Specialioji reliatyvumo teorija

Andrius Štikonas

2013 m. liepos 5 d.

1 Lorenco transformacijos

Nors ir Niutono dėsniai gerai aprašo mus supantį pasaulį, jie nėra absoliučiai tikslūs. Judant greičiais, artimais šviesios greičiui ($c = 299792458\,\mathrm{ms}^{-1}$), Niutono kinematiką inercinėse atskaitos sistemose pakeičia Specialioji reliatyvumo teorija (SRT), kurioje nebėra nei absoliučios erdvės, nei absoliutaus laiko. Ji remiasi dviem postulatais:

- Fizikos dėsniai vienodi visose inercinėse atskaitos sistemose.
- Šviesos greitis vakuume vienodas visose inercinėse atskaitos sistemose.

Antrasis postulatas skamba gana nelogiškai, nes mes esame pripratę prie Galilėjaus transformacijų, t.y. jei esame atskaitos sistemoje S ir norime pereiti į greičiu v teigiama x-sų ašies kryptimi judančią sistemą S' naudojame transformaciją

$$t' = t, \qquad x' = x - vt, \qquad y' = y, \qquad z' = z.$$

Turėsime pakeisti šias transformacijas taip, kad jos neprieštarautų SRT postulatams. Kad būtų paprasčiau, kol kas pamirškime apie y ir z ašis. Bendriausia įmanoma koordinačių transformacija tarp inercinių atskaitos sistemų yra

$$x' = f(x,t), \qquad t' = g(x,t).$$

Jeigu dalelės neveikia jokios jėgos, tai ji judės tiesiai ir tolygiai. Toks judėjimas (x,t) plokštumoje bus tiesė. Pagal pirmąjį SRT postulatą, tas pats galios ne tik S, bet ir S' sistemoje. Taigi transformacija $(x,t) \to (x',t')$ tieses transformuoja į tieses. Vadinasi, f ir g yra tiesinės funkcijos:

$$\begin{aligned} x' &= \alpha_1(v)x + \alpha_2(v)t \\ t' &= \alpha_3(v)x + \alpha_4(v)t \end{aligned}$$

Kadangi S' juda greičiu v sistemos S atžvilgiu (sakykime, $x' = x = 0$, kai $t = 0$, t.y. koordinačių sistemų centrai sutampa pradiniu laiko momentu), tai

$$x' = \gamma(x - vt), \tag{1}$$

kur koeficientas γ priklauso nuo v. Jeigu tuos pačius argumentus panaudosime pereiti iš sistemos S' atgal į sistemą S rasime, kad

$$x = \gamma_{-v}(x' + vt'), \tag{2}$$

Matome, kad tiesiog $v \to -v$. Taigi ir $\gamma = \gamma_{-v}$. Galilėjaus transformacijas gautume, jei pasirinktume $\gamma = 1$. Bet vietoj to, pasinaudokime antruoju SRT postulatu, kuris sako, kad šviesos greitis yra lygus c visose atskaitos sistemose. Taigi, iš koordinačių pradžios skriejančių šviesos spindulių lygtys yra

$$x = ct, \qquad x' = ct.$$

Įstatykime šias lygtis į (1) ir (2). Gauname,

$$ct' = \gamma(c - v)t, \qquad ct = \gamma(c + v)t'.$$

Išprastinus t ir t' randame, kad

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.}$$

Be to, iš (1) ir (2) lygčių galime eliminuoti x' ir po trupučio algebros gauname

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right).$$

Nagrinėkime transformacijas y ir z ašims. Prisiminkime, kad transformacijos tiesinės, o sistemų koordinačių pradžios sutampa, kai $t = 0$. Iš to gauname, kad $y' = \kappa y$. Atbulinė transformacija mus turi grąžinti atgal, taigi $\kappa = \pm 1$. -1 yra koordinačių sistemos atspindys, todėl turime pasirinkti $y' = y$ ir $z' = z$.

Taigi Lorenco transformacijos yra

$$\boxed{\begin{aligned} t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right), \\ x' &= \gamma(x - vt), \\ y' &= y, \\ z' &= z. \end{aligned}} \tag{3}$$

Norint grįžti iš sistemos S' į sistemą S tereikia v pakeisti į $-v$ ir sukeisti štrichuotas ir neštrichuotas koordinates vietomis.

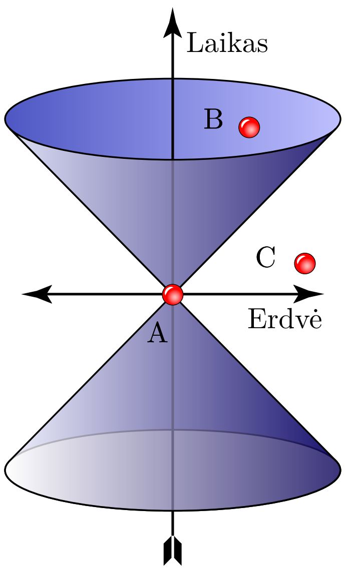
$$\boxed{\begin{aligned} t &= \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right), \\ x &= \gamma(x' + vt'), \\ y &= y', \\ z &= z'. \end{aligned}} \tag{4}$$

Turėdami Lorenco transformacijų išraišką, galime nustatyti visas iš SRT išplaukiančias fizikines išvadas.

Įmanoma užrašyti Lorenco transformacijas ne tik x-ašies kryptimi, bet ir bendru atveju, tačiau gautos išraiškos bus sudėtingos. Todėl paprasčiau koordinačių sistemos ašis parinkti taip, kad transformacija būtų daroma x ašies kryptimi.

2 Erdvėlaikis ir jo savybės

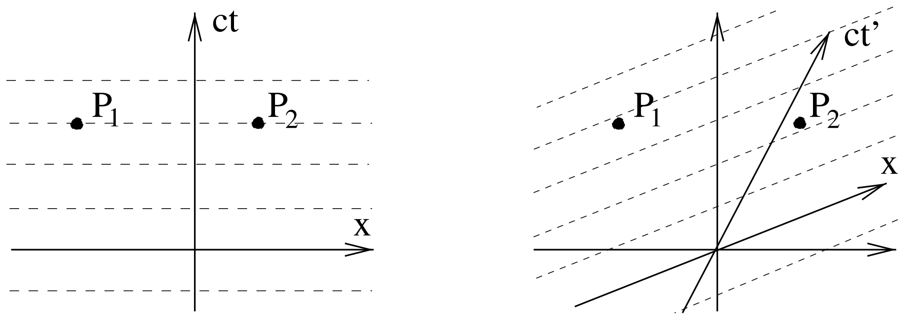
Matome, kad erdvės ir laiko koordinatės persipina Lorenco transformacijose. Šį keturmatį erdvėlaikį, kurio koordinates žymėsime (ct, x, y, z) vadinsime *Minkovskio erdve*. Šios erdvės diagramos vadinamos *erdvėlaikio diagramomis*. Kiekvienas taškas vaizduoja tam tikrą įvykį. Dalelė judėdama erdvėlaikyje brėžia kreivę, vadinamą *pasauline linija*. Pavyzdžiui, šviesos spinduliai yra tiesės, pasvirusios 45° kampu. Tai vadinama *šviesos kūgiu*.



1 pav.: Šviesos kūgis.

2.1 Vienalaikiškumas ir priežastingumas

Iš Lorenco transformacijų matome, kad įvykiai, kurie įvyksta vienu metu atskaitos sistemoje S bus nevienalaikiai sistemoje S'. Akivaizdžiausiai tai matosi erdvėlaikio diagramose. 2 pav. matome, kad pirmoje atskaitos sistemoje įvykiai yra vienalaikiai, bet antroje sistemoje P_2 įvyksta anksčiau už P_1. Nepaisant to, SRT galioja priežastingumo principas. 1 pav. įvykis A visada įvyksta anksčiau už įvykį B ir nėra tokios Lorenco transformacijos,



2 pav.: Vienalaikiškumas priklauso nuo atskaitos sistemos

kuri įvykį iš ateities šviesos kūgio pertransformuotų į praeities įvykį. Taigi galime vienareikšmiškai pasakyti, kad B yra A pasekmė, bet ne atvirkščiai. Tačiau mes negalime to vienareikšmiškai pasakyti apie įvykius A ir C. Yra atskaitos sistemų, kur A įvyksta anksčiau, ir yra tokių, kur C įvyksta pirmiau. Vis dėlto priežastingumas lieka galioti, jei informacija negali keliauti greičiau už šviesos greitį c.

2.2 Laiko sulėtėjimas

Panagrinėkime laikrodį, kuris juda kartu su sistema S', t.y. jo koordinatės yra $(ct', 0)$. Sakykime, kad jis sutiksi kas laiko intervalą T', t.y. tiksi koordinatėse $(ct'_1, 0)$, $(ct'_1 + T', 0)$ ir t.t. Kas kiek laiko laikrodis tiksi sistemoje S? Iš Lorenco transformacijų randame, kad

$$t = \gamma \left(t' + \frac{v}{c^2} x' \right)$$

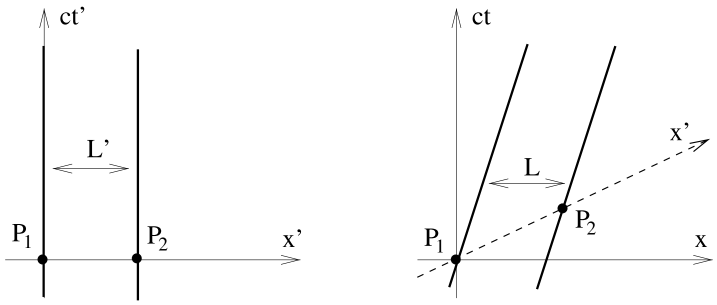
$x' = 0$, taigi

$$\boxed{T = \gamma T'.}$$

2.3 Ilgio sutrumpėjimas

Dabar pamatysime, kad judančio strypo ilgis yra mažesnis. Sakykime, kad sistemoje S' strypo ilgis yra L'. Kam lygus strypo ilgis atskaitos sistemoje S? Sakydami, kad strypo ilgis yra L', turime omeny, jog atstumas tarp strypo galų sistemoje S' tuo pačiu fiksuotu laiko momentu yra L'. Paprastumo dėlei nagrinėkime strypo ilgį nuliniu laiko momentu. Sistemoje S' strypo galų koordinatės yra $(0, 0)$ (įvykis P_1) ir $(0, L)$ (įvykis P_2). Įvykiui P_1 pritaikius atbulinę Lorenco transformaciją vis vien gauname $(0, 0)$. Bet jei pritaikysime transformaciją įvykiui P_2, gausime

$$x = \gamma L', \qquad t = \frac{\gamma v L'}{c^2}$$



3 pav.: Strypas dviejose atskaitos sistemose.

Sistemoje S įvykiai P_1 ir P_2 nebėra vienalaikiai! Tačiau norint išmatuoti strypo ilgį, mums reikia žinoti strypo koordinates tuo pačiu laiko momentu. Taigi mums reikia surasti, kur buvo antrasis strypo galas laiko momentu $t = 0$. Strypas juda greičiu v, todėl nuliniu laiko momentu antrasis strypo galas yra ties:

$$x_2 = x - vt = \gamma L' - \frac{\gamma v^2 L'}{c^2} = \frac{L'}{\gamma}.$$

Strypo ilgis atskaitos sistemoje S yra $L = x_2 - 0$. Vadinasi,

$$\boxed{L = \frac{L'}{\gamma}.}$$

Tai yra, strypo ilgis atskaitos sistemoje S yra mažesnis už ilgį sistemoje S'.

2.4 Greičių sudėtis

Sakykime, kad dalelė juda pastoviu greičiu $\mathbf{u}' = (u'_x, u'_y, u'_z)$ inercinėje atskaitos sistemoje S', o ši sistema juda greičiu $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$, sistemos S atžvilgiu. Kam lygus dalelės greitis $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ sistemoje S?

Žinome, kad

$$\begin{aligned} x' &= u'_x t', \qquad & y' &= u'_y t', \qquad & z' &= u'_z t', \\ x &= u_x t, \qquad & y &= u_y t, \qquad & z &= u_z t. \end{aligned}$$

Pritaikykime atbulinę (norime pereiti iš $S' \to S$) Lorenco transformaciją:

$$u_x = \frac{x}{t} = \frac{\gamma(x' + vt')}{\gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right)} = \frac{(u'_x + v)t'}{t' + \frac{vx'}{c^2}} = \boxed{\frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}},$$

$$u_y = \frac{y'}{t'} = \frac{u'_y t'}{\gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right)} = \frac{u'_y}{\gamma\left(1 + \frac{vu'_x}{c^2}\right)} = \boxed{\frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}u'_y}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}},$$

$$\boxed{u_z = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}u'_z}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}}.$$

Nesunku įsitikinti, kad sudedant 2 greičius mažesnius už c, visada gauname $-c < u < c$, kur $u = |\mathbf{u}|$.

3 Reliatyvistinė mechanika

3.1 Savasis laikas

Naudojant Lorenco transformacijas nesunku įsitikinti, kad dydis, vadinamas *invariantiniu intervalu*

$$\Delta s^2 = -c^2\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \tag{5}$$

nepriklauso nuo atskaitos sistemos. Vadinasi, dydis τ apibrėžiamas pagal formulę $\Delta\tau = \frac{\sqrt{-\Delta s^2}}{c}$ taip pat nepriklausys nuo atskaitos sistemos. τ yra *savasis laikas*. Tai toks laikas, kurį stebėtojas matuoja žiūrėdamas į savo laikrodį.

Galima palyginti, kaip skiriasi judančios dalelės „juntamas" laikas ir stebėtojo laikas

$$d\tau = \sqrt{dt^2 - \frac{d\mathbf{x}^2}{c^2}} = dt\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2} = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Taigi vėl gauname laiko sulėtėjimo formulę:

$$\frac{dt}{d\tau} = \gamma.$$

3.2 4-vektoriai

Žiūrėdami į (5) formulę matome panašumus su atstumu trimatėje erdvėje. Tą faktą panaudosime užrašyti reliatyvistinius dėsnius pavidalu, panašiu į Niutono dėsnius.

Prisiminkime, kad trimačių vektorių $\mathbf{x} = (x_1, y_1, z_1)$ ir $\mathbf{y} = (x_2, y_2, z_2)$ skalarinė sandauga yra $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$. Šią formulę galima apibendrinti keturmačiams vektoriams $X = (ct_1, \mathbf{x})$ ir $Y = (ct_2, \mathbf{y})$ iš Minkovskio erdvės:

$$X \cdot Y = -c^2t_1t_2 + x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Atkreipkite dėmesį, kad prieš laikines koordinates yra minuso ženklas! Dydis X vadinamas *4-vektoriumi.*

Yra ir daugiau 4-vektorių. Pavyzdžiui, *4-greitis* apibrėžiamas kaip

$$V = \frac{dX}{d\tau} = \left(c\frac{dt}{d\tau}, \frac{d\mathbf{x}}{d\tau}\right) = \gamma(c, \mathbf{v})$$

Pratimas: kam lygus dydis $V \cdot V$? Atsakymas: $-c^2$.

4-momentu vadinamas dydis $P = mV = (m\gamma c, m\gamma\mathbf{v})$, čia m yra kūno masė. Taigi reliatyvistinė trimačio judesio kiekio išraiška yra

$$\boxed{\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}}.$$

Išskleiskime $m\gamma c^2$ Teiloro eilute:

$$m\gamma c^2 = \frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = mc^2 + \frac{mv^2}{2} + \frac{3mv^4}{8c^2} + ...$$

$\frac{mv^2}{2}$ yra pažįstama kinetinė energija, narys mc^2 vadinamas *rimties energija.* Taigi galima įtarti, jog teisinga dydžio $m\gamma c^2$ interpretacija reliatyvumo teorijoje yra pilna kūno energija

$$\boxed{E = \gamma mc^2.}$$

Norint tą įrodyti griežtai, reikia sudėtingesnių matematinių įrankių ir tai yra už šio konspekto ribų. Taigi, $P = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}\right)$.

Energijos ir judesio kiekio tvermės dėsniai naudojant 4-vektorius gali būti užrašyti viena lygtimi: uždaros sistemos 4-momentas išlieka nepakitęs, t.y.

$$\boxed{P = \text{const.}}$$

Kam lygus dydis $P \cdot P$? Pasinaudodami praeitu pratimu, žinome, kad jis lygus $-m^2c^2$. Be to, galime panaudoti skaliarinės sandaugos formulę:

$$-m^2c^2 = P \cdot P = -\frac{E^2}{c^2} + p^2$$

Gauname svarbią tapatybę, kūrią būtinai reiktų prisiminti:

$$\boxed{E^2 = p^2c^2 + m^2c^4.} \tag{6}$$

Visi 4-vektoriai transformuojasi pagal Lorenco transformacijas:

$$\begin{aligned}
ct' &= \gamma(ct) - \beta\gamma x, \\
x' &= -\beta\gamma(ct) + \gamma x, \\
y' &= y, \\
z' &= z,
\end{aligned}$$

kur $\beta = \frac{v}{c}$. 4-greitis $U = \gamma_u(c, \mathbf{u})$ transformuojasi pagal:

$$\begin{aligned}
\gamma_{u'} c &= \gamma(\gamma_u c) - \beta\gamma(\gamma_u u_x), \\
\gamma_{u'} u'_x &= -\beta\gamma(\gamma_u c) + \gamma(\gamma_u u_x), \\
\gamma_{u'} u'_y &= \gamma_u u_y, \\
\gamma_{u'} u'_z &= \gamma_u u_z,
\end{aligned}$$

kur $\gamma_u = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$, $\gamma'_u = \left(1 - \frac{u'^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$, $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$. Iš šių formulių galima gauti greičių sudėties taisykles, 4-vektorius galima tiesiog sudėti.

4-momemento transformavimo taisyklės:

$$\begin{aligned}
\frac{E'}{c} &= \gamma\frac{E}{c} - \beta\gamma p_x, \\
p'_x &= -\beta\gamma\frac{E}{c} + \gamma p_x, \\
p'_y &= p_y, \\
p'_z &= p_z.
\end{aligned}$$

Galima įvesti ir daugiau 4-vektorių, pavyzdžiui *4-pagreitis* yra

$$A = \frac{d^2X}{d\tau^2} = \gamma\left(\frac{d\gamma}{dt}c, \frac{d\gamma}{dt}\mathbf{v} + \gamma\mathbf{a}\right).$$

Pastebėsime, kad $A \cdot V = 0$.

4-jėga lygi

$$F = mA = \frac{dP}{d\tau} = \left(\gamma\frac{\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}}{c}, \gamma\mathbf{f}\right),$$

kur $\mathbf{f}$ yra 3-jėga pažįstama iš Niutono mechanikos, o $\mathbf{f}\cdot\mathbf{v} = \frac{dE}{dt}$. Atkreipkite dėmesį, jei laiką t pakeičiame į τ ir 3-vektorius pakeičiame į 4-vektorius, tai galioja pažįstamos formulės iš Niutono mechanikos!

Literatūra

[1] D. Tong, *Dynamics and Relativity*, http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/relativity/eight.pdf

[2] Wikipedia, the free encyclopedia.