Specialioji reliatyvumo teorija

Aleksas Mazeliauskas

2011 m. sausio 9 d.

Literatūra

- V. Matvejevas, „Mechanika ir reliatyvumo teorija"
- B. Schumacher, „Physics in spacetime"
- A. Tamašauskas, Fizika I

Įvadas

Fizikų tikslas yra aprašyti visus gamtoje vykstančius procesus. Tam reikalinga turėti *atskaitos sistemą* – būdą vienareikšmiškai sužymėti visus įvykius erdvėje ir laike. Reliatyvumo teorijos nagrinėja, kaip mūsų erdvės ir laiko supratimas kinta priklausomai nuo atskaitos sistemos pasirinkimo. *Specialioji reliatyvumo teorija* tyrinėja tik tam tikros rūšies sistemas – *inercines atskaitos sistemas*, kai gravitacinių jėgų galime nepaisyti. Tuo tarpu *Bendroji reliatyvumo teorija* apima visą kitą. Mes pasistengsime išsiaiškinti kas yra inercinė atskaitos sistema ir kaip ją galima sukonstruoti. Tada remdamiesi esminėmis erdvės ir laiko savybėmis išvesime *Lorenco transformacijas* ir galiausiai paaiškinsime keletą „paradoksų".

Atskaitos sistemos

Pirmutinis dalykas reikalingas bet kokiai atskaitos sistemai yra *atskaitos kūnas*. Be jo atstumas erdvėje neturi prasmės. Įsivaizduokite, kad aplinkoje nieko nėra, visur tuštuma ir net nematote patys savęs – kaip tada įsivaizduoti atstumą? Jau turint atskaitos kūną, galime bandyti lyginti atstumus iki kitų kūnų. Tai patogu daryti išmatuojant atstumus tam tikrais ilgio vienetais. Tam tinka bet koks fiksuoto ilgio kūnas, kurio ilgiais arba ilgio dalimis išmatuojame erdvę. Galite galvoti, kad susikuriame metro etaloną. Turėdami būdą matuoti atstumams galime apibrėžti *dekarto koordinačių sistemą* – tai yra įprasta stačiakampė koordinačių sistema.

Panašiai, pasinaudodami kokiu nors periodiniu fizikiniu procesu galime matuoti laiką. Kad galėtume palyginti keleto kūnų x ašies koordinates, reikia nuvesti statmenas tai ašiai tieses iš tų kūnų. Laiko atveju tai tolygu sinchronizuotų laikrodžių turėjimui kiekviename erdvės taške. Labai svarbu įsidėmėti, kad galime kalbėti apie laiko matavimą visos sistemos atžvilgiu. Laikrodžius galime sinchronizuoti siųsdami (šviesos) signalus iki kito laikrodžio ir atspindint juos atgal. Atspindėjimo momentu antrasis laikrodis turi rodyti signalo išsiuntimo laiką plius pusės kelionės laiko. Savaime aišku laikrodžiai turi tiksėti vienodu dažniu, tada kartą sinchronizuoti jie tokie ir išliks.

Inercinės atskaitos sistemos

Klasikinė mechanika remiasi trimis Niutono dėsniais. Mane visada stebino, kodėl jų yra trys, nes akivaizdu, kad pirmasis dėsnis yra specialus antrojo atvejis, kai jėga lygi nuliui. Tik daug vėliau supratau to dėsnio svarbą. Pirmas Niutono dėsnis

> *Kūnas, neveikiamas išorinių jėgų, išlieka rimtyje arba juda tiesiai ir tolygiai.*

Šis dėsnis padeda nustatyti ar esame inercinėje atskaitos sistemoje, nes tik tokioje sistemoje galioja kiti du dėsniai. Neinercinė sistema nebūtinai ta, kuri juda su pagreičiu, bet ir ta, kuri negerai sužymėta.

Erdvės ir laiko savybės

Jau vien kurdami atskaitos sistemą nejučiomis pasinaudojome tam tikromis erdvės ir laiko savybėmis. Manome, kad erdvė yra vienalytė. Tai yra, visi fizikiniai procesai vyksta vienodai nepriklausomai nuo padėties atskaitos kūno atžvilgiu. Aišku, turima omenyje, kad ir visos kitos eksperimento sąlygos yra tos pačios. Erdvė yra izotropiška – jos savybės nepriklauso nuo krypties. Laikas taip pat yra vienalytis, nes eksperimentas nepriklauso nuo to, kokiu laiko momentu jis buvo pradėtas. Kadangi laike judame tik pirmyn, negalime pasakyti ar jis izotropiškas, tačiau beveik visi mikroskopiniai fizikiniai procesai vyktų taip pat ir keliaujant į praeitį.

Kitas gluminantis dalykas yra tai, kaip būtų galima pajusti, kad laikas ir erdvė netenkina šių sąlygų. Neaišku ar yra toks būdas vienmačiai erdvei ar laikui, tačiau, jei turime bent dvimatę erdvę, galime apibrėžti apskritimą – visumą taškų nutolusių nuo tam tikro taško per vienoda ilgio vienetų skaičių. Galime net išmatuoti jo perimetrą. Perimetro ir skersmens ilgių santykis *plokščioje (euklidinėje) erdvėje* lygus π – konstanta, kurią galime apskaičiuoti daugeliu kitų būdų. Tačiau, jei erdvė nebūtų vienalytė ir izotropiška, tas santykis nebūtų visur lygus π. Panašiai ir su trikampių kampų suma. Eksperimentai rodo, kad dideliu tikslumu pati erdvė yra Euklidinė, tačiau dėl nenulinės vakuumo energijos visgi erdvė gali būti kreiva, taigi neeuklidinė. Tačiau ši kosmologinės konstantos problema dar neišspręsta ir apskritai tai tikrai ne mūsų nosiai.

Taigi laikysime, kad laikas vienalytis ir erdvė yra vienalytė bei izotropiška.

Lorenco transformacijos

Specialioji reliatyvumo teorija remiasi dviem postulatais:

Visi fizikos dėsniai yra tokie patys visose inercinėje atskaitos sistemose.

Šviesos greitis vakuume visose inercinėse atskaitos sistemose nepriklauso nuo šviesos šaltinio ar stebėtojo reliatyvaus judėjimas ir lygus universaliajai konstantai $c = 299792458$ m/s.

Iš jų bei erdvės ir laiko savybių galime išvesti Lorenco transformacijas, kurios aprašo kaip laikas ir erdvė keičiasi pereinant iš vienos inercinės atskaitos sistemos į kitą.

Sutariame, kad tašką erdvėlaikyje vadinsime įvykiu, pavyzdžiui, lemputės blykstelėjimą. Įvykis turi tris erdvės ir vieną laiko koordinates. Skirtingose atskaitos sistemose turime (x, y, z, t) ir (x', y', z', t'). Norime išsiaiškinti, kaip iš vienų koordinačių galime gauti kitas. Vienintelės logiškos konstantos dviem inercinėms atskaitoms sistemoms yra šviesos greitis c ir sistemų tarpusavio judėjimo greitis v. Taigi norime rasti funkcijas

$$\begin{aligned} x' &= f_1(x, y, z, t) \\ y' &= f_2(x, y, z, t) \\ z' &= f_3(x, y, z, t) \\ t' &= f_4(x, y, z, t) \end{aligned}$$

Bendru atveju funkcijos diferencialas gali būti išreiškiamas per dalines išvestines.

$$\mathrm{d}x' = \frac{\partial f_1}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f_1}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f_1}{\partial z}\mathrm{d}z + \frac{\partial f_1}{\partial t}\mathrm{d}t$$

Akivaizdu, kad tokioje erdvėje *diferencialas* (nykstamai mažas funkcijos pokytis išreikštas per kintamųjų pokyčius) neturi priklausyti nuo koordinačių pradžios taško parinkimo, tai yra, konkrečių x, y, z, t verčių. Todėl ir dalinis išvestinės turi būti konstantos. Taigi erdvės ir laiko transformacijos turi būti tiesinės.

$$\begin{aligned} x' &= a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 t + a_5 \\ y' &= b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_4 t + b_5 \\ z' &= c_1 x + c_2 y + c_3 z + c_4 t + c_5 \\ t' &= d_1 x + d_2 y + d_3 z + d_4 t + d_5 \end{aligned}$$

Mūsų tikslas yra rasti šias nežinomas konstantas. Visų pirma, turime pasirinkti patogiai orientuotas koordinačių ašis (iki šiol nagrinėjome bendrą atvejį).

Tarkime, turime du kūnus, su kuriais susietos atskaitos sistemos gali būti inercinės. Darant bet kokius teiginius, svarbu įsitikinti, kad jie turi prasmę. Specialiojoje reliatyvumo teorijoje negalime remtis kasdiene patirtimi, todėl tikėsime tik tokiais teiginiais, kurie yra labai labai akivaizdūs. Pavyzdžiui, vienas įvykis vienoje koordinačių sistemoje atitinka vieną ir tiktai vieną įvykį kitoje sistemoje. Kadangi įrodėme, jog transformacijos turi būti tiesinės, tada tiesė viename erdvėlaikyje yra tiese ir kitame: išorinių jėgų neveikiamas, tiesiai ir tolygiai judantys kūnas toks pats išlieka visose inercinėse atskaitos sistemose. Dėl šios priežasties galime parinkti tokias dvi koordinačių sistemas, kurioje x ir x' ašys visada sutaptų. Be to, galime parinkti, kad įvykis $(0,0,0,0)$ atitiktų įvykį $(0,0,0,0)$ kitoje sistemoje. Todėl $a_5 = b_5 = c_5 = d_5 = 0$

$$\begin{aligned}
x' &= a_1x + a_2y + a_3z + a_4t \\
y' &= b_1x + b_2y + b_3z + b_4t \\
z' &= c_1x + c_2y + c_3z + c_4t \\
t' &= d_1x + d_2y + d_3z + d_4t
\end{aligned}$$

Kadangi nutarėme, jog x ir x' ašys išlieka visada lygiagrečios, todėl $y = 0 = z$ atitinka $y' = 0 = z'$ su visomis x ir t reikšmėmis.

$$\begin{aligned}
0 &= b_1x + 0 + b_4t \\
0 &= c_1x + 0 + c_4t
\end{aligned}$$

Tačiau tada $b_1 = b_4 = c_1 = c_4 = 0$.

$$\begin{aligned}
x' &= a_1x + a_2y + a_3z + a_4t \\
y' &= b_2y + b_3z \\
z' &= c_2y + c_3z \\
t' &= d_1x + d_2y + d_3z + d_4t
\end{aligned}$$

Taigi, tinkamai pasukę koordinačių ašis (kol kas nagrinėjome sistemą, kurioje tik x ir x' ašys sutapo), galime gauti

$$\begin{aligned}
x' &= a_1x + a_2'y + a_3'z + a_4t \\
y' &= b_2'y \\
z' &= c_3'z \\
t' &= d_1x + d_2'y + d_3'z + d_4t
\end{aligned}$$

Kur koeficientai su apostrofu yra nebūtinai tokie pat kaip buvo prieš tai. Svarbu atkreipti dėmesį į tai, kad antra ir trečia lygtys nereiškia, kad, pavyzdžiui, y ir y' ašys yra lygiagrečios, nes jos dar gali būti „palinkusios“. Tačiau galime išnaudoti erdvės izotropiškumą. Pakeiskime y, y', z ir z' koordinačių ašis joms priešingomis. Tokios sistemos mes negalėsime atskirti nuo prieš tai buvusios (viskas pasukta 180 laipsniu, todėl transformacijos lygtys išlieka tokios patys. Vis dėlto, jei nagrinėsime tą patį tašką abiejose sistemose, turime gauti x, x', t ir t' koordinates nepakitusias, bet kitos koordinatės pakeičia ženklą. Tai neturi įtakos vidurinėms lygtims, bet kraštinės pasikeičia:

$$\begin{aligned}
x' &= a_1x - a_2'y - a_3'z + a_4t \\
-y' &= -b_2'y \\
-z' &= -c_3'z \\
t' &= d_1x - d_2'y - d_3'z + d_4t
\end{aligned}$$

Todėl $a_2' = a_3' = d_2' = d_3' = 0$.

$$\begin{aligned}
x' &= a_1x + a_4t \\
y' &= b_2'y \\
z' &= c_3'z \\
t' &= d_1x + d_4t
\end{aligned}$$

Dabar atliksime dar vieną transformaciją. Pakeisime x ir x' ašių kryptis ir iš vienos sistemos pereisime į kitą. Vėlgi nematysime jokio skirtumo, nes regėsime, kad antroji sistema juda teigiama x' ašies kryptimi tuo pačiu greičių. Todėl

$$\begin{aligned} -x &= -a_1x' + a_4t' \\ y &= b_2'y' \\ z &= c_3'z' \\ t &= -d_1x' + d_4t' \end{aligned}$$

Palyginę su prieš tai buvusiomis lygtimis, gauname, kad $b_2' = \pm 1 = c_2'$. Pasirenkame teigiamą šaknį, nes turime gauti geometrines transformacijas, kai sistemos tarpusavyje nejuda.

$$\begin{aligned} x' &= a_1x + a_4t \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= d_1x + d_4t \end{aligned}$$

Kadangi sistemų tarpusavio judėjimo greitis yra v, koordinačių pradžios taškas $(0, 0, 0, t')$ kitoje sistemoje juda taip $(vt, 0, 0, t)$. Todėl

$$\begin{aligned} 0 &= a_1vt + a_4t \\ t' &= d_1vt + d_4t \end{aligned}$$

Vadinasi $a_4 = -a_1v$

$$\begin{aligned} x' &= a_1(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= d_1x + d_4t \end{aligned}$$

Ir palyginame su atvirkštinėmis transformacijomis

$$\begin{aligned} x &= a_1(x' + vt') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= -d_1x' + d_4t' \end{aligned}$$

Dabar (tik dabar) pasinaudosime antruoju postulatu. Jis suteikia didelę reikšmę elektromagnetinių bangų sklidimui (šviesai). Taip buvo istoriškai. Šiais laikais Lorenco transformacijos galima būti išvedamos darant šiek tiek kitokias prielaidas, taip parodant, kad elektromagnetizmas, norsi ir glaudžiai susijęs su specialiąją reliatyvumo teorija istoriškai, yra tik dar vienas fizikos reiškinys. Vis dėlto, mes eisime tradiciniu keliu.

Tarkime, kad įvykio $(0, 0, 0, 0)$ metu buvo užžiebta lempute. Jos šviesa pradės sklisti į visas puses greičiu c kuris nepriklauso nuo atskaitos sistemos. Todėl $x' = ct'$ ir $x = ct$. Įstatome tai į x ir x' transformacijas

$$\begin{aligned} ct' &= a_1(ct - vt) \\ ct &= a_1(ct' + vt') \end{aligned}$$

Padauginame ir išprastiname tt'

$$\begin{aligned} c^2 &= a_1^2\left(c^2 - v^2\right) \\ a_1 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \end{aligned}$$

Gavome labai svarbų Lorenco daugiklį. Iš bendrųjų x ir x' lygčių gauname

$$\begin{aligned} x &= \gamma(\gamma(x - vt) + vt') \\ t' &= \frac{x\left(1 - \gamma^2\right) + \gamma^2vt}{\gamma v} = \gamma\left(t - x\frac{v}{c^2}\right) \end{aligned}$$

Vadinasi $d_1 = -\frac{v}{c^2}\gamma$, $d_4 = \gamma$.

Išvedėme Lorenco transformacijas

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$
\begin{aligned}
y' &= y \\
z' &= z \\
t' &= \frac{t - x\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}
\end{aligned}
$$

Valio!

Daug vargome, kol gavome šias formules. Nors jos tinka tik tada, kai sistemos yra tinkamai orientuotos, visiškai bendrą koordinačių transformaciją galime gauti pridėję geometrines transformacijas.

Taigi matome, jog Lorenco transformacijos kaip ir visa specialioji reliatyvumo teorija yra neišvengiama logiško mąstymo ir poros postulatų pasekmė.

Minkovskio erdvėlaikio diagramos

Intervalas

Jeigu paimsime tam tikrą diferencialų sumą (galėjome paimti priešingus ženklus $+---$)

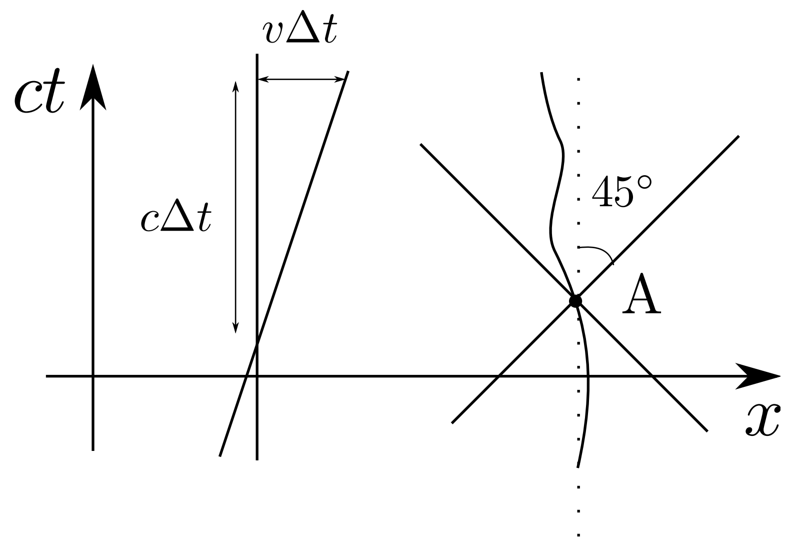
$$
\mathrm{d}s^2 = -c^2\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2
$$

tai pamatysime, kad dydis $\mathrm{d}s^2$ – intervalas – nepriklauso nuo atskaitos sistemos. Lengviau suvokti nagrinėjant ne diferencialus, o baigtinius laiko ir erdvės pokyčius.

$$
\Delta s^2 = -c^2\Delta t^2 + \Delta x^2
$$

Šią formulę daug lengviau įsiminti, todėl pamiršime Lorenco transformacijas ir naudosime šią formulę skaičiavimas.

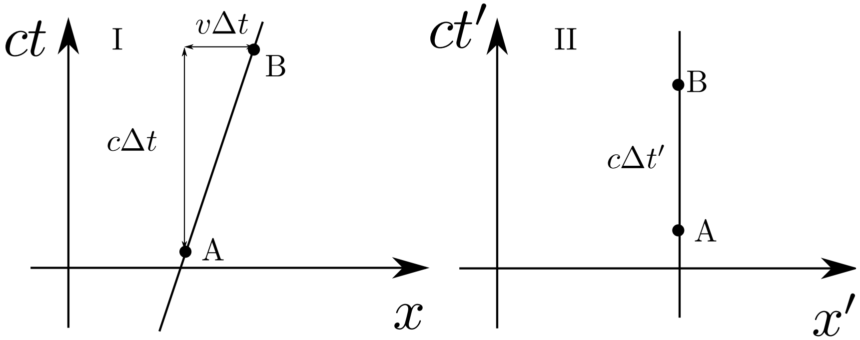
- $\Delta s^2 < 0$ intervalas yra laikiškasis – visi įvykiai, kurie gali būti susieti priežasties-pasekmės ryšiu turi neigiamą intervalą.
- $\Delta s^2 = 0$ nulinis intervalas – tokiu būdu juda šviesa.
- $\Delta s^2 > 0$ erdviškasis intervalas – tokie įvykiai negali būti vienas kito priežastimi - pasekmė.



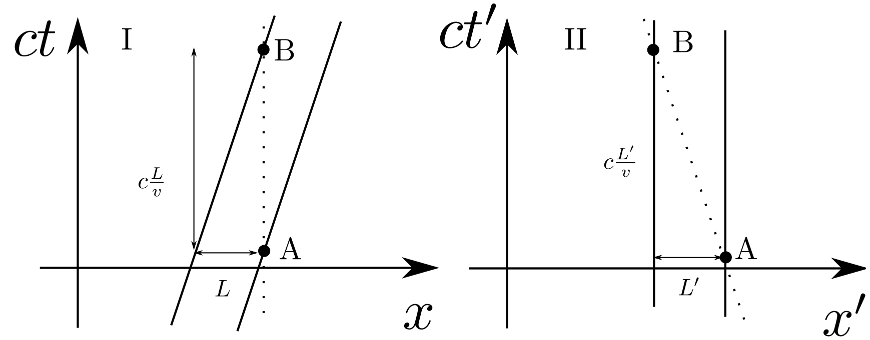
1 pav.: Pavyzdys

Pasinaudodami intervalo invariantiškumu Lorenco transformacijų atžvilgių, galime išnagrinėti daugelį specialiosios reliatyvumo teorijos reiškinių. Dar mums į pagalbą ateis erdvėlaiko diagramos. Tai yra koordinačių sistema, kuriame yra ašis laikui. Kadangi nesugebame nubrėžti keturių statmenų ašių, apsiribosime dviem: x ir t. Tai yra reiškiniai, kurie *erdvėje* juda tik vienoje tiesėje.

Stovintį daiktą atitinka statmena *pasaulinė* linija. O judantį tam tikru greičiu – pasvira (žr. 1 pav.). Šviesios spinduliai yra žymimi 45 laipsnių kampu pasvirusiomis linijomis. Iš vieno taško išvestos šviesos linijos yra vadinamos šviesos kūgiu. Šviesos kūgis parodo, kas praeityje galėjo paveikti įvykius taške A ir ką pats įvykis A gali paveikti ateityje. Viskas kas yra už šviesos kūgio, nėra susieta priežastingumo ryšiu. Bet koks fizikinis kūnas negali judėti greičiau nei greičiu c, todėl linijų pasvyrimo kampas visada išlieka mažesnis nei 45 laipsniai.



2 pav.: Laiko sulėtėjimas



3 pav.: Ilgio sutrumpėjimas

Laiko sulėtėjimas

Tarkime, kad turime dvi inercines atskaitos sistemas, kurių tarpusavio judėjimo greitis yra v (pavyzdžiui, Žemė[1] ir pro šalį skrendanti kosminė raketa). Raketoje (II) tarp įvykių A ir B (laikrodžio dūžiai) praeina laiko tarpas $\Delta t'$. Taigi intervalas tarp A ir B yra $\Delta s^2 = -c^2\Delta t'^2$. Tuo tarpu sistemoje I, raketa pajuda atstumą $v\Delta t$. Intervalas toje sistemoje yra $\Delta s^2 = -c^2\Delta t^2 + v^2\Delta t^2$. Todėl

$$\Delta t' = \Delta t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} < \Delta t$$

Taigi raketoje tarp įvykių A ir B praeis mažiau laiko. Tai vadiname laiko sutrumpėjimu - judantis laikrodis eina lėčiau.

Atkreipkite dėmesį ir į kitą dalyką: įvykiai A ir B įvyksta nebetoje pačioje vietoje. Atstumo yra

$$\Delta x = v\Delta t = \frac{v\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Ilgio sutrumpėjimas

Dabar nubrėžkime pasaulines linijas raketoje esančiai ilgio L' liniuotei bei pagalbinę vertikalią liniją (sistemoje I nejudantis stebėtojas). Jei sistemoje I liniuotės ilgis L, tai pro stebėtoją ji pralėks per laiką $\frac{L}{v}$. Tuo tarpu raketos sistemoje, nuo vieno liniuotės galo link kito stebėtojas pralėks per laiką $\frac{L'}{v}$ (nes tarpusavio judėjimo greitis v yra toks pats abiem sistemom). Taigi galime palyginti intervalus tarp įvykių A ir B

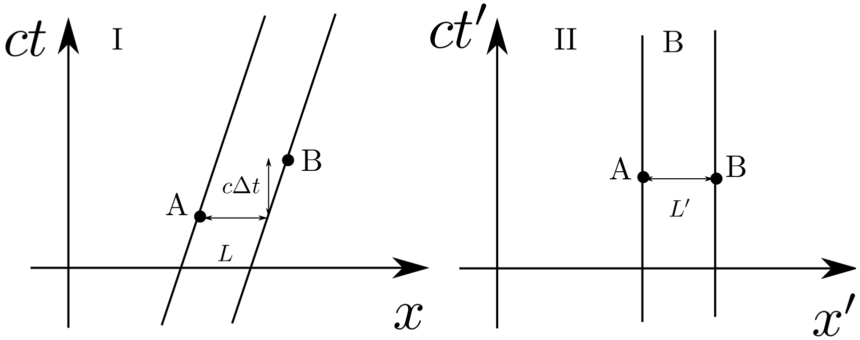
$$-c^2\left(\frac{L}{v}\right)^2 = -c^2\left(\frac{L'}{v}\right)^2 + L'^2$$

$$L = L'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

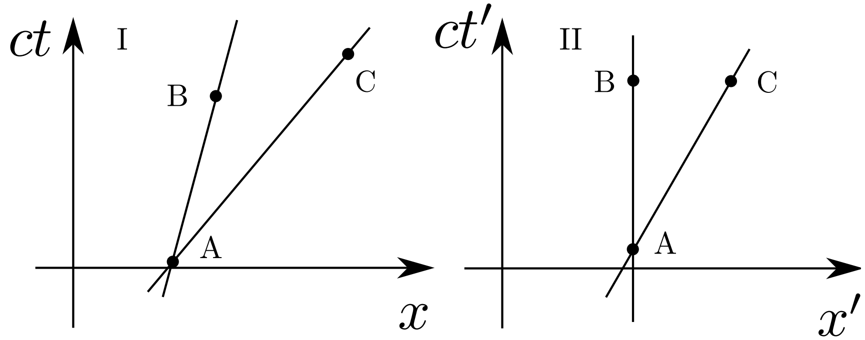
Gavome ilgio sutrumpėjimo formulę. Svarbu pabrėžti, kad tai realus sutrumpėjimas. Kaip ir laiko sulėtėjimas. Tai nėra susiję su tuo, kad šviesa užtrunka atkeliauti į stebėtojo akį (tai sukelia kitus fizinio pasaulio suvokimo reiškinius), o iš tiesų liniuotė bus trumpesnė.

Su šitokiais reiškiniais lengviau apsiprasti, kai suvoki, kad skirtingos atskaitos sistemos yra tarsi požiūrio taško posūkis. Juk nesistebime, kai

[1] Žemė nėra gera inercinė atskaitos sistema, bet tam tikru artiniu galime ją tokia laikyti



4 pav.: Sinchroniškumo praradimas



5 pav.: Greičių sudėties formulė

lazdos projekcija į x ašį sumažėja, kai ją pasukame. Panašai keičiasi laikas ir erdvė specialiojoje reliatyvumo teorijoje.

Įvykių sinchroniškumo praradimas

Ganėtinai akivaizdu, kad toje pačioje vietoje įvykę įvykiai gali įvykti visai skirtingose vietose kitoje sistemoje. Tas pats galioja ir laikui – vienoje sistemoje buvę sinchroniški įvykiai, tampa nebesinchroniški kitoje. Lazdos ilgio matavimas – tai lazdos galų koordinačių pamatavimas vienu metu. Tokiems įvykiams $\Delta s^2 = L'^2$, o kitoje sistemoje $\Delta s^2 = -c^2\Delta t^2 + (L + v\Delta t)^2$. Galėtume įstatyti turimas išraiškas ir rasti Δt, tačiau šiek tiek pagalvokime. $\Delta s^2 = L'^2$ yra ilgiausias įmanomas intervalas tarp dviejų lazdos galų, nes II sistemoje mes galime tik pridėti neigiamą narį $-c^2\Delta t'^2$. Vadinasi ieškomas laiko intervalas tenkina

$$-2c^2\Delta t + 2v\left(L + v\Delta t\right) = 0$$

$$\Delta t = \frac{vL}{c^2 - v^2} = \frac{L\frac{v}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{L'\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Taigi lazdos galas, link kurio juda sistema II, atsiduria „ateityje“. Atstumas erdvėje tarp įvykių A ir B yra

$$\Delta x = L + \frac{L\frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{L'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Greičių sudėties formulė

Reliatyvistinę greičių sudėties formulę galima išvesti naudojant Lorenco transformacijos, bet parankiau žinoti „grafinį“ išvedimo būdą. Įsivaizduokime traukinį, kuris I sistemos atžvilgiu juda greičiu v. Traukinio atžvilgiu AB linija, juda keleivis AC linija greičiu u traukinio atžvilgiu. Tarkime, kad įvykio A koordinatės yra $(0, 0)$ abiejose sistemose.

Tarkim, kad taško B koordinatė yra $(c\Delta t', 0)$, kur $\Delta t'$ yra koks nors laiko tarpas. Tada taško C koordinatės yra $(c\Delta t', v\Delta t')$. Sistemoje I, taško B koordinatė yra $\gamma\left(c\Delta t', v\Delta t'\right)$ pagal laiko sulėtėjimo formulę (I sistemoje laikas tarp įvykių A ir B yra ilgesnis), kur γ yra Lorenco daugiklis.

Įvykių B ir C tarpusavio koordinatės yra žinomas iš anksčiau. Todėl taško C koordinatės yra $\gamma\left(c\Delta t', v\Delta t'\right) + \gamma\left(cu\Delta t'\frac{v}{c^2}, u\Delta t'\right) = \gamma\left(\left(1 + \frac{vu}{c^2}\right)c, v + u\right)\Delta t'$. Kita vertus taško C koordinatės yra $(c\Delta t', u'\Delta t')$. Taigi koordinačių santykis yra

$$\frac{u'}{c} = \frac{v + u}{\left(1 + \frac{vu}{c^2}\right)c}$$

$$u' = \frac{v+u}{1+\frac{vu}{c^2}}$$

Štai ir turime greičių sudėties formulę. Atkreipkite dėmesį, kad jei v ir u nedidesni nei c, tai ir u' nedidesnis nei c.

Statmeniems greičiams

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma\left(1+\frac{vu_x}{c^2}\right)}$$

Dvynių paradoksas

Klasikinis pavyzdys, kai neteisingai pritaikyta specialiojo reliatyvumo teorija duoda paradoksalius atsakymus, yra dvynių paradoksas.

Anksčiau parodėme, kad judantis laikrodis eina lėčiau. Vienas iš dvynių išvyksta į kosminę kelionę ir po daugelio metų grįžta į Žemę. Kadangi kosminis laivas juda dideliu greičiu, laikas jame teka lėčiau, taigi grįžęs dvynys bus jaunesnis, nei tas, kuris buvo pasilikęs Žemėje. Tačiau jei žiūrėsime iš kosminio laivo, atrodys, kad Žemė juda dideliu greičiu, todėl laikas ten turėtų eiti lėčiau. Tai kuris dvynys sensta lėčiau?

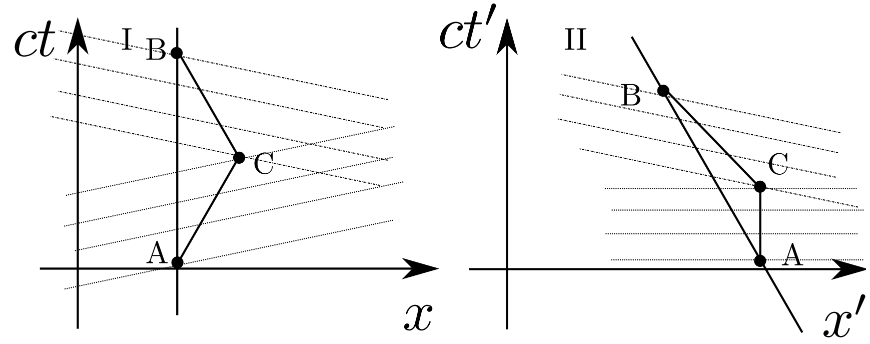
Kosminio laivo greitis $v = 0{,}8c$, o į Žemę kosminis laivas grįžta po dešimties metų t (pagal Žemės laikrodį). Koks amžių skirtumas tarp dvynių?

Surašome įvykių koordinates pirmoje sistemoje: $A\,(0,0)$, $B\left(ct, v\frac{v}{t}\right)$, $C\,(ct,0)$. Tada laikas prabėgęs raketoje AC ir BC kelio dalyse yra lygus $\frac{t}{2\gamma} = 0{,}3t$, todėl iš viso laive prabėgs šeši metai. Dvynys bus jaunesnis ketveriais metais.

Raketa nėra inercinė atskaitos sistemą visą laiką, todėl mes galime nubrėžti Minkovskio erdvėlaikio diagramą tiktai vienoje kurioje kelionės dalyje. Tada $A\,(0,0)$, $B\,(ct\gamma, -vt\gamma)$, $C\left(c\frac{t}{2\gamma}, 0\right)$. Pagal greičių sudėties formulę, BC vaizduoja judėjimą greičiu

$$\frac{v+v}{1+\frac{v^2}{c^2}} = \frac{1{,}6}{1+0{,}64}c = \frac{40}{41}c$$

II sistemoje laivas nuo C iki B judą laiką $t\gamma - \frac{t}{2\gamma}$. $\gamma = \frac{1}{0{,}6}$. Laive tuo



6 pav.: Dvynių paradoksas

tarpu prabėga

$$t\left(\gamma - \frac{1}{2\gamma}\right)\sqrt{1-\left(\frac{40}{41}\right)^2} = \frac{t}{2\gamma}\left(\frac{1}{0{,}18}-1\right)\frac{9}{41} = \frac{t}{2\gamma}\frac{82}{18}\times\frac{9}{41} = \frac{t}{2\gamma}$$

Todėl tokį pat rezultatą gauname ir kitoje sistemoje.

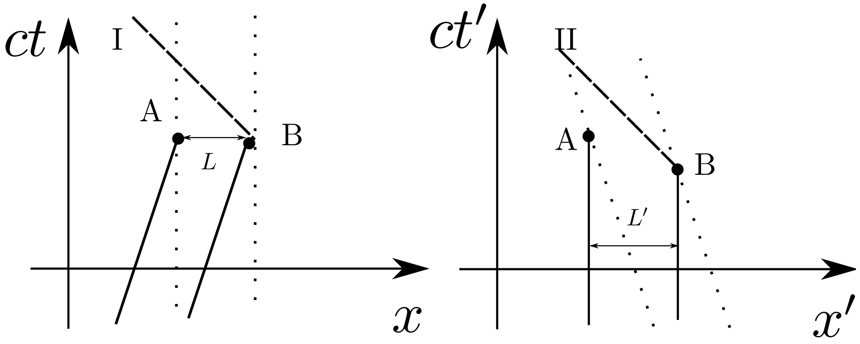
Esmė, kad apsisukant Žemėje esantis dvynys labai greitai pasensta. Tai galime matyti nusibrėžę $t = \text{const}$ linijas pagal raketos laikrodį. Taške C skirtingomis kryptimis judančios sistemos nesutiktų dėl Žemėje pasilikusio dvynio amžiaus.

Kopėčių paradoksas

Labai greitas ūkininkas į $L = 6$ m ilgio daržinę bando įnešti $L' = 10$ m. Kokiu greičiu reikia reikia judėti ūkininkui, kad tai pavyktų?

Kopėčios turi sutrumpėti iki daržinės dydžio, taigi $L = L'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 0{,}6$, tai $v = 0{,}8c$. Viskas būtų gerai, bet juk kopėčių atskaitos sistemoje, daržinė yra sutrumpėjusi iki $0{,}6L = 3{,}6$ m. Kaip tada dešimties metrų ilgio kopėčios gali įlįsti į tokią daržinę? Nusibrėžkime diagramą.

Daržinės sistemoje (I) kopėčių buvimas daržinėje yra abiejų jos galų patekimas į daržinę (vienu metu). Tuo tarpų kopėčių atžvilgiu, šie du įvykiai A ir B įvyksta ne vienu metu. Taigi, kopėčių galas B jau yra įsirėmęs į



7 pav.: Kopėčių paradoksas

daržinės sieną, o A dar išorėje. Bet tada kopėčios turi sustoti?! Nevisai. Juk žinome, kad c yra maksimalus greitis, kuriuo gali judėti bet kokia informacija. Taigi lazdos galas A sužinos apie kopėčių įsirėmimą negreičiau, nei šviesos signalas pasieks jį. Bet iš pirmos diagramos matosi, kad tuo metu lazdos galas A jau bus daržinėje. Tas pats galioja ir II diagramoje. Kopėčios tiesiog sulįs į daržinę. Taigi pagal specialiąją reliatyvumo teoriją negali būti absoliučiai kietų kūnų.

Keturmačiai vektoriai

Savasis laikas

Kadangi laikas nebėra absoliutus susidaro keblu, pavyzdžiui, nurodyti kelionės trukmę. Dvynių paradokse kelionės trukmė vieno dvynio atžvilgiu yra dešimt metų, o kito – tik šešeri. Vis dėlto, yra būdas kaip vienareikšmiškai žymėti laiką – tai savasis laikas. Paprastai sakant, tai yra laikas, kurį rodo keliaujantis laikrodis. Jei kalbame apie savąjį laiką kosminio laivo kelionės metu, žiūrime į kosminiame laive esantį laikrodį. $\Delta s^2 = -c^2\Delta t^2 + \Delta x^2$ bendru atveju, tačiau jei laikrodis pats keliauja tarp įvykių, tai su juo susietoje sistemoje, jis nepajuda nė kiek, todėl $\Delta s^2 = -c^2\Delta\tau^2$, kur $\Delta\tau$ žymime savąjį laiką. Kadangi Δs^2 išlieka toks pats, nepriklausomai nuo stebėtojo atskaitos sistemos, todėl ir $\Delta\tau = \sqrt{-\frac{\Delta s^2}{c^2}}$ [2] yra apskaičiuojamas vienareikšmiškai. Jei laikrodis juda greičiu v tai

$$-c^2\Delta\tau = -c^2\Delta t^2 + v^2\Delta t^2$$

$$\Delta\tau = \frac{\Delta t}{\gamma}$$

Esant sudėtingai trajektorijai galime net skaičiuoti integralą $\int \mathrm{d}\tau = \int \frac{\mathrm{d}t}{\gamma}$

Keturmatis vektorius

Kadangi erdvėlaikis aprašomas keturiomis koordinatėmis, natūralu pradėti naudoti keturmačius vektorius $X = (ct, x, y, z)$

Klasikinėje mechanikoje žinojome, kad trimačių vektorių absoliutūs ilgiai nepriklauso nuo koordinačių sistemos pasirinkimo. Mikovskio erdvėlaikyje vektorių didumas apskaičiuojamas kiek neįprastai:

$$X \cdot X = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

Toks vektoriaus dydis nepriklauso nuo atskaitos sistemos pasirinkimo. Šiuo atveju X žymi atstumą nuo koordinačių pradžios taško.

Keturmatis greitis

Turėdami keturmatį vektorių, norėtume apibrėžti ir keturmatį greitį. Tačiau žinome, kad laikas yra subjektyvus dalykas. Vis dėlto, parodėme, kad savasis greitis yra unikalus, todėl jei kūnas juda kokia nors trajektorija Minkovskio erdvėlaikyje, tą trajektoriją galima vienareikšmiškai sudalinti į savojo laiko tarpus $\Delta\tau$. Per tą laiką, vektorius X pakinta $\Delta X = (c\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$, todėl keturmatis greitis

$$U = \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}\tau} = \left(c\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau}\right)$$

[2] Nekreipkite dėmesio į kvadratus ir minuso ženklus

Žinome, jog savasis laikas yra trumpesnis, nei koordiantės laikas $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{\mathrm{d}t}{\gamma}$.

Todėl $U = (c\gamma, \gamma v_x, \gamma v_y, \gamma v_z)$, kur $v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ ir t.t.[3]

$$U \cdot U = \left(-c^2 + v^2\right)\gamma^2 = -c^2$$

Akivaizdu, kad vektoriaus U didumas apskaičiuotas pagal šią formulę nepriklauso nuo atskaitos sistemos pasirinkimo. Savojoje atskaitos sistemoje (judanti kartu su kūnu), $U = (c, 0, 0, 0)$. Atkreipkite dėmesį į tai, kad su judančiu kūnu susieta atskaitos sistema nebūtinai yra inercinė, tačiau visada galim rasti tokią atskaitos sistemą, kurioje tuo laiko momentu kūnas nejuda.

Keturmatis judesio kiekis

Turėdami greitį galime apibrėžti judesio kiekį

$$P = mU$$

Kadangi $\gamma \to 1$, kai $v \ll c$, tada $P = (\gamma mc, \gamma m v_x, \gamma m v_y, \gamma m v_z) = (mc, p_x, p_y, p_z)$. Matome, kad atgauname įprastines judesio kiekio išraiškas. Tik kas yra laiko komponentė?

$$P_0 = \gamma mc = \frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx \frac{1}{c}\left(mc^2 + \frac{mv^2}{2}\right)$$

Antrasis narys yra kinetinė energija. Todėl ne be priežasties apibrėžiame, kad reliatyvistinė energija yra $E = \gamma mc^2$, o nejudančiam kūnui $E = mc^2$ – štai garsioji formulė.

Apskaičiuokime vektoriaus $P = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z\right)$ didumą:

$$P \cdot P = -\frac{E^2}{c^2} + p^2 = -m^2c^2$$

$$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$$

[3] $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$

Ši formulė sieja judesio kiekio $\vec{p} = \gamma m\vec{v}$ didumą, rimties masę m ir visą energiją E. Ji išlieka teisinga bet kurioje inercinėje atskaitos sistemoje.

Nesunku įrodyti paprastą formulę: $v = \frac{pc}{E}$

Keturmačiam judesio kiekiui galioja tvermės dėsnis.

$$\sum P_i = \sum P_f$$

Tai tolygu energijos ir judesio kiekio tvermės dėsniams, jeigu sistema yra uždara. Kūno energija yra lygi rimties masės energijai ir kitnetinei energijai: $E = mc^2 + E_\mathrm{K}$. Visa energija susidūrimų, sprogimų metu išlieka pastovi, tačiau rimties masė gali kisti. Taip nutinka dalelių skilimo metu.

Komptono sklaida

Svarbus fizikinis reiškinys, kuriam reikia reliatyvistinės mechanikos paaiškinimo, yra Komptono sklaida. Tai yra fotonų sklaida nuo elektronų. Fotono energija yra $E = h\nu$, o judesio kiekio didumas – $p = \frac{E}{c}$ (fotono rimties masė yra nulinė). Tarkime, kad elektronas nejudėjo, o fotonas juda horizontaliai x ašimi iš kairės.

$$\begin{aligned} P_f &= \left(\frac{h\nu}{c}, \frac{h\nu}{c}, 0\right) \\ P_e &= (mc, 0, 0) \end{aligned}$$

Po susidūrimo

$$\begin{aligned} P_f &= \left(\frac{h\nu'}{c}, \frac{h\nu'}{c}\cos\theta, \frac{h\nu'}{c}\sin\theta\right) \\ P_e &= \left(mc + \frac{h\nu}{c} - \frac{h\nu'}{c}, \frac{h\nu}{c} - \frac{h\nu'}{c}\cos\theta, -\frac{h\nu'}{c}\sin\theta\right) \end{aligned}$$

Kur elektronui pritaikėme tvermės dėsnius. Panaudokime formulę $P_e P_e = -m^2c^2$

$$\begin{aligned} -\left(mc + \frac{h\nu}{c} - \frac{h\nu'}{c}\right)^2 + \left(\frac{h\nu}{c} - \frac{h\nu'}{c}\cos\theta\right)^2 + \left(-\frac{h\nu'}{c}\sin\theta\right)^2 &= -m^2c^2 \\ -2mc\left(\frac{h\nu}{c} - \frac{h\nu'}{c}\right) + 2\frac{h\nu}{c}\frac{h\nu'}{c} - 2\frac{h\nu}{c}\frac{h\nu'}{c}\cos\theta &= 0 \end{aligned}$$

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{2mc}\left(1-\cos\theta\right)$$

Bangos ilgio pokytis nedidelis, pastebimas tik rentgeno spinduliams.

Doplerio efektas

Bangos erdvėje gali būti aprašomos tokiomis funkcijomis ($\vec{k}$ yra bangos vektorius, ω yra bangų kampinis dažnis)

$$\Phi\left(t,\vec{x}\right) = A\cos\left(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t\right)$$

Kosinusu argumentas labai panašus į ketrumačių vektorių $\left(\frac{\omega}{c},\vec{k}\right)$ ir $(ct,\vec{x})$ sandaugą. Jei $\left(\frac{\omega}{c},\vec{k}\right)$ yra iš tiesų geras keturmatis vektorius, tai ši sandauga turi išlikti tokia pat bet kokioje atskaitos sistemoje. Tačiau akivaizdu, jog visi stebėtojai sutiks dėl tokio dalyku, kaip bangos keteros buvimo (taškas A yra bangos ketera bet kurioje sistemoje).

Taigi $K=\left(\frac{\omega}{c},\vec{k}\right)$ yra keturmatis vektorius. Šviesos bangoms $\omega = \frac{2\pi}{T} = c\frac{2\pi}{\lambda} = ck$. Todėl šviesai $K\cdot K = -\frac{\omega^2}{c^2}+k^2=0$. Tačiau atskiros komponentės neišlieka pastovios skirtingose atskaitos sistemose. Bangų dažnio kitimas pareinant iš vienos sistemos į kitą yra Doplerio efektas.

Tarkime, šaltinio atžvilgiu greičių $U=(\gamma c,\gamma\vec{v})$ stebėtojas. Toje sistemoje $K=\left(\frac{\omega}{c},\vec{k}\right)$. Paties stebėtojo atskaitos sistemoje atkeliaujančių bangų vektorius turi $K=\left(\frac{\omega'}{c},\vec{k'}\right)$, stebėtojo greitis jo sistemos atžvilgiu yra $U=\left(c,\vec{0}\right)$. Todėl $\omega'=K\cdot U$. Kadangi keturmačių vektorių sandauga yra pastovi visose sistemose.

$$\omega' = \gamma\left(\omega-\vec{k}\cdot\vec{v}\right)$$

Ši formulė tinka bet kokioms bangoms.

Jeigu stebėtojas juda nuo šaltinio, tai šviesai $\vec{k}\cdot\vec{v}=\omega\frac{v}{c}$, tai

$$\omega' = \omega\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}}$$

Stebėtojas fiksuoja mažesnį dažnį, nei šaltinis išspinduliavo. Jei stebėtojas juda link šaltinio, tai formulė tampa

$$\omega' = \omega\sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}$$

Skersinis Doplerio efektas yra šiek tiek sudėtingesnis. Svarbu žinoti, kad stebėtojo sistemoje tyrinėjami spinduliai išspinduliuojami statmenai šaltiniui, tačiau šaltinio atžvilgiu tas pats spindulys nėra statmenas. Todėl naudingiau užrašyti atvirkščią formulę

$$\omega = \gamma\left(\omega'-\vec{k}\cdot\vec{v}\right)$$

ir paimti, kad $\vec{k}\cdot\vec{v}=0$.

$$\omega' = \frac{\omega}{\gamma}$$

Žvaigždžių aberacija

Judantis stebėtojas mato atlekiančią šviesą ne tokiu pat kampu, kokiu ji yra šalinio atžvilgiu. Kampui apskaičiuoti galime pasinaudoti reliatyvistine greičių sudėties formulę. Kadangi šviesos greitis toks pat abiejose sistemose

$$c\cos\theta' = \frac{v+c\cos\theta}{1+\frac{vc\cos\theta}{c^2}}$$

$$\cos\theta' = \frac{\frac{v}{c}+\cos\theta}{1+\frac{v}{c}\cos\theta},\ \sin\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma\left(1+\frac{v}{c}\cos\theta\right)}$$

Uždaviniai

1. Nubrėžkite Žemės besisukančios apie Saulę Minkovskio diagramą (3D). Palyginkite pajudama atstumą erdvėje ir poslinkį ct ašimi.

2. Miuonu skilimo pusamžis $\tau = 1{,}5$ µs. Labai greiti miuonai yra sukuriami kosminių spindulių $h = 60$ km aukštyje. Kokį atstumą nusklinda šviesa per laiką τ? Žemę pasiekia apie aštuntadalis miuonų. Raskite miuonų greitį. Kam lygus aukštis h žiūrint iš miuono atskaitos sistemos?

3. Buvo atliktas eksperimentas, kurio metu du atominiai laikrodžiai buvo skraidinami keleiviniais lėktuvais aplink Žemę į priešingas puses. Laikydami Žemės centrą inerciniu atskaitos kūnu, įvertinkite laikrodžių nesutapimą dėl specialiosios reliatyvumo teorijos, kai lėktuvų greitis $v = 1000$ km/h. Gravitacinis poveikis yra panašaus dydžio, ir šie skirtumai *buvo* užfiksuoti. GPS sistema irgi atsižvelgia į šias korekcijas.

4. Dalelė greitėja pastoviu pagreičiu a savo atskaitos sistemoje (tokios inercinės atskaitos sistemos atžvilgiu, kurioje dalelės greitis nulinis). Dalelės judėjimo lygtys tam tikroje fiksuotoje sistemoje yra

$$\begin{aligned} ct &= B \sinh \kappa\tau \\ x &= A\left(\cosh \kappa\tau - 1\right) \end{aligned}$$

   Raskite konstantas A, B ir κ bei nubrėžkite erdvėlaiko diagramą. Parodykite, kad šios lygtys atitinka klasikines, kai $v \ll c$. Kiek ilgai tiktų $x = \frac{at^2}{2}$ artinys, jei a lygus laisvo kritimo pagreičiui.

5. Parodykite, kad dvi vienodos masės dalelės tampriai susidūrusios visada išsiskiria kampu mažesniu nei $\frac{\pi}{2}$ ir jam lygus tik tada, kai viena iš dalelių toje atskaitos sistemoje nejudėjo.

6. Didelės energijos fotonas atsitrenkia į elektroną ir sukuria elektrono-pozitrono porą. Kokia minimali fotono energija? Pastaba: efektyviausiu atveju, po reakcijos dalelės judės vienodu greičiu.

7. Išveskite Doplerio formulę pasinaudodami Minkvoskio diagramomis.

8. Išspręskite olimpiados.lt savaitės uždavinį numeris 12.

9. Raskite žvaigždžių aberacijos formulę mažiems greičiams.

10. XXII tarptautinė fizikos olimpiada, 1991 m. (Kuba) , 96 uždavinys.

11. XXXVII tarptautinė fizikos olimpiada, 2006 m. (Singapūras), antrasis uždavinys.