2.1 Neinercinės atskaitos sistemos. Kūnų judėjimas jose

Praeitame skyriuje kalbėjome apie judėjimą inercinėse atskaitos sistemose. Prisiminkime, kad tokiose sistemose galioja visi Niutono mechanikos dėsniai. Tuomet bet kuris kūnas juda su pagreičiu tik tada, kai jį vienaip ar kitaip veikia kiti kūnai, kitaip sakant, kai jį veikia kokia nors jėga.

O dabar pakalbėsime apie kitokius dažnai sutinkamus reiškinius. Štai aš stoviu tiesiaeigiai tolygiai važiuojančiame autobuse. Kiti keleiviai yra toliau, manęs horizontalia kryptimi neveikia jokios jėgos, ir aš galiu net skaityti knygą, kaip ir stovėdamas ant žemės. Tačiau autobusas staiga sumažino greitį, t.y., kurį laiką judėjo lėtėdamas – jo pagreitis buvo nukreiptas priešinga važiavimui kryptimi. Ir nors manęs, kai ir anksčiau, autobuse neveikė jokia horizontalia kryptimi nukreipta jėga, aš staiga pakrypau į priekį ir, jei nebūčiau įsikibęs turėklo, būčiau pargriuvęs. Negalima nurodyti jėgos, kuri suteikė man pagreitį autobuse. Kitas pavyzdys. Sėdžiu lėktuve. Lėktuvas lėtai išvažiavo į pakilimo taką, sustojo, o po to visu galingumu, įjungęs variklius, pradėjo važiuoti greitėdamas. Mane tuo metu prispaudė prie sėdynės atlošo, tiktai ir vėl negalima nurodyti kokio nors kūno, kuris mane būtų taip paveikęs. Dar vienas pavyzdys. Važiuoju traukiniu iš Klaipėdos į Vilnių ir žiūriu į padėtą ant stalo teniso kamuoliuką. Kai traukinys važiuoja tolygiai, kamuoliukas arba stovi vietoje (mano atžvilgiu), arba pastumtas ritasi beveik pastoviu greičiu. Tačiau kai traukinys, privažiuodamas stotį, pradeda mažinti greitį, kamuoliukas, niekieno nepaveiktas, pradeda ristis pirmyn, didindamas greitį. Kai traukinys, išvažiuodamas iš stoties, didina greitį, kamuoliukas ant stalo pats pradeda ristis atgal greitėdamas. Kai traukinys geležinkelio posūkyje pasuka į dešinę, kamuoliukas, niekieno neveikiamas, rieda į kairę. Be to, jei geležinkelio posūkis pakankamai staigus, priekiniame vagono gale esančios slankiojančios durys pačios pasislenka į kairę. Kai traukinys važiuoja tolygiai, nuleidus staliuko vieną kraštą žemyn, kamuoliukas nusiris žemyn lygiai taip, kaip ir riedėdamas nuo nuožulnios plokštumos mokyklos fizikos kabinete.



21 pav.

Kai traukinys mažina greitį (juda su pagreičiu $\vec{a}$, nukreiptu prieš greičio $\vec{v}$ kryptį), atitinkamu kampu α pakėlus priekinį staliuko kraštą A, kamuoliukas stovės vietoje, nors pagal Niutono dėsnius jis turėtų ristis žemyn pagreičiu $g\sin\alpha$ (trinties nepaisome) (21 pav.).

Iš paminėtų pavyzdžių mayti, kad yra tokios atskaitos sistemos, kuriose negalioja Niutono dėsniai (tiksliau I ir II Niutono dėsniai). Tokios atskaitos sistemos vadinamos **neinercinėmis sistemomis**.

Visos anksčiau minėtos neinercinės atskaitos sistemos judėjo su **pagreičiu** Žemės atžvilgiu (traukinys geležinkelio posūkyje juda tai pat su pagreičiu, kuris bendruoju atveju pagal Kinematikos 2.2 paragrafo (14) lygtį susideda iš normalinio ir tangentinio pagreičių). Kadangi, kaip minėjome I skyriuje, koordinačių sistema, susieta su Žeme, yra nebloga inercinė sistema, tai galima sakyti, kad **neinercinės atskaitos sistemos yra tos, kurios juda su pagreičiu inercinių atskaitos sistemų atžvilgiu**. Dar pasakysime porą pastabų apie atskaitos sistemą, susietą su Žeme. Didžioji dauguma mechaninių reiškinių Žemės paviršiuje vyksta tiksliai pagal Niutono dinamikos dėsnius. Tai ir suprantama. Juk Niutonas, Galilėjus ir kiti mokslininkai, prisidėję prie tų dėsnių nustatyto ir plėtojimo, gyveno Žemėje ir stebėjo reiškinius taip pat daugiausia Žemėje. Jeigu Žemėje stebimi reiškiniai atitiktų ne Niutono, o kokius nors kitus dėsnius, tai ir nustatyti būtų buvę tie kiti dėsniai. Tačiau yra Žemėje ir tokių reiškinių, kurių, kaip ir anksčiau minėtų pavyzdžių autobuse, lėktuve, traukinyje, negalima paaiškinti Niutono dinamikos dėsniais. Pavyzdžiui, iš didesnio aukščio laisvai krintantys kūnai patys šiek tiek nukrypsta nuo vertikalės į rytus. Artilerijos sviedinys, toliau lėkdamas, šiaurės pusrutulyje niekieno neveikiamas nukrypsta keliolika metrų nuo taikinio į dešinę. Šiaurės pusrutulio upių vanduo šiek tiek daugiau graužia dešinįjį krantą ir pan. Tokie reiškiniai rodo, kad Žemė nėra labai gera inercinė atskaitos sistema. Analizuojant juos, buvo nustatyta, kad taip yra todėl, kad Žemė sukasi aplink savo ašį, vadinasi juda su pagreičiu. Griežtai kalbant, Žemė nėra ideali inercinė sistema dar ir dėl to, kad ji sukasi aplink Saulę.

2.2 Dinamikos dėsniai neinercinėse atskaitos sistemose. Inercijos jėgos

Tegul sistema K yra inercinė, o sistema K\` juda sistemos K atžvilgiu bet kaip, t.y., slenka ir sukasi. Tuomet pagal Kinematikos 3.4 paragrafo (1) lygtį, materialaus taško absoliutinis pagreitis $\vec{a}_a$ sistemoje K yra lygus

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_n + \vec{a}_k.$$

Toliau absoliutinį pagreitį $\vec{a}_a$ žymėkime tiesiog $\vec{a}$. Todėl

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_n + \vec{a}_k. \qquad (1)$$

Kadangi sistema K yra inercinė, tai joje galioja II Niutono dėsnis:

$$m\vec{a} = \vec{F}. \qquad (2)$$

(1) įrašykime į (2):

$$m(\vec{a}_r + \vec{a}_n + \vec{a}_k) = \vec{F}.$$

Paskutinę lygybę galima ir taip parašyti:

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + (-m\vec{a}_n) + (-m\vec{a}_k). \qquad (3)$$

Toji lygybė yra teisinga, esant visokioms materialų tašką veikiančioms jėgoms $\vec{F}$ ir visokiems pagreičiams $\vec{a}_n, \vec{a}_k$. Tačiau į tą lygybę galima žiūrėti kaip į II Niutono dėsnį neinercinėje sistemoje. Bet jei galioja II Niutono dėsnis, tai masės m ir pagreičio $\vec{a}_r$ sandauga toje sistemoje turi būti lygi visų veikiančiųjų jėgų atstojamajai. O vietoje tos atstojamosios (3) turime visų tikrų jėgų atstojamąją $\vec{F}$ ir dar dydžius $(-m\vec{a}_n)$ ir $(-m\vec{a}_k)$. Pastarieji yra matuojami jėgos vienetais. O jėgos vienetais matuojamą dydį galime pavadinti jėga. Tai, žinoma, nėra įrodymas, o tik aiškinimas, nes, pavyzdžiui, darbas ir jėgos momento didumas taip pat matuojami vienodais vienetais, tačiau jėgos momento niekas nevadina darbu. Pagrindinis argumentas, kuriuo remiantis, dydžius $(-m\vec{a}_n)$ ir $(-m\vec{a}_k)$ galima vadinti jėgomis, yra tai, kad, taip darant, nesusiduriama su prieštaravimais ir galima sėkmingai paaiškinti reiškinius neinercinėse sistemose. Dydis $(-m\vec{a}_n)$ vadinamas **nešimo inercijos jėga**. Pažymėkime ją $\vec{F}_n$, t.y.,

$$\vec{F}_n = -m\vec{a}_n. \qquad (4)$$

Nešimo inercijos jėga yra lygi kūno masės ir nešimo pagreičio sandaugai ir nukreipta priešinga tam pagreičiui kryptimi.

Dydis $(-m\vec{a}_k)$ vadinamas **Koriolio inercijos jėga**:

$$\vec{F}_k = -m\vec{a}_k. \quad (5)$$

(4) ir (5) įrašome į (3):

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{F}_n + \vec{F}_k. \quad (6)$$

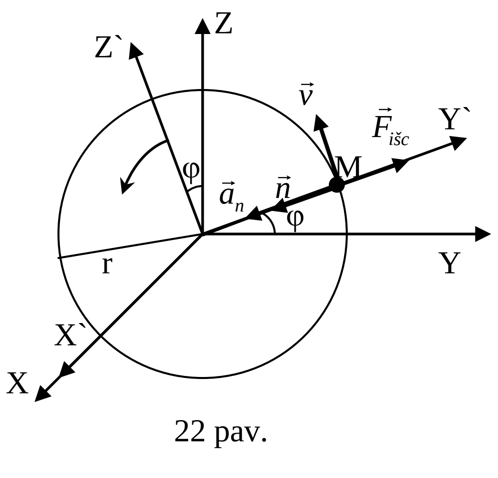
Tai pagrindinis dinamikos dėsnis neinercinėse sistemose. **II Niutono dėsnis neinercinėse atskaitos sistemose galioja tada, kai prie tikrųjų kūną veikiančių jėgų pridedame inercijos jėgas – nešimo ir Koriolio**.
Tokiu būdu įvedę inercines jėgas, Niutono dinamikos dėsnius galime taikyti ir neinercinėse atskaitos sistemose. Inercinėse sistemose vietoje inercijos jėgų tereikia įrašyti nulius.
Įvedę inercijos jėgas, galime lengvai paaiškinti visus praeito skirsnio paminėtus neinercinių sistemų reiškinius. Visus juos sukelia inercijos jėgos. Siūlome patiems pavaizduoti tas jėgas, nagrinėjant minėtus pavyzdžius.
Formuluodami pagrindinį dinamikos dėsnį neinercinėje sistemoje, inercijos jėgas pridėjome prie tikrųjų kūną veikiančių jėgų. Tokiu būdu inercijos jėgų mes nelaikome tikromis. Taip sakydami, turime galvoje tai, kad inercijos jėgos neatstovauja realiai kūnų sąveikai. Tačiau inercijos jėgos yra tiek pat realios, kiek ir tikrosios jėgos. Juk, pastarųjų sąvoka mechanikoje atsirado taip pat norint paaiškinti kūno pagreičio priežastį – judėjimo būvio kitimo priežastį. Jei tikrąsias jėgas palygintume su tikrais pinigais, tai inercijos jėgas galėtume palyginti su netikrais (padirbtais) pinigais. Tačiau ir vieni, ir kiti pinigai yra realūs.
Kai kūnas neinercinėje sistemoje juda pastoviu greičiu $\vec{v}_r$, pagreitis $\vec{a}_r = \vec{0}$. Tuomet gauname, kad

$$\vec{F} + \vec{F}_n + \vec{F}_k = \vec{0}. \quad (7)$$

Kai kūnas neinercinėje sistemoje nejuda, greitis $\vec{v}_r$ ir $\vec{F}_k = \vec{0}$, nes tada $\vec{a}_k = \vec{0}$. Tuomet iš (7) seka:

$$\vec{F} + \vec{F}_n = \vec{0}. \quad (8)$$

Tai **reliatyvinės (santykinės) pusiausvyros sąlyga: kūnas neinercinėje sistemoje yra pusiausvyroje tada, kai jį veikiančių tikrųjų ir nešimo inercijos jėgų atstojamoji yra lygi nuliui**.
III Niutono dėsnis, kaip jau esame minėję, galioja ir inercinėse, ir neinercinėse sistemose. Visada tokia pat, tik priešingos krypties jėga, kokia kūnas A veikia kūną B, kūnas B veikia kūną A.



22 pav.

Iš Kinematikos 3.1 paragrafo žinome, kad nešimo inercijos pagreitis $\vec{a}_n$ yra pagreitis to judančios (neinercinės) sistemos taško, kuriame duotuoju laiko momentu yra judantis materialus taškas M, kurio masė m. Kai kūnas (materialus taškas) juda pastoviu greičiu v apskritimu, galime tarti, kad jis visą laiką yra viename taške sistemos X`Y`Z`, kuri sukasi kartu su kūnu pastoviu greičiu apie apskritimo centrą, atžvilgiu. 22 pav. nejudančios inercinės sistemos Y ir Z ašys guli brėžinio plokštumoje, o X ašis nukreipta į skaitytoją.

Besisukančios neinercinės sistemos ašys Y` ir Z` taip pat yra brėžinio plokštumoje, o X` ašis sutampa su X ašimi, ir tai yra sukimosi ašis.
Pagal anksčiau minėtą nešimo pagreičio apibrėžimą, taško M pagreitis yra kūno nešimo pagreitis besisukančioje sistemoje. Bendru atveju

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t,$$

kur

$$\vec{a}_t = \frac{d}{dt}[\vec{\omega}, \vec{r}]; \ \vec{a}_n = [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]].$$

Čia vektorius $\vec{r}$ nukreiptas iš koordinačių pradžios į tašką M. Pasinaudodami vektorių vektorine sandauga turime:

$$\vec{a}_t = [\dot{\vec{\omega}}, \vec{r}] + [\vec{\omega}, \dot{\vec{r}}];$$

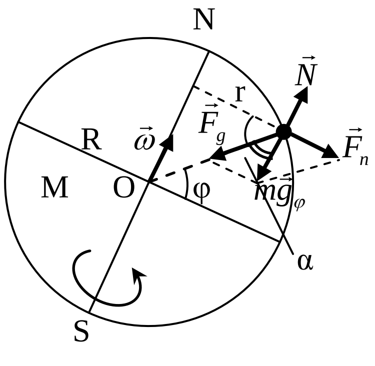
$$\vec{a}_n = \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) - \omega^2 \vec{r}.$$

Kadangi taškas M juda apskritimu pastoviu greičiu, tai

$$\vec{a}_t = \vec{0}; \ \vec{a}_n = -\omega^2 \vec{r} = \omega^2 r \vec{n} = \frac{v^2}{r} \vec{n}.$$

Taigi šiuo atveju $\vec{a}_n$ yra nešimo pagreitis, o $(-m\vec{a}_n) = -\vec{n}\left(\frac{mv^2}{r}\right) = \vec{F}_n$ yra nešimo inercijos jėga. Bet iš išraiškos matyti, kad $\vec{F}_n = \vec{F}_{išc}$ yra išcentrinė jėga. Taigi **išcentrinė jėga yra nešimo inercijos jėga**, pasireiškianti besisukančioje atskaitos sistemoje.
Šį kartą sutapo ne tik nešimo pagreičio $\vec{a}_n$ ir normalinio pagreičio žymėjimai, bet ir patys pagreičiai. Jei judančioji sistema X`Y`Z` suktųsi nepastoviu greičiu arba suktųsi ir slinktų, nešimo pagreitis nesutaptų su normaliniu pagreičiu.

Pratybos



23 pav.

1. Raskite algebrinį ryšį tarp laisvojo kritimo pagreičio ašigalyje g_a, laisvojo kritimo pagreičio pusiaujyje g_p ir laisvojo kritimo pagreičio bet kokioje geografinėje platumoje $\varphi - g_\varphi$, atsižvelgiant į Žemės sukimąsi apie savo ašį.
Paaiškinkite 1.2 paragrafe minėto vektoriaus $\vec{g}$ krypties nesutapimo su Žemės spinduliu priežastį.
Sprendimas
Geografinėje platumojeφ antŽemės paviršiaus gulinčiam kūnui atskaitos sistemoje, susietoje su Žemės paviršiumi, galioja (8) lygybė:

$$\vec{F} + \vec{F}_n = \vec{0}.$$

Čia $\vec{F} = \vec{F}_g + \vec{N}$, kur $\vec{F}_g$ – visuotinės traukos arba gravitacijos jėga, o $\vec{N}$ – Žemės reakcijos jėga, ne visai statmena į Žemės paviršių. $\vec{F}_n$ – nešimo inercijos arba išcentrinė jėga (23 pav.). Pagal apibrėžimą

$$F_g = G\frac{mM}{R^2} = mg_a;$$

$$F_n = ma_n = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r = m\omega^2 R\cos\varphi.$$

Jėga $N = mg_\varphi$. Matome, kad $m\vec{g}_\varphi$ tikrai sudaro kampą α (nedidelį) su Žemės spinduliu. Rasime g_φ didumą. Pagal kosinusų teoremą:

$$N^2 = F_g^2 + F_n^2 - 2F_g F_n \cos\varphi.$$

Įrašę aukščiau parašytas N, F_g ir F_n išraiškas, suprastinę ir kiek pertvarkę gauname ieškomą ryšį:

$$g_\varphi = \sqrt{g_a^2 + \left(\omega^2 R - 2g_a\right)\omega^2 R\cos^2\varphi}.$$

Atskiri atvejai:

a) Ašigalyje $\cos\varphi = 0 \Rightarrow g_\varphi = g_a = \dfrac{GM}{R^2}$, $\alpha = 0$.

b) Pusiaujyje $\cos\varphi = 1 \Rightarrow g_\varphi = g_p = \sqrt{g_a^2 + \left(\omega^2 R\right)^2 - 2g_a\omega^2 R} = g_a - \omega^2 R,\ \alpha = 0.$

2. Kokiam pagreičiui a esant, 21 pav. pavaizduotas kamuoliukas stovės vietoje ant nuožulnios plokštumos, kurios polinkio kampas α?

Ats.: $a = g\tan\alpha$.

3. Neinercinė atskaitos sistema juda slenkamuoju judėjimu taip, kaip kampu į horizontą išmestas kamuoliukas. Kam lygi kamuoliuko nešimo inercijos jėga F_n? Oro pasipriešinimo nepaisyti.

2.3 Koriolio inercijos jėga

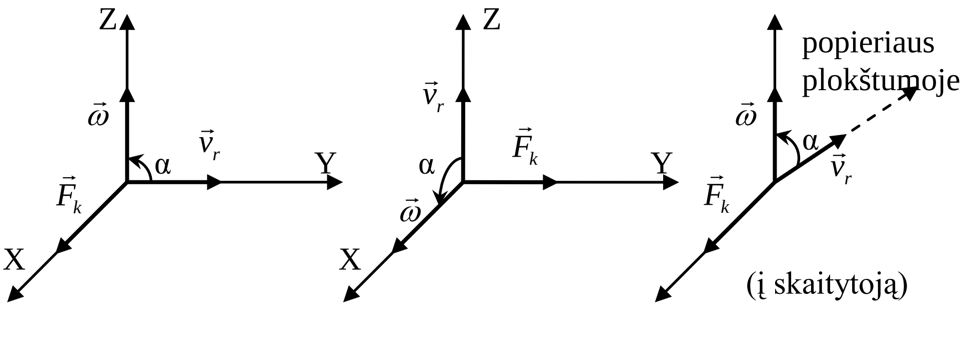
Koriolio inercijos jėga apibrėžta 2.2 paragrafo (5) lygybe:

$$\vec{F}_k = -m\vec{a}_k. \qquad (1)$$

Koriolio pagreitis $\vec{a}_k$ nagrinėtas Kinematikos 3.4 paragrafe. Ten yra formulė:

$$\vec{a}_k = 2\left[\vec{\omega}, \vec{v}_r\right] \qquad (2)$$

ir siūlymas skaitytojams patiems suredaguoti taisykles Koriolio pagreičio krypčiai nustatyti.



24 pav.

Koriolio inercijos jėgos $\vec{F}_k$ apibrėžimą (1) žodžiais galima taip pasakyti: **Koriolio inercijos jėga yra lygi kūno masės ir Koriolio pagreičio sandaugai su minuso ženklu.** Taigi, nustačius Koriolio pagreičio kryptį, reikia paimti jai priešingą, ir bus Koriolio inercijos jėgos kryptis. Pasiūlysime dar vieną tos krypties nustatymo būdą. Iš (1) ir (2) lygybių gauname:

$$\vec{F}_k = -2m[\vec{\omega}, \vec{v}_r] = 2m[\vec{v}_r, \vec{\omega}]. \qquad (3)$$

Dabar pagal Kinematikos 1.5 paragrafą prisiminę vektorinės sandaugos savybes, pavaizduokime (3) lygybę brėžiniu (24 pav.) ir žodžiais: **Koriolio inercijos jėga $\vec{F}_k$ yra statmena į plokštumą, kurioje guli kūno reliatyviojo greičio $\vec{v}_r$ ir atskaitos sistemos kampinio greičio $\vec{\omega}$ vektoriai ir nukreipta į tą pusę, iš kurios žiūrint vektorius $\vec{v}_r$, sukamas mažiausiu kampu prieš laikrodžio rodyklę, sutampa su vektoriumi $\vec{\omega}$.**

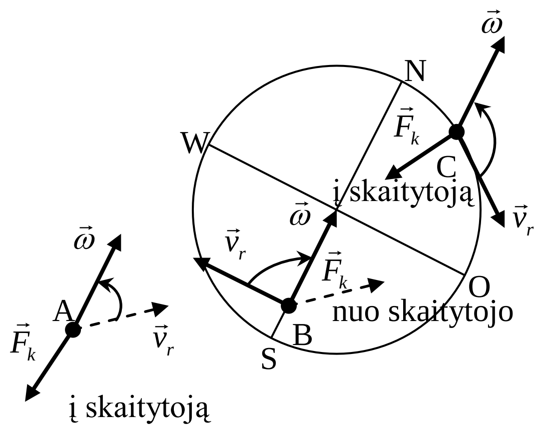
Koriolio inercijos jėgos didumas:

$$F_k = 2mv_r\omega\sin\alpha.$$

Čia α yra kampas tarp $\vec{v}_r$ ir $\vec{\omega}$ vektorių.

Žemės kampinis greitis $\omega = \dfrac{2\pi}{24\cdot 3600} = 73\cdot 10^{-6}\, rad/s.$

2.1 paragrafe minėjome krintančių kūnų nukrypimą nuo vertikalės į rytus, artilerijos sviedinių nukrypimą šiaurės pusrutulyje į dešinę ir kitus panašius reiškinius. Dabar galime juos paaiškinti. Jų priežastis – Koriolio inercijos jėga. Kadangi Žemė sukasi iš vakarų į rytus, tai jos kampinio greičio vektorius $\vec{\omega}$ nukreiptas lygiagrečiai sukimosi ašiai SN iš pietų į šiaurę (25 pav.).



25 pav.

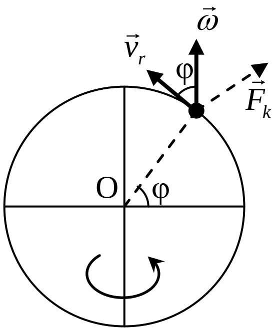
Iš parimusio virš Žemės malūnsparnio, nuo kalno skardžio ar iš bokšto (iš taško A) paleistą kristi kūną veikianti Koriolio jėga $\vec{F}_k$ nukreipta į skaitytoją. Į rytus jėga $\vec{F}_k$ nukreipta ir krintant šiaurės pusrutulyje. Aišku, kad, metant kūną vertikaliai aukštyn, nukrypimas abiejuose pusrutuliuose bus į vakarus. Iš taško B į vakarus paleistą balistinę raketą veikianti jėga $\vec{F}_k$ nukreipta nuo skaitytojo akių. Jei skaitytojas stovės taške B ant žemės ir žiūrės į nutolstančią raketą, tai $\vec{F}_k$ bus nukreipta į kairę. Šiaurės pusrutulyje $\vec{F}_k$ nukreipta į dešinę.

Upės vandenį, taške C tekantį į pietus, veikianti jėga $\vec{F}_k$ nukreipta į skaitytoją. Žiūrint į upę pasroviui, ta jėga nukreipta į dešinę. Todėl šiaurės pusrutulyje upių dešinieji krantai kiek daugiau išgraužti (Bero dėsnis). Dėl tos pačios priežasties traukinys, važiuodamas šiaurės pusrutulyje, labiau spaudžia dešinįjį bėgį, vėjas nukrypsta į

dešinę nuo slėgio mažėjimo krypties, Golfo srovė nukrypsta į dešinę, lytys Ledjūryje dreifuoja ratais.
Artileristai ir raketininkai turi tiksliai apskaičiuoti Koriolio inercijos jėgos poveikį. Tie skaičiavimai sudėtingi.

Pratybos

1. Traukinys važiuoja 15m/s greičiu išilgai dienovidinio iš pietų į šiaurę. Traukinio masė 2000t. Kokia horizontalia jėga traukinys veikia bėgius, būdamas 60^0 šiaurės platumoje?
Sprendimas



26 pav.

Iš 26 pav. matyti, kad Koriolio inercijos jėga $\vec{F}_k$ nukreipta į rytus arba žiūrint važiavimo kryptimi – į dešinę:

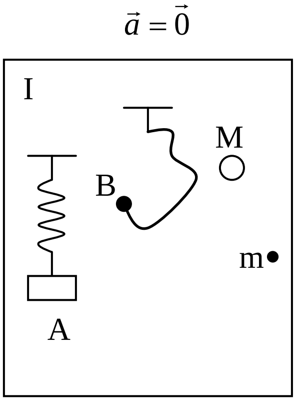
$$F_k = 2mv_r\omega\sin\varphi.$$

Apskaičiavę gauname:

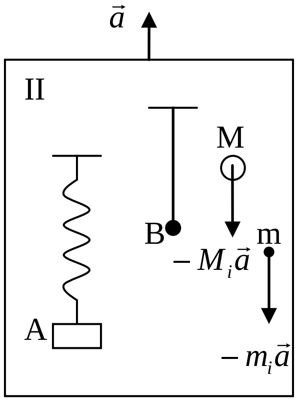
$$F_k \approx 3800N.$$

Taigi traukinys dešinį rytinį bėgį veiks 3800N jėga.
2. Raskite Koriolio inercijos jėgą, kuri veikia lėktuvą, skrendantį taip, kaip nurodyta Kinematikos 3.4 paragrafo pratybų 2 uždavinio sąlygoje a) atveju. Lėktuvo masė 100t.
Ats.: F_k=14600N nukreipta vertikaliai žemyn.
3. Lėktuvas skrenda išilgai dienovidinio nuo pietų iki šiaurės ašigalio. Nubrėžkite Koriolio inercijos jėgos priklausomybės nuo geografinio pločio grafiką: $F_k = f(\varphi)$.

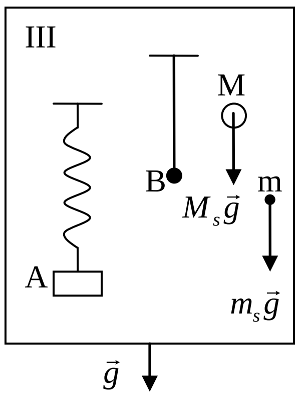
2.4 Inercijos ir gravitacijos jėgų ekvivalentiškumas



27 pav.

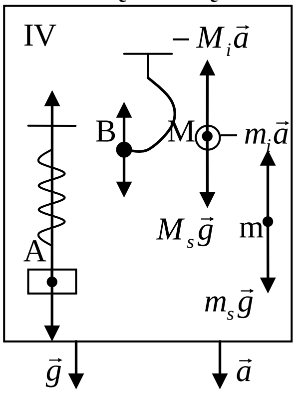


28 pav.



29 pav.

Tegul turime sistemą, kuri juda be pagreičio (a=0) erdvėje, kurioje arti nėra kitų kūnų. Tokioje sistemoje nebus nei tikrųjų, nei inercijos jėgų (sistemoje esantieji kūnai elektrinių krūvių neturi, o į gravitacinę sąveiką tarp jų galima neatsižvelgti).



30 pav.

Tegul mūsų sistemoje yra prie spyruoklės pritvirtintas kūnas A (27 pav.), prie siūlo pririštas kūnas B ir laisvi kūnai M ir m. Spyruoklė neištempta, siūlas bet kaip susiraitęs, o kūnai M ir m „plaukioja“, nekrisdami nei į vieną pusę sistemos viduje. Kitaip tariant, mūsų sistemoje nesvarumo būsena. Pažymėkime tą būseną I.
Tegul mūsų sistema pradeda judėti slenkamuoju judėjimu su pastoviu pagreičiu a (28 pav.). Tada joje atsiras inercijos jėgos, kurios pagal 2.2 paragrafo (4) lygtį bus nukreiptos priešinga pagreičiui kryptimi. Dėl inercijos jėgų kūnas A ištemps spyruoklę, kūnas B – siūlą, o kūnai M ir m pradės judėti (kristi) pagreičiu $(-\vec{a})$. Pažymėkime tą būseną II. Atrodo, kad pastebėję sistemoje tokius reiškinius, galime daryti išvadą, kad sistema pradėjo judėti su pagreičiu $\vec{a}$. Kūną M veikianti inercijos jėga $\vec{F}_i = -M_i\vec{a}$, o kūną m veikianti inercijos jėga $\vec{f}_i = -m_i\vec{a}$. Kūnų mases mes pažymėjome indeksais i, nes jos kartais yra vadinamos inercinėmis masėmis.
Tegul mūsų sistema juda be pagreičio kaip ir I būsenoje, tačiau tegul ji patenka į vienalytį, pastovų gravitacijos lauką. Apytikriai toks atvejis gali būti, atsiradus netoli didelio dangaus kūno paviršiaus. Tegul tame gravitacijos lauke kūnai krinta kažkokiu pagreičiu $\vec{g}$ sistemos II būsenos pagreičiui $\vec{a}$ priešinga kryptimi (29 pav.). Kūnus M ir m veiks sunkio jėgos $\vec{F}_s = M_s\vec{g}$ ir $\vec{f}_s = m_s\vec{g}$. Kūnų mases pažymėjome kitais indeksais – s, nes jos vadinamos gravitacinėmis arba svariosiomis masėmis. Pažymėkime šią būseną III. Tegul gravitacijos laukas yra toks, kad sunkio jėgos jame yra lygios II būsenos inercijos jėgoms: $\vec{F}_s = \vec{F}_i$ arba

$$-M_i\vec{a} = M_s\vec{g}. \qquad (1)$$

Kruopščiais bandymais buvo nustatyta, kad bet kokio kūno inercinė masė yra lygi jo svariajai masei: $M_i = M_s$. Tiesiog sakoma, kad tos masės yra tapatingos. Todėl iš (1) seka, kad $\vec{a} = -\vec{g}$. O tada kūnai M ir m kris lygiai taip, kaip ir būsenoje II. Taigi III būsena niekuo nesiskirs nuo II. Galima suformuluoti tokią išvadą: **visi mechaniniai procesai vyksta vienodai inercinėje sistemoje, esančioje vienalyčiame pastoviame gravitacijos lauke, ir sistemoje, judančioje pastoviu pagreičiu, nesant gravitacijos lauko**. Reliatyvumo teorijoje ta išvada apibendrinama ir kitiems procesams: optiniams, elektromagnetiniams ir pan. Tuomet vietoje žodžių „Visi mechaniniai procesai“ sakoma „Visi fizikiniai procesai“. Iš visų tų procesų vis tiek negalima spręsti apie sistemos judėjimą.
Mūsų išvadą galima ir taip suprasti: **inercijos jėgų laukas yra ekvivalentiškas gravitacijos jėgų laukui**. Ši išvada vadinama **ekvivalentiškumo principu**. Pagal jį gravitacijos lauką galima dirbtinai sukurti, priverčiant sistemą judėti su atitinkamo didumo pagreičiu. Tuo paremti ir projektai, kaip sukurti svarumą kosminiuose laivuose, tiktai jie daugiausia remiasi ne slenkamuoju, o sukamuoju judėjimu.

Tegul mūsų sistema, būdama vienalyčiame pastoviame gravitacijos lauke $\vec{g}$, pati ima judėti pastoviu pagreičiu $\vec{a} = \vec{g}$ (laisvai kristi) (30 pav.). Pažymėkime tokią būseną IV. Sistemoje esančius kūnus veikiančios inercijos jėgos dabar bus nukreiptos prieš sunkio jėgas ir jas kompensuos: $\vec{f}_s = m_s\vec{g}$; $\vec{f}_i = (-m_i\vec{a})$; $\vec{f}_s + \vec{f}_i = \vec{0}$. Gavome 2.2 paragrafo (8) lygtyje aptartą reliatyvinės pusiausvyros sąlygą. Todėl kūnai M ir m plaukios, nekrisdami nei į vieną, nei į kitą pusę sistemos viduje; spyruoklė bus neištempta, o siūlas bet kaip susiraitęs. Taigi sistemos IV būsena niekuo nesiskiria nuo I būsenos (27 pav.). Tai galima ir kitaip pasakyti: **gravitacijos lauką galima „panaikinti“, leidžiant sistemai laisvai kristi jame**. Tuomet sistemoje atsiranda lygiai tokia pati nesvarumo būsena, kaip ir I atveju. Toks nesvarumas ir būna kosminiuose laivuose, kai jie laisvai juda, pavyzdžiui, Žemės ir Mėnulio gravitacijos lauke Žemės – Mėnulio trasoje. Tiesa, tada gravitacijos laukas nėra vienalytis, todėl, laivui judant, kinta $\vec{g}$. Bet užtat atitinkamai kinta ir laivo pagreitis $\vec{a}$, visą laiką būdamas lygus $\vec{g}$.

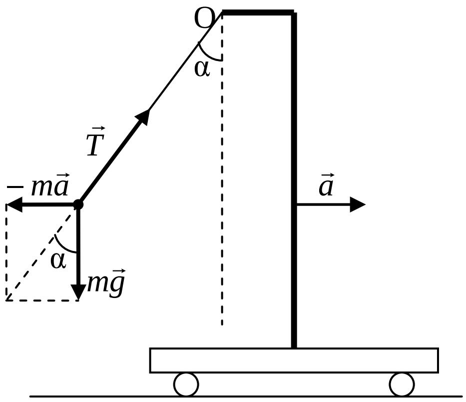
Kosminiams laivams sukantis aplink Žemę ar Mėnulį, inercijos jėgos yra išcentrinės jėgos, ir nesvarumas yra taip pat. Kai veikia kosminio laivo varikliai, jo pagreitis $\vec{a} \neq \vec{g}$; tuomet nesvarumas išnyksta.

Norime dar kartą atkreipti dėmesį į tai, kad čia naudojamas $\vec{g}$ gali būti įvairus pagreitis, ir jo didumas lygus 9,81m/s^2 tik Žemės gravitacijos lauke prie pat jos paviršiaus.

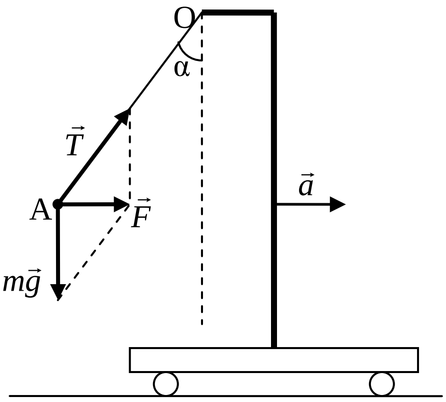
2.5 Taško dinamikos pavyzdžiai inercinėse ir neinercinėse atskaitos sistemose

Daugelį reiškinių ir uždavinių galima aiškinti ir inercinėse sistemose, neįvedant inercijos jėgų, ir neinercinėse sistemose, jas įvedant. Metodo pasirinkimas priklauso nuo patogumo arba net ir nuo įpratimo. Porą pavyzdžių aptarsime, o po to pasiūlysime keletą uždavinių, kuriuos taip pat reikėtų išspręsti tiek inercinėse, tiek ir neinercinėse sistemose.

I pavyzdys.



31 pav.



32 pav.

Tegul masyvus rutuliukas yra pakabintas ant siūlo ir pritvirtintas prie stovo, kuris kartu su vežimėliu važiuoja pastoviu pagreičiu $\vec{a}$ (31 pav.). Raskite siūlo įtempimo jėgą T ir jo atsilenkimo kampą α.

Sprendimas

Neinercinėje koordinačių sistemoje (susietoje su važiuojančiu vežimėliu) rutuliukas yra pusiausvyroje. Jį veikia tikrosios jėgos $m\vec{g}$ ir $\vec{T}$ ir nešimo inercijos jėga $\left(-m\vec{a}\right)$. Visų jų atstojamoji:

$$m\vec{g}+\vec{T}+\left(-m\vec{a}\right)=\vec{0}$$

$$\Rightarrow T=m\sqrt{g^2+a^2};\ \alpha=\arctan\frac{a}{g}.$$

Kai a=0, T=mg, α=0.

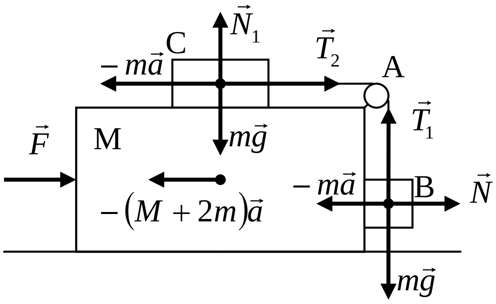
Inercinėje koordinačių sistemoje visi vežimėlio taškai, o taip pat ir rutuliukas juda su pagreičiu $\vec{a}$, todėl rutuliuką veikiančių jėgų atstojamoji $\vec{F}$ turi turėti vektoriaus $\vec{a}$ kryptį (32 pav.). Tuomet:

$$m\vec{g}+\vec{T}=\vec{F}=m\vec{a}$$

$$\Rightarrow T=m\sqrt{g^2+a^2};\ \alpha=\arctan\frac{a}{g}.$$

Gavome lygiai tą patį, kaip ir neinercinėje sistemoje.

II pavyzdys.



33 pav.

Kokia jėga F reikia veikti padėklą M į dešinę, kad kubiukai padėklu nejudėtų arba slinktų pastoviu greičiu? Trinties nepaisyti (33 pav.). Skridinėlis A lengvas.

Sprendimas

Pagreičiu $\vec{a}$ judančioje *neinercinėje sistemoje* visi trys kūnai nejuda arba slenka pastoviu greičiu. Todėl kubiuką B veikiančių jėgų suma:

$$m\vec{g}+\vec{T}_1+\vec{N}+\left(-m\vec{a}\right)=\vec{0},$$

ant padėklo gulintį kubiuką C veikiančių jėgų suma:

$$m\vec{g}+\vec{T}_2+\vec{N}_1+\left(-m\vec{a}\right)=\vec{0},$$

visą sistemą horizontaliai veikiančių jėgų suma:

$$\vec{F}+\left[-\left(M+2m\right)\vec{a}\right]=\vec{0}.$$

Čia $\left(-m\vec{a}\right)-$ kubiukus veikiančios nešimo inercijos jėgos, o $\left[-\left(M+2m\right)\vec{a}\right]-$ visą sistemą veikianti nešimo inercijos jėga; $\vec{N}$ ir $\vec{N}_1-$ kubiukus veikiančios padėklo reakcijos jėgos; $\vec{T}_1$ ir $\vec{T}_2-$ siūlo įtempimai, $T_1=T_2$.

Inercinėje sistemoje visi kūnai juda vienodu pagreičiu $\vec{a}$, todėl kubiukui B

$$m\vec{g}+\vec{T}_1+\vec{N}=m\vec{a},$$

kubiukui C

$$m\vec{g}+\vec{T}_2+\vec{N}_1=m\vec{a},$$

o visai kūnų sistemai

$$\vec{F} = (M + 2m)\vec{a}.$$

Matome, kad abiejose atskaitos sistemose parašytos judėjimo lygtys yra tapatingos, skiriasi tik jų parašymo idėja.
Projektuodami gautas lygtis bet kurioje atskaitos sistemoje į horizontalią ir vertikalią ašis, gauname:

$$\begin{cases} N = ma, \\ T_1 = mg, \\ T_2 = ma, \\ N_1 = mg. \end{cases}$$

Kadangi $T_1=T_2$ (siūlas ir skridinys lengvi) abiejose sistemose, tai $a=g$, $N=N_1=T_1=T_2=mg$, ir ieškoma jėga:

$$F = (M + 2m)g.$$

Galima taip aiškinti: kubiuko C dirbtinis svoris, nukreiptas į kairę, atsveria kubiuko B natūralų svorį; kubiukas C padėklą spaudžia natūraliu svoriu, o kubiukas B – dirbtiniu, nukreiptu į kairę.

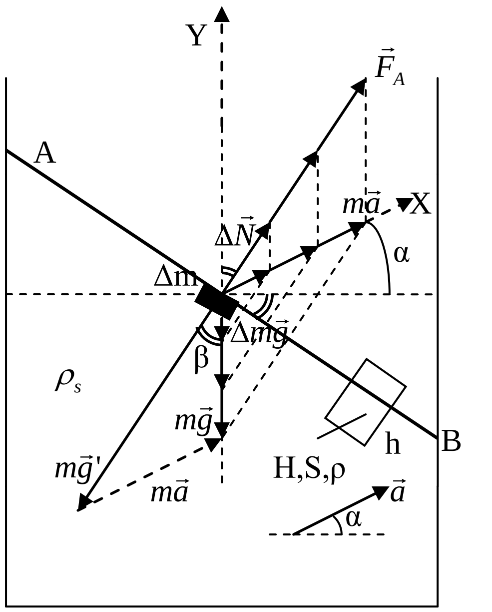
III pavyzdys.

m masės kūnas plūduriuoja skysčio paviršiuje inde, kuris juda slenkamuoju judėjimu bet kurios krypties ir didumo pastoviu pagreičiu $\vec{a}$. Raskite kūną veikiančią Archimedo jėgą, skysčio paviršiaus orientaciją ir plūduriuojančio kūno grimzlę.

Sprendimas

Nusistovėjusio skysčio paviršius AB yra statmenas skysčio paviršiaus elementą Δm veikiančių gretimų skysčio dalelių atstojamajai jėgai ΔN (34 pav.), nes priešingu atveju skysčio paviršius bus nenusistovėjęs. Be to, dar:

$$\Delta m\vec{g} + \Delta\vec{N} = \Delta m\vec{a}.$$



34 pav.

Iš čia

$$\begin{cases} \Delta N_x = \Delta ma\cos\alpha, \\ \Delta N_y = \Delta ma\sin\alpha + \Delta mg. \end{cases}$$

Jėga $\Delta\vec{N}$ su vertikale sudaro kampą β:

$$\beta = \arctan\frac{\Delta N_x}{\Delta N_y} = \frac{a\cos\alpha}{g + a\sin\alpha}. \qquad \text{(a)}$$

Jėgos $\Delta\vec{N}$ kryptimi išplauks iš skysčio gilumos į paviršių lengvesni už skystį daiktai. Ta pačia kryptimi bus nukreipta ir Archimedo jėga $\vec{F}_A$, kuri veikia skysčio paviršiuje plūduriuojantį kūną:

$$m\vec{g} + \vec{F}_A = m\vec{a}$$
$$\Rightarrow \vec{F}_A = m(\vec{a} - \vec{g}). \qquad \text{(b)}$$

Skysčio paviršius statmenas ir Archimedo jėgai $\vec{F}_A$. Pažymėkime:

$$\vec{g}' = \vec{g} - \vec{a}. \qquad \text{(c)}$$

Vektorių $\vec{g}'$ galima vadinti *efektyviniu laisvojo kritimo pagreičiu*. Tuomet Archimedo jėga:

$$\vec{F}_A = -m\vec{g}'. \qquad \text{(d)}$$

Kūno sunkis tokiose sąlygose:

$$\vec{F}_s = m\vec{g}'. \qquad \text{(e)}$$

Lygybės (a) ir (b) arba (d) duoda mums du ieškomus atsakymus. Dar reikia rasti plūduriuojančio kūno grimzlę. Tegul kūnas yra prizmės pavidalo. Jos pagrindo plotą, aukštį, grimzlę ir tankį pažymėkime atitinkamai S, H, h ir ρ (34 pav.), o skysčio tankį – ρ_s. Pagal Archimedo jėgos apibrėžimą dabar rašome:

$$F_A = \rho_s S h g',$$

o pagal (d) lygybę:

$$F_A = mg' = \rho S H g'.$$

Iš šių dviejų lygčių turime:

$$h = H\frac{\rho}{\rho_s}, \ \rho_s > \rho. \qquad \text{(f)}$$

Taigi, **plūduriuojančių kūnų grimzlė nuo sistemos (indo) pagreičio nepriklauso**. Gautų formulių panaudojimas supaprastėja, kai sistemos pagreičio $\vec{a}$ kryptį nusakantis kampas $\alpha = 0, \pm 90^0$. Kai a=0, turime žinomus įprastus atvejus.

Iki šiol mes mąstėme inercinėje atskaitos sistemoje. Neinercinėje sistemoje, judančioje kartu su indu, įvedus nešimo inercijos jėgą $(-\Delta m\vec{a})$, rašytume:

$$\Delta m\vec{g} + \Delta\vec{N} + (-\Delta m\vec{a}) = \vec{0}$$

ir toliau gautume tą patį. Bet remdamiesi *inercijos ir gravitacijos jėgų ekvivalentiškumu*, galime iš karto tarti, kad šiuo atveju prie tikro gravitacijos lauko reikia pridėti sukurtą gravitacijos lauką. Tikrajame lauke laisvojo kritimo pagreitis yra $\vec{g}$, o dirbtiniame - $(-\vec{a})$. Laisvojo kritimo pagreitis „atstojamajame“ arba efektyviajame lauke:

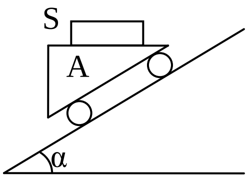
$$\vec{g}' == \vec{g} + (-\vec{a}) = \vec{g} - \vec{a}.$$

Dydį $\vec{g}'$ (atskiru atveju $\vec{g}$) dar vadina *gravitacinio lauko stipriu*.

Toliau galime tarti, kad sistema (indas) visai nejuda, tik jame laisvojo kritimo pagreičio $\vec{g}'$ kryptis yra „vertikalės žemyn“ kryptis. Archimedo jėga yra priešingos krypties, skysčio paviršius – jai statmenas ir t.t.

Kokybiškai toks mąstymas tinka ir besisukančioms sistemoms, tik tada pagreičio $\vec{a}$, taip pat vektoriaus $\vec{g}'$ laukas bus nevienalytis, skysčio paviršius nebus plokščias.

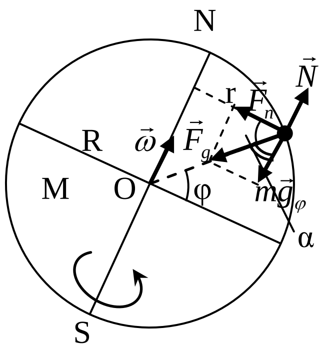
Pratybos



35 pav.

1. Paaiškinkite inercinėse atskaitos sistemose tuos pavyzdžius, apie kuriuos buvo kalbėta 2.1 paragrafo pradžioje.
2. Medicininės svarstyklės S yra padėtos ant vežimėlio A, kuris be trinties gali judėti nuožulnia plokštuma (35 pav.). Ant svarstyklių stovi 60 kg masės žmogus. Koks yra nuožulnios plokštumos kampas α, jei, leidžiantis šia plokštuma žemyn, svarstyklės rodo 45 kg? Ats.: 30^0.

3. Atviru viršumi vagonas, kurio aukštis 2 m ir ilgis 1,5 m, prakiuro prie pat priešakinės sienelės. Kokiu pagreičiu turi judėti vagonas, kad išliktų maksimalus vandens kiekis?
4. Du vienodos masės M kroviniai pritvirtinti prie siūlo, permesto per nejudamą skridinį. Ant vieno krovinio uždedamas papildomas m masės krovinys. 1) Kokiu pagreičiu judės kroviniai? 2) Koks bus siūlo įtempimas judėjimo metu? 3) Kokia jėga papildomas krovinys slėgs krovinį M? 4) Kokia jėga slėgs skridinio ašį, judant kroviniams? Skridinio masės, siūlo svorio ir oro pasipriešinimo nepaisykite.
Ats.: 1) $a = \dfrac{mg}{2M + m}$. 2) $T = \dfrac{2Mg(M + m)}{2M + m}$. 3) $N = \dfrac{2mMg}{2M + m}$. 4) $T_1 = 2T$.
5. Kaip turi keistis vertikaliai aukštyn nuo Žemės judančios raketos pagreitis, kad raketos kabinoje esantieji daiktai kabinos grindis spaustų pastovia jėga, k kartų didesne už svorį Žemės paviršiuje? Į kitų kūnų veikimą ir Žemės sukimąsi aplink savo ašį nekreipkite dėmesio.
Ats.: $a = g\left(k - \dfrac{R^2}{r^2}\right)$, kur R – Žemės spindulys, r – kabinos atstumas iki Žemės centro.



23 pav.

6. Išspręskite 2.2 paragrafo pratybų 1 uždavinį inercinėje atskaitos sistemoje.
Ats.: Vietoje 23 pav. reikia naudoti 36 pav.

III. KIETOJO KŪNO STATIKA
3.1 Pagrindinės statikos aksiomos. Pagrindiniai statikos uždaviniai

Nagrinėsime tiktai absoliučiai kietus kūnus. Deformacijų nepaisysime. Kūnų deformacijos nagrinėjamos kitose fizikos šakose: medžiagų atsparumo, tamprumo teorijoje.
Statikoje visas jėgas, veikiančias kūną, vadina jėgų sistema. Jėgų sistemos gali būti labai įvairios. Dažnai tenka vieną jėgų sistemą pakeisti kita, paprastesne, t.y., ekvivalentiška jai sistema. Pati paprasčiausia sistema yra dviejų lygių, priešingų krypčių ir gulinčių vienoje tiesėje, jėgų sistema. Tokios jėgos yra vadinamos **atsvarinėmis jėgomis**. Dviejų lygių, priešingų krypčių ir gulinčių lygiagrečiose tiesėse, jėgų sistema yra vadinama jėgų dvejetu. Jėgų sistemos visų jėgų vektorinė arba geometrinė suma vadinama **pagrindiniu vektoriumi** $\vec{R}$, t.y.,

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i . \qquad (1)$$

Jėgų sistema, veikianti kūną, gali jį paslinkti arba ne. Jei kūnas neslenka, tai sakome, kad jis yra rimtyje. Jėgų sistema vadinama **pusiausvirąja**, jeigu ji, pridėta prie rimtyje esančio kūno, nepažeidžia jo rimties.

Kaip daugelis teorijų, statika remiasi tam tikrais pagrindiniais teiginiais, vadinamais aksiomomis. **Pagrindinės statikos aksiomos:**

1. Dviejų jėgų sistema yra pusiausviroji tada ir tik tada, kai šios jėgos yra atsvarinės jėgos.

Šios aksiomos teisingumą patvirtina bandymai, pvz., jeigu prie nejudančio kūno pridėsime dvi atsvarines jėgas $\vec{F}_1$ ir $\vec{F}_2$, tai jos kūno rimties nepakeis. Teisingas ir atvirkščias teiginys. Jei kūnas, veikiamas dviejų jėgų yra rimtyje, tai tos jėgos yra atsvarinės.

2. Jeigu prie pusiausvyros jėgų sistemos pridėsime arba atimsime dvi atsvarines jėgas, tai sistemos pusiausvyra nebus pažeista.

Iš šios aksiomos seka išvada, kad nepažeidžiant jėgų sistemos pusiausvyros, galime kiekvieną sistemos jėgą perkelti jos veikimo linija į bet kurį kitą tašką. Šį teiginį siūlome skaitytojui įrodyti pačiam.

3. Jeigu pusiausvyroje jėgų sistemoje yra dvi jėgos $\vec{F}_1$ ir $\vec{F}_2$, turinčios bendrą pridėjimo tašką, tai nepažeisdami pusiausvyros, galime jėgas $\vec{F}_1$ ir $\vec{F}_2$ pakeisti viena jėga $\vec{F}$, turinčia tą patį pridėjimo tašką ir lygia lygiagretainio, nubrėžto ant duotų $\vec{F}_1$ ir $\vec{F}_2$ kraštinių, įstrižainei (vektorinei sumai).

Iš šios aksiomos seka išvada, kad, nepažeidžiant pusiausvyros, galima bet kurią sistemos jėgą $\vec{F}$ pakeisti dviem jėgomis $\vec{F}_1$ ir $\vec{F}_2$, turinčiomis tą patį pridėjimo tašką kaip ir jėga $\vec{F}$, ir lygiomis lygiagretainio, kurio įstrižainė yra $\vec{F}$, kraštinėms. Kitaip sakant, bet kurią jėgą galime pagal lygiagretainio taisyklę išskaidyti į dvi jėgas.

4. Jeigu vienas kūnas veikia kitą kokia nors jėga $\vec{F}$, tai antrasis kūnas veikia pirmąjį jėga $\left(-\vec{F}\right)$. Tai jau žinomas trečiasis Niutono dėsnis.

Sakėme, kad dažnai vieną jėgų sistemą tenka pakeisti kita. Tam naudojamos elementarios operacijos. Jų yra dvi. Pirmoji paprasčiausia operacija yra dviejų atsvarinių jėgų prijungimas prie duotos jėgų sistemos arba jų atėmimas. Antroji paprasčiausia operacija yra dviejų jėgų, turinčių bendrą pridėjimo tašką, pakeitimas viena jėga pagal lygiagretainio taisyklę. Iš statikos aksiomų seka, kad elementarios operacijos pusiausvyros nekeičia.

Dvi jėgų sistemos yra lygiavertės, jei vieną jų galima pervesti į kitą paprasčiausiomis operacijomis. Jei tomis operacijomis jėgų sistemą galima pakeisti viena jėga $\vec{F}$, tai ši jėga yra vadinama duotosios sistemos **atstojamąja** jėga. Pusiausvirą jėgų sistemą pakeitus kita, jai lygiaverte, pusiausvyra nepažeidžiama.

Jėgų sistemos atstojamosios $\vec{F}$ ir pagrindinio vektoriaus $\vec{R}$ sąvokos yra skirtingos. Pagrindinį vektorių $\vec{R}$ galime surasti bet kokiai jėgų sistemai, ir jis yra laisvas vektorius, t.y., jo pridėjimo tašką galima pasirinkti bet kur. Tuo tarpu atstojamoji jėga $\vec{F}$ ne visada egzistuoja, o kai egzistuoja, tai jos pridėjimo taškas yra ne bet kur, o turi būti apibrėžtoje veikimo linijoje. Tarp šių sąvokų bendra tai, kad, jei egzistuoja jėgų atstojamoji $\vec{F}$, tai ji geometriškai yra lygi pagrindiniam vektoriui $\vec{R}$.

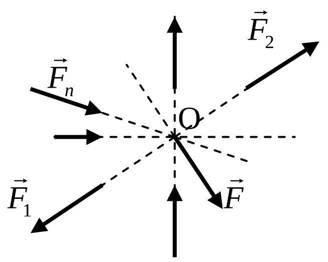
Pagrindiniai statikos uždaviniai:

1. Rasti jėgų sistemos būtinas ir pakankamas pusiausvyros sąlygas.
2. Rasti dviejų jėgų sistemų lygiavertiškumo būtinas ir pakankamas sąlygas.
3. Rasti bet kokios jėgų sistemos kanoninį vaizdą, t.y., surasti pačią paprasčiausią jėgų sistemą, lygiavertę duotajai.

3.2 Jėgų sistemos atstojamoji

Dažnai ieškant jėgų sistemos kanoninio vaizdo, reikia surasti pagrindinį vektorių arba jėgų atstojamąją. Pagrindinį vektorių lengva surasti geometriškai Kinematikoje nurodytu būdu sudedant visas sistemos jėgas. Sunkiau yra surasti jėgų sistemos atstojamąją. Mat, apart geometrinės arba vektorinės jėgų sumos reikia dar surasti jėgų atstojamosios veikimo liniją. Panagrinėkime keletą atstojamosios jėgos suradimo atvejų.

1. Susikertančių jėgų sistema

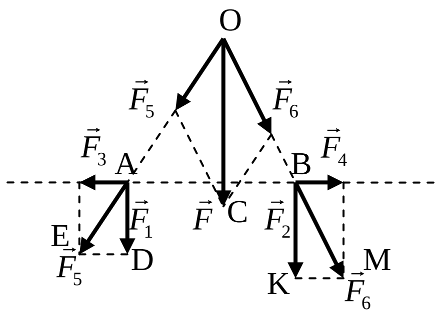


37 pav.

Susikertančių jėgų sistema yra tada, kai visų jėgų linijos susikerta viename taške (37 pav.). Tokia jėgų sistema visuomet turi atstojamąją jėgą. Ją nesunku surasti panaudojant paprasčiausias operacijas. Pritaikę pirmąją paprasčiausią operacija, visų jėgų vektorių pradžias perkelkime į susikirtimo tašką O ir po to pagal antrąją operaciją paeiliui geometriškai pagal lygiagretainio taisyklę sudėkime. Gausime vieną jėgą $\vec{F}$, kuri ir bus šios sistemos atstojamoji:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i .$$

2. Dvi lygiagretės vienos krypties jėgos



38 pav.

Tegul tos jėgos yra $\vec{F}_1$ ir $\vec{F}_2$. Taškuose A ir B pridėkime dvi atsvarines jėgas $\vec{F}_3$ ir $\vec{F}_4$ tiesėje AB. Po to jėgas $\vec{F}_1$ ir $\vec{F}_3$ pakeiskime jėga $\vec{F}_5$, o $\vec{F}_2$ ir $\vec{F}_4$ - jėga $\vec{F}_6$. Gautas jėgas $\vec{F}_5$ ir $\vec{F}_6$ perkelkime į tašką O ir jas pakeiskime jėga $\vec{F}$. Panaudojome tik paprasčiausias operacijas, todėl jėga $\vec{F}$ yra lygiavertė sistemai $\vec{F}_1$ ir $\vec{F}_2$ ir tuo pačiu yra šių jėgų atstojamoji. Elementariosios operacijos nekeičia jėgų sistemos geometrinės sumos, todėl:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 . \qquad (1)$$

(1) lygybė rodo, kad atstojamoji jėga yra nukreipta duotųjų jėgų kryptimi ir jos didumas lygus jų didumų sumai.

Iš panašių trikampių OCA ir ADE, o taip pat OCB ir BKM seka:

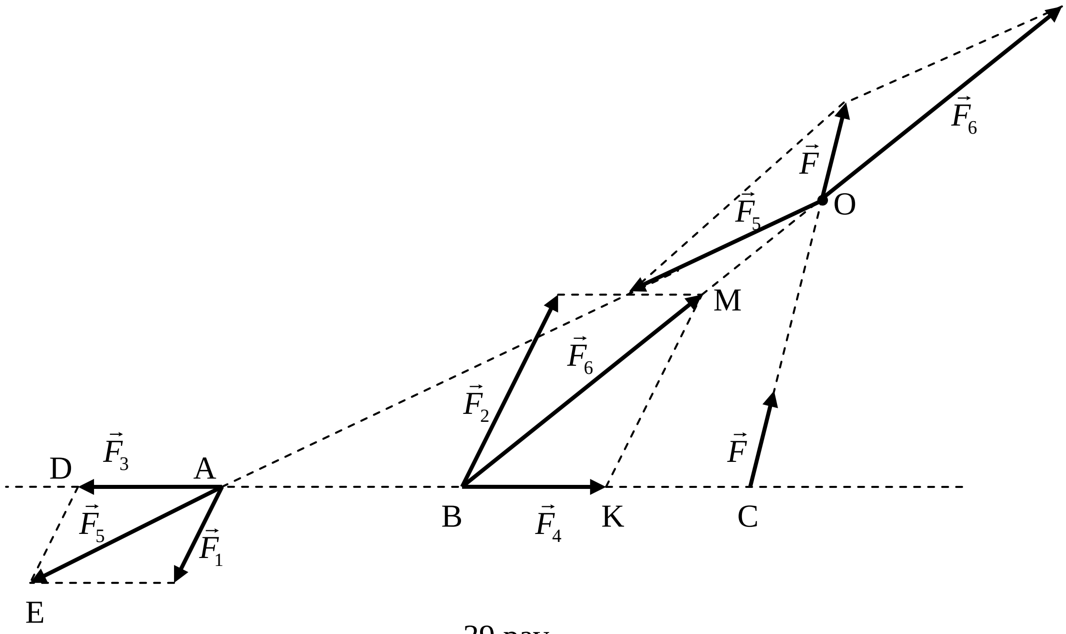
$$\frac{AC}{CO}=\frac{F_3}{F_1};\ \ \frac{CB}{CO}=\frac{F_4}{F_2};\ \ (F_3=F_4),$$

o iš čia

$$\frac{AC}{CB}=\frac{F_2}{F_1}. \qquad (2)$$

Taigi atstojamosios jėgos linija dalija kampą AB į dvi dalis, atvirkščiai proporcingas jėgoms F_1 ir F_2.

3. Dvi lygiagretės priešingų krypčių ir skirtingų didumų jėgos



39 pav.

Tegul tos jėgos yra $\vec{F}_1$ ir $\vec{F}_2$ ir $F_1 \neq F_2$ (39 pav.).

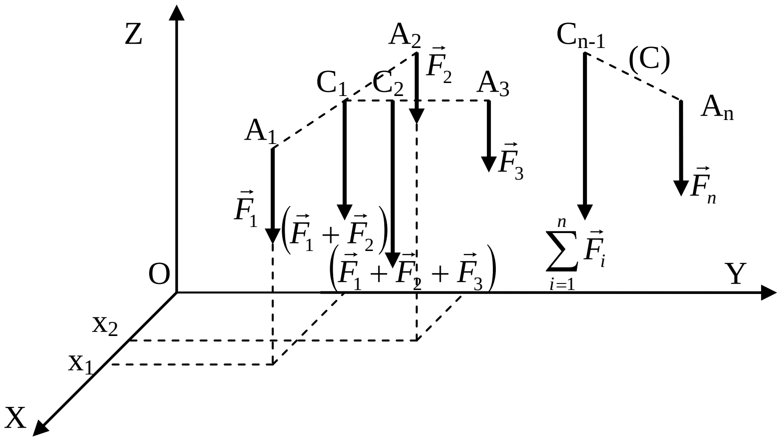
Taškuose A ir B pridėkime dvi statmenas jėgas $\vec{F}_3$ ir $\vec{F}_4$, tiesėje AB. Pakartoję analogiškas procedūras, kaip ir antruoju atveju, surasime atstojamąją jėgą $\vec{F}$, kuri yra lygiagreti jėgoms $\vec{F}_1$ ir $\vec{F}_2$, jos kryptis sutampa su dedamosios jėgos kryptimi, o didumas yra lygus duotųjų jėgų didumų skirtumui: $F=\left|\vec{F}_1-\vec{F}_2\right|$.

Iš panašių trikampių AOC ir ADE, o taip pat BOC ir BMK gausime:

$$\frac{AC}{BC}=\frac{F_2}{F_1}. \qquad (3)$$

Taigi atstojamosios jėgos linija yra jėgų pridėjimo taškų išorėje didesniosios jėgos pusėje, ir atstumai nuo jų yra atvirkščiai proporcingi jėgų didumams (pagalvokite, kokia būtų (3) lygybės prasmė, jei būtų F_1=F_2).

4. Daugelio lygiagrečių ir vienodos krypties jėgų sistema



40 pav.

Dviejų vienodos krypties lygiagrečių jėgų atstojamąją jau esame suradę. Belieka tai apibendrinti bet kokiam lygiagrečių vienodos krypties jėgų skaičiui (40 pav.).

Iš pradžių suraskime jėgų $\vec{F}_1$ ir $\vec{F}_2$ atstojamąją, kurios didumas lygus F_1+F_2, o vektoriaus linija eina per tašką C_1. Po to prie šios jėgos pridėkime jėgą $\vec{F}_3$. Atstojamosios jėgos didumas bus lygus $F_1+F_2+F_3$, o jos linija eis per tašką C_2 ir t.t. Tai surasime visų jėgų atstojamąją, kurios didumas bus lygus $\sum_{i=1}^{n} F_i$, o vektoriaus linija eis per tašką C_{n-1}, kurį pažymėkime C. Pagal (2) formulę galime parašyti:

$$\begin{cases} \dfrac{A_1C_1}{A_2C_1} = \dfrac{F_2}{F_1}; \ \dfrac{C_1C_2}{C_2A_3} = \dfrac{F_3}{F_1+F_2}; \ ...; \\ \dfrac{C_{n-2}C}{CA_n} = \dfrac{F_n}{\sum_{i=1}^{n} F_i}. \end{cases} \quad (4)$$

Taškas C yra vadinamas lygiagrečių jėgų sistemos centru. Suraskime to centro koordinates. Pažymėkime bet kurio taško A_k koordinates $(x_k, y_k, z_k), \forall k = 1,2,...,n$; taško $C_k - (x_k^0, y_k^0, z_k^0), \forall k = 1,2,...,n-1$, o lygiagrečių jėgų centro C koordinates (x, y, z). Taško C_1 koordinatė:

$$x_1^0 = x_1 + A_1C_1 \cos\alpha; \quad (5)$$

kur α yra kampas, kurį sudaro A_1C_1 su x ašimi:

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{A_1A_2} = \frac{x_2 - x_1}{A_1C_1 + C_1A_2}. \quad (6)$$

Pasinaudoję (4), (5) ir (6) lygtimis, galime rašyti:

$$x_1^0 = x_1 + (x_2 - x_1)\frac{F_2}{F_1}\frac{C_1A_2}{A_1C_1 + C_1A_2}$$
$$= \frac{F_1x_1 \cdot A_1C_1 + F_1x_1 \cdot C_1A_2 + F_2x_2 \cdot C_1A_2 - F_2x_1 \cdot C_1A_2}{F_1(A_1C_1 + C_1A_2)}$$
$$= \frac{F_1x_1 \cdot C_1A_2 + F_2x_2 \cdot C_1A_2}{F_1(A_1C_1 + C_1A_2)} = \frac{C_1A_2 \cdot (F_1x_1 + F_2x_2)}{C_1A_2(F_1 + F_2)};$$

$$x_1^0 = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2}{F_1 + F_2}. \tag{7}$$

Analogiškai taško C_2 koordinatė:

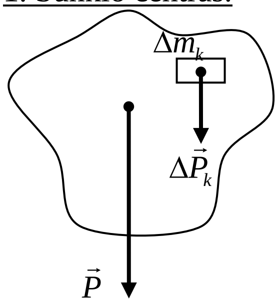
$$x_2^0 = \frac{(F_1 + F_2)x_1^0 + F_3 x_3}{F_1 + F_2 + F_3} = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3}{F_1 + F_2 + F_3}. \tag{8}$$

Tęsdami minėtą procedūrą, gausime ir taško C koordinates:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} F_k x_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} F_k}, \\ y = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} F_k y_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} F_k}, \\ z = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} F_k z_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} F_k}. \end{cases} \tag{9}$$

3.3 Sunkio ir masės centrai

1. Sunkio centras.



41 pav.

Tegul turime kietąjį kūną (41 pav.).
Kiekvieną jo dalelę veikia Žemės traukos jėga. Suskirstykime mūsų kūną į daugybę mažų kubelių, kurių skaičių pažymėkime n. Bet kurio kubelio masę Δm_k veikia Žemės traukos jėga $\Delta\vec{P}_k$. Visos šios jėgos sudarys lygiagrečių jėgų sistemą, jei mūsų kūnas yra mažas, lyginant jį su Žeme. Ši jėgų sistema turi tokios pat krypties atstojamąją $\vec{P}$ (1.2 paragrafe sunkio jėgą žymėjome $\vec{F}_s$). Ji lygi:

$$\vec{P} = \sum_{k=1}^{n} \Delta\vec{P}_k.$$

Jos centras, per kurį eina atstojamosios jėgos linija, yra vadinamas apytikriu sunkio centru C_n. Jo koordinates galima surasti pagal pareito paragrafo (9) lygtis.

$$x_n^0 = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \Delta P_k x_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} \Delta P_k}; \quad y_n^0 = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \Delta P_k y_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} \Delta P_k}; \quad z_n^0 = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \Delta P_k z_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} \Delta P_k}. \tag{1}$$

Jeigu šiose formulėse pereisime prie ribos, kai $\Delta P_k \to 0$, gausime tokslias kūno sunkio centro C koordinates:

$$x_c = \frac{1}{P}\lim_{\Delta P_k \to 0}\sum_{k=1}^{n}\Delta P_k x_k;\; y_c = \frac{1}{P}\lim_{\Delta P_k \to 0}\sum_{k=1}^{n}\Delta P_k y_k;\; z_c = \frac{1}{P}\lim_{\Delta P_k \to 0}\sum_{k=1}^{n}\Delta P_k z_k. \qquad (2)$$

Čia $P = \sum_{k=1}^{n}\Delta P_k$.

Neretai sunkio centrą vadina svorio centru.

2. Masės (inercijos) centras.

Sunkio centro sąvoka glaudžiai susijusi su masės (inercijos) centro sąvoka, kuri dažnai sutinkama sistemos dinamikoje. Apibrėžkime šią sąvoką.

Į (1) lygtis įrašykime $\Delta P_k = \Delta m_k g$:

$$x_n^0 = \frac{\sum_{k=1}^{n}\Delta m_k g x_k}{\sum_{k=1}^{n}\Delta m_k g} = \frac{\sum_{k=1}^{n}\Delta m_k x_k}{\sum_{k=1}^{n}\Delta m_k} = \frac{\sum_{k=1}^{n}\Delta m_k x_k}{M}, \qquad (3)$$

kur $M = \sum_{k=1}^{n}\Delta m_k$ yra visa kūno masė. Perėję prie ribos, kai $\Delta m_k \to 0$, gausime masės centro C koordinates:

$$\begin{cases} x_c = \dfrac{1}{M}\lim\limits_{\Delta m_k \to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}\Delta m_k x_k, \\ y_c = \dfrac{1}{M}\lim\limits_{\Delta m_k \to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}\Delta m_k y_k, \\ z_c = \dfrac{1}{M}\lim\limits_{\Delta m_k \to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}\Delta m_k z_k. \end{cases} \qquad (4)$$

Šias lygtis gavome, remdamiesi sunkio centro sąvoka. Bet dažnai (4) lygtys vadinamos masės centro apibrėžimu. Jeigu sunkio jėgų laukas (gravitacijos laukas) nevienalytis, masių centras nesutampa su svorio centru, nes tada (3) lygybėje nesusiprastina dydis g. Be to, masės centro sąvoka tinka bet kokiai mechaninei sistemai, tuo tarpu sunkio centro sąvoka tinka tiktai toms mechaninėms sistemoms, kurias veikia visuotinės traukos jėgos. Pavyzdžiui, dangaus mechanikoje sistemai Žemė – Mėnulis galime taikyti masės centro sąvoką, gi sunkio centro sąvoka netaikoma. Taigi masės centro sąvoka yra bendresnė ir universalesnė.

Dinamikoje, nagrinėjant bet kokios sistemos judėjimą, vartojama masės centro sąvoka, o technikoje, kur dažniausiai nagrinėjami kūnai, esantys Žemės traukos jėgų lauke, vartojama sunkio centro sąvoka. Kūnui slenkant su pagreičiu, masės centre yra pridėta inercijos jėga, per masės centrą eina laisvosios sukimosi ašys.

Iš Kinematikos žinome, kad, turint kokios nors taško koordinates, yra žinomas ir to taško radiusas-vektorius $\vec{r}$:

$$\vec{r} = \{x, y, z\} \equiv x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Todėl, remiantis (4) lygybėmis, masių centro radiusas-vektorius:

$$\vec{r}_c = \frac{1}{M}\lim_{\Delta m_k \to 0}\sum_{k=1}^{n}\Delta m_k \vec{r}_k. \qquad (5)$$

Skaitiklyje esančią sumą tolydinėms aplinkoms galime pakeisti į integralą. Todėl (5) galima ir taip perrašyti:

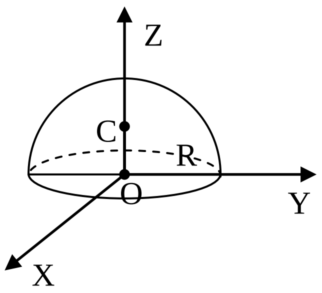
$$\vec{r}_c = \frac{1}{M}\int_{(M)} dm\vec{r},$$

kur $M = \int_{(M)} dm.$

Masių centro sąvoka bus reikalinga ir tolimesniuose mechanikos (ne tik mechanikos) skyriuose.

Pagal (4) formules galima nesunkiai surasti kai kurių taisyklingos geometrinės formos vienalyčių kūnų masės centro koordinates. Be išvedimo užrašysime jas.

Pusės rutulio:

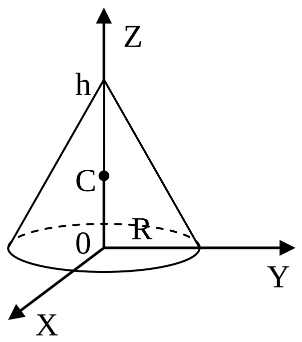


42 pav.

$$x_c = 0,$$
$$y_c = 0,$$
$$z_c = \frac{3}{8}R.$$

Kūgio:

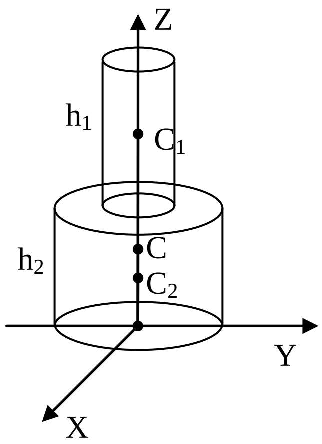
$$x_c = 0,$$
$$y_c = 0,$$
$$z_c = \frac{1}{4}h.$$



43 pav.

Vienalyčio rutulio, cilindro ir kai kurių kitų kūnų masės centras sutampa su jų geometriniu centru.

Pratybos



44 pav.

1. Nustatykite brėžinyje (44 pav.) parodytų dviejų vienalyčių ritinių sistemos masės centrą. Ritinių matmenys ir koordinačių sistema nurodyta brėžinyje.

$r_1 = 5cm, r_2 = 10cm, h_1 = 10cm, h_2 = 15cm.$

Sprendimas

Vienalyčio ritinio masės centro vieta yra jo aukštinės viduryje. Todėl, pažymėję abiejų ritinių masių centrų koordinates atitinkamai (x_1, y_1, z_1) ir (x_2, y_2, z_2), galime rašyti:

$$x_1 = 0, y_1 = 0, z_1 = 20cm, x_2 = 0, y_2 = 0, z_2 = 7{,}5cm.$$

Sistemos masių centro koordinatės pagal (3) yra tokios:

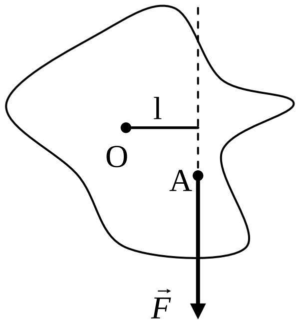
$$x_c = 0, y_c = 0,$$
$$z_c = \frac{h_1 z_1 r_1^2 + h_2 z_2 r_2^2}{h_1 r_1^2 + h_2 r_2^2};$$

Įrašę skaitines vertes, gausime:

$$z_c = 9{,}3cm.$$

3.4 Jėgų momentas

Jėgos momento sąvoka atsirado nagrinėjant jėgų, pridėtų prie kūno, turinčio nejudamą tašką arba ašį, sukamąjį poveikį.
Dar Archimedas III a. p.m.e. nustatė sverto taisyklę, atrado jėgos sukamojo poveikio kiekybinį matą. Tačiau jėgos momento sąvokos jis nenaudojo. Ši sąvoka atsirado žymiai vėliau. Ją pirmą kartą formulavo Leonardas da Vinčis (Leonardo da Vinci), gyvenęs 1452-1519 m.



45 pav.

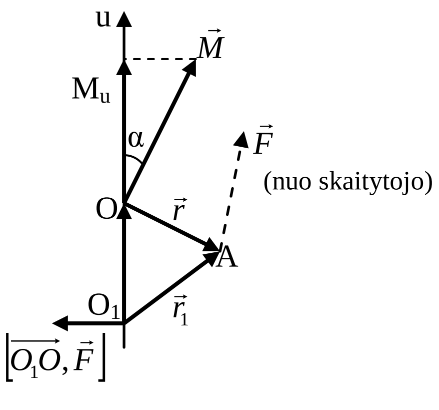
VIII klasėje apibrėžtas jėgos F momentas ašies O, statmenos brėžinio plokštumai, atžvilgiu (45 pav.):

$$M = Fl \qquad (1)$$

yra jėgos sukamojo poveikio matas. Tačiau bendresniu atveju kūnas gali suktis ne apie ašį, o apie tašką O įvairiomis kryptimis. Todėl (1) skaliarinė sąvoka nėra pakankama. Pilniau sukamąjį jėgos poveikį nusako Kinematikos konspekto 1.5 paragrafo (8) formule apibrėžta vektorinė jėgos momento sąvoka:

$$\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right]. \qquad (2)$$

Ten taip pat parodyta, kad vektoriaus $\vec{M}$ didumas M sutampa su (1) formule, apibrėžta, kad vektorius $\vec{M}$ kurio nors taško O atžvilgiu priklauso nuo taško parinkimo, kad jėgos momentai koordinačių ašių atžvilgiu yra vektoriaus $\vec{M}$ projekcijos į tas ašis $\left(M_x, M_y, M_z\right)$, pateikti du būdai toms projekcijoms skaičiuoti.



46 pav.

Pavaizduokime ten pateiktą formulę:

$$M_x = M\cos\alpha,$$

pritaikę ją bet kokios krypties ašiai u (46 pav.). Projekcija

$$M_u = M\cos\alpha. \qquad (3)$$

Ji nepriklauso nuo taško O ašyje u pasirinkimo. Iš tikrųjų, jėgos $\vec{F}$, pridėtos taške A, momentas taško O atžvilgiu:

$$\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right]$$

Tegul jėga $\vec{F}$ statmena popieriaus plokštumai ir nukreipta nuo skaitytojo. Tada $\vec{M}$ gulės popieriaus plokštumoje. Tą sakome tik dėl brėžinio aiškumo. Minėto teiginio įrodymui tai nebūtina.
Pasirinkime ašyje u kitą tašką O_1. Tos pačios jėgos momentas taško O_1 atžvilgiu:

$$\vec{M}_1 = \left[\vec{r}_1, \vec{F}\right] = \left[\left(\overrightarrow{O_1O} + \vec{r}\right), \vec{F}\right] = \left[\overrightarrow{O_1O}, \vec{F}\right] + \left[\vec{r}, \vec{F}\right] = \left[\overrightarrow{O_1O}, \vec{F}\right] + \vec{M}.$$

Momento $\vec{M}_1$ projekcija:

$$M_{1u} = \left[\overrightarrow{O_1O}, \vec{F}\right]_u + M_u.$$

Tačiau $\left[\overrightarrow{O_1O}, \vec{F}\right] \perp \overrightarrow{O_1O} \Rightarrow \left[\overrightarrow{O_1O}, \vec{F}\right]_u = \vec{0}.$ Teiginys įrodytas.

Jėgos momento $\vec{M}$ projekcija M_u į kurią nors ašį u yra tos jėgos sukamojo poveikio apie tą ašį matas.

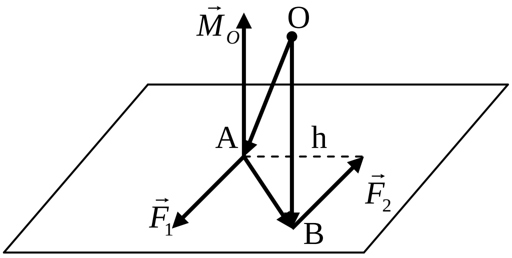
Kai turime daugelio jėgų sistemą $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$, tai visų jų momentų to paties taško O atžvilgiu vektorinė suma vadinama tų jėgų **pagrindiniu momentu taško O atžvilgiu**, o visų momentų projekcijų į tą pačią ašį u suma – **pagrindiniu momentu ašies u atžvilgiu**:

$$\vec{M}_O = \vec{M}_{O1} + \vec{M}_{O2} + ... + \vec{M}_{On} = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_{Ok}; \tag{4}$$

$$M_{Ou} = M_{Ou1} + M_{Ou2} + ... + M_{Oun} = \sum_{k=1}^{n} M_{Ouk}. \tag{5}$$

Paprasčiausių operacijų (atsvarinių jėgų prijungimas arba atėmimas ir dviejų jėgų, turinčių bendrą pridėjimo tašką, pakeitimas viena jėga pagal lygiagretainio taisyklę) atlikimas jėgų sistemoje nekeičia pagrindinio momento taško atžvilgiu ir pagrindinio momento ašies atžvilgiu.

Jėgų dvejetas



47 pav.

Tai jau minėta dviejų vienodo didumo ir prišingų krypčių $\vec{F}_1$ ir $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ jėgų, negulinčių vienoje tiesėje, sistema. Ta sistema įdomi tuo (buvo taip pat minėta), kad ji neturi atstojamosios jėgos. Mat negalima rasti atstojamosios jėgos pridėjimo taško arba veikimo linijos. Tai matyti iš 3.2 paragrafo (3) formulės, norint ją pritaikyti jėgų dvejetui. Jau 3.2 paragrafe siūlėme apie tai pagalvoti skaitytojui. Jėgų dvejeto pagrindinis vektorius $\vec{R} = \vec{F} - \vec{F} = \vec{0}$.

Rasime jėgų dvejeto pagrindinį momentą. Pagal (4) tas momentas:

$$\vec{M}_O = \vec{M}_{O1} + \vec{M}_{O2} = [\overrightarrow{OA}, \vec{F}_1] + [\overrightarrow{OB}, \vec{F}_2].$$

Iš brėžinio matome, kad

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}.$$

Todėl

$$\vec{M}_O = [\overrightarrow{OA}, \vec{F}_1] + [(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}), \vec{F}_2] = [\overrightarrow{OA}, (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)] + [\overrightarrow{AB}, \vec{F}_2].$$

Kadangi $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$, tai

$$\vec{M}_O = [\overrightarrow{AB}, \vec{F}_2] \tag{6}$$

Matome, kad jėgų dvejeto pagrindinis momentas nepriklauso nuo taško O pasirinkimo ir nrlygus nuliui, nes $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ ir $\overrightarrow{AB}$ nelygiagretus $\vec{F}_2$. Taigi jėgų dvejeto pagrindinį momentą galima vadinti tiesiog dvejeto momentu, paties jėgų dvejeto charakteristika. Galima parodyti, kad jėgų dvejeto pagrindinis momentas yra laisvasis vektorius.

Iš (6) lygybės seka, kad dvejeto momentas yra statmenas į dvejeto plokštumą ir jo modulis (didumas)

$$M_O = M = Fh. \tag{7}$$

Čia h yra atstumas tarp jėgų linijų, vadinamas dvejeto petimi, o $F = |\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$.

Jėgų dvejeto momentas yra nukreiptas į tą pusę, iš kurios žiūrint dvejeto jėgos suka kūną prieš laikrodžio rodyklę. Kalbant toliau, (6) lygybėje indeksą „O“ ir žodį „pagrindinis“ galima praleisti.

3.5 Kietojo kūno pusiausvyros sąlygos

Kad kūnas būtų pusiausvyroje, yra būtina ir pakankama sąlyga, kad kūną veikiančių jėgų pagrindinis vektorius ir pagrindinis momentas bet kurio taško atžvilgiu būtų lygus nuliui. Šį teiginį galima vadinti teorema ir ją įrodyti; galima vadinti ir aksioma. Pasitenkinsime antruoju požiūriu. Taigi jei jėgų sistemos pagrindinis vektorius yra $\vec{R}$, ir pagrindinis momentas taško O atžvilgiu $\vec{M}_O$, tai kietojo kūno pusiausvyros sąlygos bus:

$$\vec{R} = \vec{0}; \vec{M}_O = \vec{0}. \tag{1}$$

Šios lygybės yra vektorinės kietojo kūno pusiausvyros lygtys. Parašysime jas ir skaliarine forma, pasirinkdami Dekarto koordinačių sistemą XYZ. Vektorius lygus nuliui, kai visos trys jo projekcijos lygios nuliui. Todėl iš (1) seka:

$$(R_x, R_y, R_z) = (0,0,0);\ (M_{Ox}, M_{Oy}, M_{Oz}) = (0,0,0).$$

Turėdami galvoje, kad $\vec{R} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k$ ir remdamiesi 3.4 paragrafo (5) lygtimi, gauname:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0;\ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0;\ \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0; \\ \sum_{k=1}^{n} M_{Ox} = 0;\ \sum_{k=1}^{n} M_{Oy} = 0;\ \sum_{k=1}^{n} M_{Oz} = 0. \end{cases} \tag{2}$$

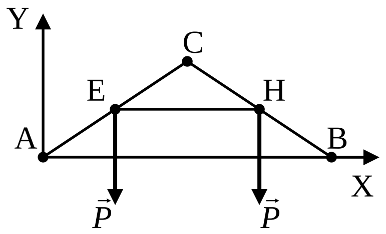
Šios lygybės yra vadinamos **pagrindinėmis kietojo kūno statikos lygtimis**. Pirmosios trys yra jėgų projekcijoms, kitos trys – jų momentų projekcijoms. Iš tų lygčių sistemos galima surasti 6 nežinomuosius. Tačiau kartais kai kurios lygtys gali virsti tapatybėmis, ir tuomet galėsime surasti mažiau nežinomųjų. Jeigu nežinomųjų skaičius yra didesnis už lygčių skaičių, tai statikos metodais visų jų surasti negalėsime. Tokį uždavinį statikoje vadina neapibrėžtu.

Kai kūnas juda erdve laisvai, pvz., Žemės sukasi apie Saulę, jį veikiančios jėgos (gravitacijos, elektromagnetinės ir kt.) vadinamos **aktyviomis jėgomis**. Kai kūnas remiasi į kokią nors atramą ar yra kaip nors pakabintas, jis gali judėti, pvz., tik nuožulnios plokštumos paviršiuje, tik apskritimo lanku ir panašiai, t.y., jo judėjimas yra suvaržytas. Judėjimą suvaržo ryšiai: plokštuma, siūlas, bėgiai ir pan. Tokių kūnų judėjimas aiškinamas **ryšių reakcijos jėgomis**: plokštumos reakcija, lanko reakcija, bėgių reakcija. Bendru atveju reakcijos jėgos gali sudaryti įvairius kampus su varžančiu judėjimą paviršiumi ar kreive. Tokias jėgas paprastai skaido į statmenąją reakcijos jėgą ir lygiagrečiąją – trinties jėgą, panašiai kaip tai darėme 1.2 paragrafe arba Kinematikos 1.2 paragrafe. Kai yra trinties jėgos, ryšiai vadinami **realiais**, o kai trinties jėgų nėra – **idealiais** arba absoliučiai slidžiais. Ryšių reakcijos jėgos priklauso nuo aktyviųjų jėgų. Pavyzdžiui, nuožulniosios plokštumos reakcijos jėga priklauso nuo kūno sunkio. Todėl ryšio reakcijos jėgos dar vadinamos pasyviomis jėgomis, ir joms, griežtai tariant, negalioja 1.1 paragrafe aptartas jėgų nepriklausomybės

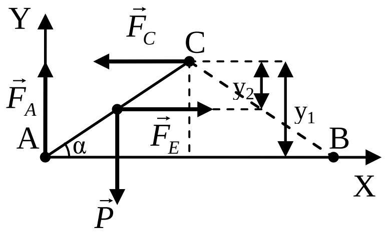
principas. Mokomojoje literatūroje ryšių reakcijos jėgos šiuo metu dažniausiai aiškinamos kaip tamprumo jėgos.
Į kieto kūno pusiausvyros lygtis (1) ir (2) įeina visos – aktyvios ir pasyvios (ryšių reakcijos) jėgos.

Pratybos

1. Kiekvieną stogo gegnę (48 pav. pažymėtos AC ir CB) veikia bendra stogo ir gegnės sunkio jėga $P = 800 \cdot 9{,}81N$. Gegnes pavaizduotoje būsenoje palaiko skersinis EH, kurio ilgis 1,5 karto mažesnis už atstumą tarp gegnių galų ir 1,2 karto didesnis už gegnės ilgį. Sunkio jėgą galima laikyti pridėtą gegnės viduryje. Kokios jėgos veikia skersinio galus?
Sprendimas



48 pav.



49 pav.

Pažymėkime EH=l. Tuomet AB=1,5l; AC=CB=0,83l. Pavaizduokime vieną gegnę veikiančias jėgas (49 pav.). Tada

$$\alpha = \arccos\frac{AB}{2 \cdot AC} = 25{,}84^0.$$

Projektuojame jėgas į X ir Y ašis ir pasinaudojame pusiausvyros sąlygomis:

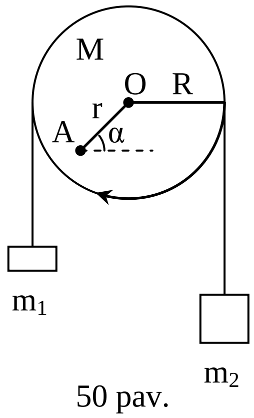
$$F_E - F_C = 0;\ F_A - P = 0 \Rightarrow F_E = F_C;\ F_A = P.$$

Parašykime pusiausvyros sąlygą jėgų momentams taško A atžvilgiu:

$$F_C \cdot 0{,}83l \sin\alpha - P \cdot 0{,}83 \cdot 0{,}5l \cos\alpha - F_E(y_1 - y_2) = 0,$$

$$y_1 - y_2 = 0{,}75l \tan\alpha - 0{,}5l \tan\alpha = 0{,}25l \tan\alpha,$$

$$F_E = \frac{0{,}415P\cos\alpha}{0{,}83\sin\alpha - 0{,}25\tan\alpha} = 12145N.$$



50 pav.

2. Skridinio svorio centras A nutolęs nuo sukimosi ašies, einančios per geometrinį centrą O, atstumas OA=r. Skridinio masė M, spindulys R. Per skridinį permesto siūlo galuose pakabinti pasvarai, kurių masės m_1 ir m_2, be to, $m_1 < m_2$. Kokį kampą α su horizontalia sudarys atkarpa AO, nusistovėjus pasvarų judėjimui, jei skridinys tada nesisuka? Trinties tarp siūlo ir skridinio koeficientas proporcingas siūlo greičiui skridinio atžvilgiu (50 pav.).

Ats.: $\alpha = \arccos\frac{(m_2 - m_1)R}{Mr}.$

3. Ratas, kurio spindulys R ir masė m, pastatytas prie h aukščio laiptelio. Kokia mažiausia horizontalia jėga F reikia

veikti rato ašį, kad būtų galima užritinti jį ant laiptelio? Kokiai jėgos krypčiai esant, ratui užritinti reikalinga pati mažiausia jėga F_{min}? Koks tos jėgos didumas?

Pagrindinė literatūra

1. J. A. Martišius, P. Urbonas. Fizikos fakultatyvinių užsiėmimų turinys IX klasėje. Vilnius, 1979.
2. O. V. Golubeva. Teorinė mechanika. Maskva, 1961 (rusų kalba).
3. G. M. Finkelšteinas. Teorinės mechanikos kursas. Maskva, 1959 (rusų kalba).
4. S. F. Frišas ir A. V. Timoreva. Bendrosios fizikos kursas, I tomas. Vilnius, 1955.

Turinys