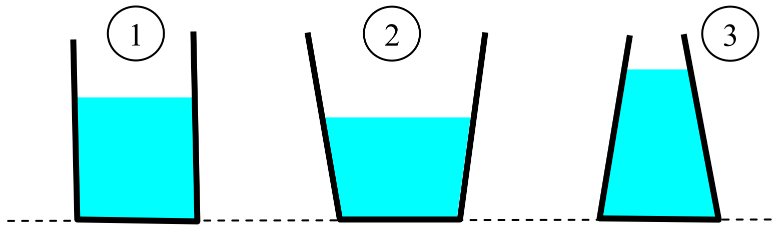
Fizikos Olimpas 2008 m. vasaros sesija

2 kursas

Skysčių ir dujų mechanikos uždaviniai

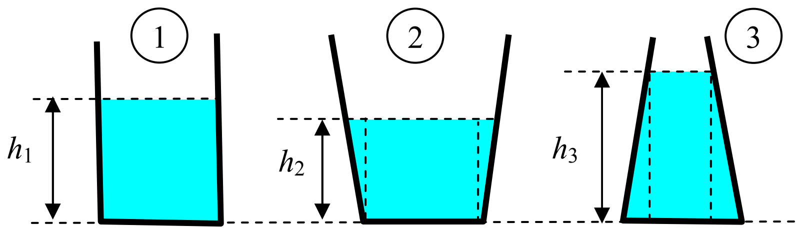
1. Trys indai turi vienodą dugno plotą (žiūr. brėž.). Palyginkite slėgio jėgą į kiekvieno indo dugną, jei į indus supilamas vienodas kiekis vandens. Kiekvienu atveju palyginkite slėgio jėgą su įpilto vandens svoriu.



Ats.: $F_3 > F_1 > F_2$; $F_1 = P, F_2 < P, F_3 > P$.

Sprendimas

Jei indų dugnų plotai vienodi,tai į juos supylus vienodą vandens kiekį į viršų siaurėjančiame ine vandens aukštis bus didesnis už stačiojo cilindro vandens aukštį, o į viršų platėjančiame inde – mažesnis, t.y. $h_3 > h_1 > h_2$. Slėgį į dugną atvirame inde lemia vandens aukštis, t.y. $p = \rho g h$, todėl slėgiams $p_3 > p_1 > p_2$. Indų dugnų plotai vienodi, todėl ir jėgoms galioja tokios pat nelygybės: $F_3 > F_1 > F_2$.



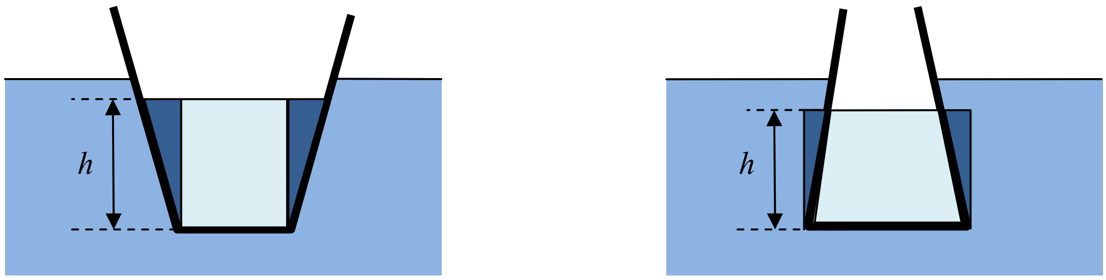
1-ajame inde $F_1 = \rho g h_1 S = \rho V S = mg = P$ (čia tūris $V = hS$) . Taigi, $F_0 = P$. Tuomet $F_2 < P$, o $F_3 > P$. Čia susiduriame su žymiuoju hidrostatiniu paradoksu. Vienok jis paaiškinamas indų sienelių įtaka. Pvz., atveju, kai $F_2 < P$, sienelės veikiamos dalim vandens svorio jėgos ir „kelia“ vandenį į viršų. Trečiuoju atveju atvirkščiai – sienelės papildomai spaudžia vandenį į dugną.

2. Į vandenį įleidžiamas indas su pridedamu plokščiu dugnu ir turintis nupjautinio kūgio formą. Jei į tokį indą pripilama m masės vandens, dugnas nukrenta. Ar nukris dugnas, jei vietoje vandens ant jo 1) uždedamas m masės svarstis; 2) pripilama m masės alyvos; 3) pripilama m masės gyvsidabrio? Išnagrinėti atvejus, kai indo sienelės į viršų platėja arba siaurėja.

Ats.: Indo sienelės į viršų platėja: 1) uždėjus svarstį, dugnas nukrenta; 2) Pripylus alyvos, dugnas lieka vietoje; 3) pripylus gyvsidabrio, dugnas nukrenta. Kai indo sienelės į viršų siaurėja, atsakymai visais atvejais priešingi.

Sprendimas

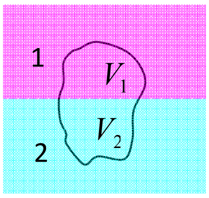
Dugnas nukrenta, jei jėga, veikianti dugną kartu su pačio dugno svoriu, viršytų hidrostatinio slėgio sukuriamą jėgą iš apačios.



Jei indas į viršų platėja, į indo dugną slegia ne visas *m* masės vanduo (iškrenta brėžinyje kairėje parodytos tamsios sritys). Todėl masės *m* svarstis slėgs į dugną didesne jėga, ir šis nukris. Jei pripilama *m* masės alyvos, ji užims didesnį tūrį nei vanduo, todėl jos tamsios sritys bus santykinai didesnės nei vandens, ir į dugną slėgs mažesnio svorio alyvos dalis, todėl dugnas liks vietoje. Gyvsidabrio atveju jo tūris (ir aukštis) bus mažesnis už vandens, tamsios sritys santykinai užims mažesnę dalį nei vanduo, todėl dugną slėgs santykinai didesnė gyvsidabrio dalis, ir šis atkris.

Jei indas į viršų siaurėja, į dugną dėl sienelių spaudimo žemyn slegia didesnė nei *m* masės vandens svoris (šį papildomą svorį sudaro tamsesnės sritys brėžinyje dešinėje). Dėl to *m* masės svarstis nepajėgs pastumti dugno, ir šis liks vietoje. Alyvos atveju jos aukštis bus didesnis lyginant su vandeniu, todėl tamsios sritys užims santykinai didesnę viso alyvos kiekio dalį, ir slėgimo į dugną jėga viršys vandens svorį, todėl dugnas atkris. Gyvsidabrio atveju jo aukštis mažesnis už vandens ir tamsios sritys užims santykinai mažesnę gyvsidabrio dalį, todėl slėgio į dugną jėga bus mažesnė nei vandens svoris, ir dugnas liks vietoje.

3. Kūnas plūduriuoja ties dviejų skysčių, kurių tankai ρ_1 ir ρ_2, riba (žiūr. brėž.). Kūno dalių skysčiuose tūriai yra V_1 ir V_2. Kokia Archimedo jėga veikia kūną? Koks kūno tankis?



Ats.: $F_A = (\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2) g$, $\rho = \dfrac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{V_1 + V_2}$.

Sprendimas

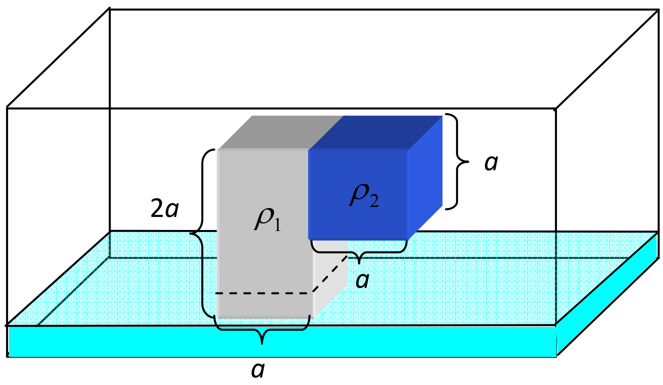
Įsivaizduokime, kad V_1 ir V_2 dalis pakeitėme atitinkamai skysčiais 1 ir 2. Akivaizdu, kad pusiausvyra bus išlaikyta. Archimedo jėga lieka ta pati, nes tūriai V_1 ir V_2 nepakito. Jei yra pusiausvyra, tai ir žemyn veikia tokio pat dydžio jėga. Bet šiuo atveju ją lengva apskaičiuoti:

$$F_A = (\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2) g \,.$$

Apskaičiuojame kūno tankį:

$$\rho = \frac{F_A}{g(V_1 + V_2)} = \frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{V_1 + V_2} \,.$$

4. Iš dviejų vienodo storio plokštelių, kurių tankiai $\rho_1 = 4{,}5 \frac{\mathbf{g}}{\mathbf{cm}^3}$ ir $\rho_2 = 8{,}6 \frac{\mathbf{g}}{\mathbf{cm}^3}$, išpjauti kvadratas su kraštine a ir stačiakampis su kraštinėmis a ir $2a$ (kvadratas išpjautas iš tankesnės medžiagos). Kvadratas kietai sutvirtintas su stačiakampiu ir gauta figūra pastatyta indo dugne (žr. brėž.). Kas atsitiks, indą pildant vandeniu?



Ats.

1) Jei vanduo nepatenka po stačiakampe plokštele, figūra liks vietoje nejudama, kiek vandens bebūtų įpilta.

2) Jei vanduo patenka po stačiakampe plokštele, figūra apvirs į dešinę, kai vandens lygis pasieks aukštį $h = a\frac{2\rho_1 - \rho_2}{\rho}$, čia ρ - vandens tankis. Duotiems tankiams $h = 0{,}4a$.

Sprendimas

1) Jei vanduo nepatenka po stačiakampe plokšte, vandeniui pasiekus kvadratinę figūros dalį, ją pradeda veikti keliamoji Archimedo jėga. Tačiau pusiausvyra nesutrikdoma – ji darosi dar stabilesnė, nes dėl Archimedo jėgos palengvėja kvadratinė figūros dalis.
2) Jei vanduo patenka po stačiakampe figūros dalimi, įpylus tam tikro aukščio h vandens jėgos momentai atžvilgiu taško O susilygina. Jei tik viršijamas šis lygis h, figūra apvirs į dešinę (pagal laikrodžio rodyklę). Užrašome šiam kritiniam aukščiui momentų lygybės sąlygą:

$$a \cdot 2a \cdot \rho_1 \cdot \frac{a}{2} = a \cdot a \cdot \rho_2 \cdot \frac{a}{2} + h \cdot a \cdot \rho \cdot \frac{a}{2}.$$

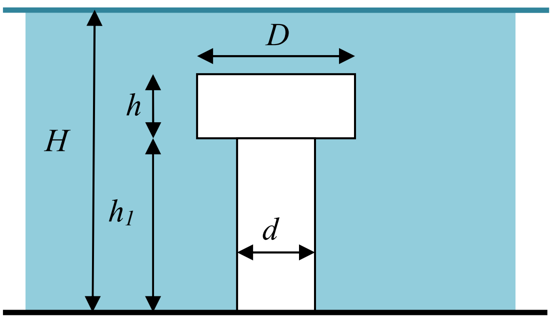
Iš čia $h = a\dfrac{2\rho_1 - \rho_2}{\rho} = 0{,}4a$.

5. Jūros dugne sumontuota grybo formos betono konstrukcija (žr. brėž.). Kokia jėga ji slegia jūros dugną? Betono tankis ρ_b, o vandens - ρ_v.

Ats.:

$$P = \frac{\pi g}{4}[\rho_b(d^2 h_1 + D^2 h) - \rho_v D^2 h + \rho_v d^2(H - h)] .$$

Sprendimas



Žemyn veikia betono konstrukcijos sunkio jėga, o aukštyn – Archimedo jėga, veikianti tik apatinę *D* dalies žiedo formos dalį dėl slėgių skirtumo:

$$P = \left(\frac{\pi D^2}{4}h + \frac{\pi d^2}{4}h_1\right)\rho_b g - \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4}\rho_v g(H - h_1) + \frac{\pi D^2}{4}\rho_v g(H - h_1 - h) =$$

$$= \frac{\pi g}{4}[\rho_b(d^2 h_1 + D^2 h) - \rho_v D^2 h + \rho_v d^2(H - h)].$$

6. Didelio ežero viduryje buvo iškirsta eketė. Ledo storis pasirodė besąs 6 m. Kokiame gylyje nuo ledo paviršiaus pasirodė vanduo?

Ats.: Vanduo yra 60 cm gylyje nuo ledo paviršiaus.

Sprendimas

Ežeras didelis, todėl ledo sluoksnis nubus įsirėmęs ir laikomas ledo krantų, nes tam reikėtų milžiniško ledo stiprumo. Taigi, ledas tiesiog plūduriuoja virš vandens kaip aisbergas. Ledo tankio ir vandens tankio santykis yra apie 0,9, todėl tokia ledo dalis bus panirusi, o 0,1 dalis nuo viso aukščio (ledo storio) bus virš vandens. Tuo būdu 0,1x6 m = 60 cm.

7. Puode su vandeniu plūduriuoja degtukų dėžutė, kurios dugne padėtas akmenukas. Kaip pasikeis vandens lygis puode, jei akmenukas išimamas iš dėžutės ir įmetamas į vandenį?

Ats.: Vandens lygis nusileis.

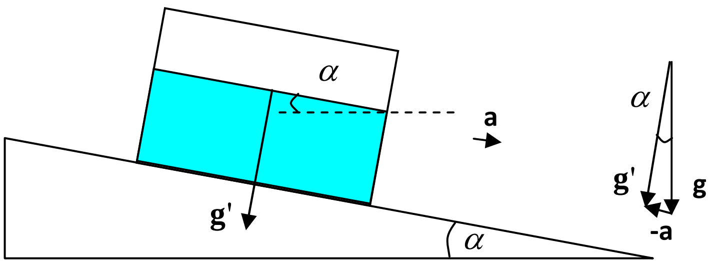
Sprendimas

Išėmus iš dėžutės akmenuką, jos išstumto vandens tūris sumažės dydžiu $V_1 = \dfrac{m}{\rho_v}$ (čia m – akmenuko masė, o ρ_v - vandens tankis), ir vandens lygis nukris. Aukščio pokytis $\Delta h_1 = \dfrac{V_1}{S}$ (čia S – atviro vandens paviršiaus plotas puode). Įmetus akmenuką į vandenį, bus išstumtas vandens tūris $V_2 = \dfrac{m}{\rho_a}$ (čia ρ_a - akmenuko tankis) ir vandens lygis pakils dydžiu $\Delta h_2 = \dfrac{V_2}{S}$. Kadangi $\rho_a > \rho_v$, tai $V_2 < V_1$, ir $\Delta h_2 < \Delta h_1$, todėl galiausiai vandens lygis nukris.

8. Nuožulniąja plokštuma be trinties juda indas su vandeniu. Kaip atrodo vandens paviršius šiame judančiame inde?

Ats.: Vandens paviršius lygiagretus nuožulniajai plokštumai.

Sprendimas

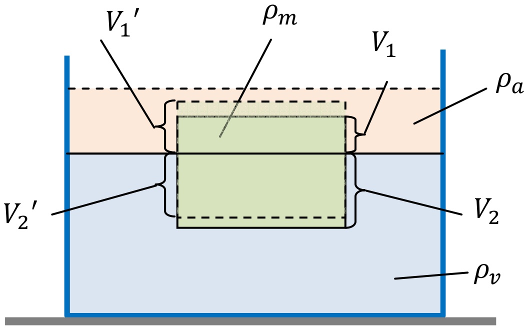


Nagrinėdami mechanikos uždavinius indo kaip neinercinės sistemos atžvilgiu pagal Dalambero principą privalome įvesti inercijos jėgą, atitinkančią pagreitį –**a** (žiūr. brėž.). Taigi, toje sistemoje veikia pagreitis $\mathbf{g'}$, sudarantis kampą α su pagreičiu **g**. Sistemoje, kurioje veikia jėgos laukas, atitinkantis pagreitį, $\mathbf{g'}$, visi paviršiai turi būti statmeni šiam pagreičiui. Tuo būdu, vandens paviršius turi sudaryti kampą α su horizontu. Taigi, vandens paviršiaus plokštuma lygiagreti nuožulniajai plokštumai.

9. Vandenyje plaukioja medinis tašelis. Kaip pasikeis tašelio dalies, esančios virš vandens, tūris, užpylus ant vandens alyvos, visiškai padengiančios tašelį?

Ats.: $\dfrac{V_1'}{V_1} = \dfrac{\rho_v}{\rho_v - \rho_a}$, čia V_1' ir V_1 – tašelio dalių, esančių virš vandens, tūriai atitinkamai su alyvos sluoksniu ir be jo, ρ_v ir ρ_a – atitinkamai vandens ir alyvos tankiai.

Sprendimas



Pažymėkime visą tašelio tūrį V, virš vandens ir vandenyje esančio tašelio tūrį atitinkamai $V_1 ir\ V_2$, kai nėra alyvos, o užpylus alyvą - atitinkamai $V_1' ir\ V_2'$. Tuo būdu, turime surasti $\frac{V'_1}{V_1}$. Akivaizdu, kad $V = V_1 + V_2 = V_1' + V_2{}'$.

Užrašome pusiausvyros sąlygą be alyvos (tašelio svoris kompensuojamas Archimedo jėgos):

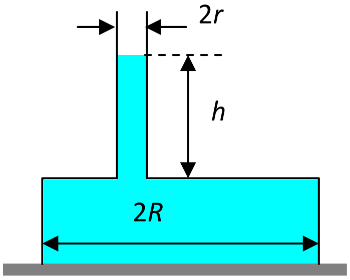
$\rho_m V = \rho_v V_2$. Bet $V_2 = V - V_1$, taigi $V_1 = \dfrac{\rho_v - \rho_m}{\rho_v} V$.

Kai užpilama alyva, pusiausvyros sąlyga atrodo taip:

$\rho_m V = \rho_v V_2' + \rho_a V_1'$. Vėlgi imdami $V_2' = V - V_1'$, gauname $V_1' = \dfrac{\rho_v - \rho_m}{\rho_v - \rho_a} V$. Taigi,

$$\frac{V_1{}'}{V_1} = \frac{\rho_v}{\rho_v - \rho_a}.$$

10. Msės m puodas, kurio dugno spindulys R, apverstas ir padėtas ant lygaus paviršiaus visiškai prie jo priglunda. Puodo dugne įtaisytas spindulio r vamzdelis (žiūr.brėž.). Į puodą per vamzdelį pilamas vanduo tol, kol pradeda sunktis iš po puodo. Apskaičiuoti vandens stulpo aukštį h vamzdelyje. Tarti, kad vamzdelio masė daug mažesnė už puodo masę.



Ats.: $h = \dfrac{m}{\pi\rho(R^2 - r^2)}$, čia ρ - vandens tankis.

Sprendimas

Į viršų puodą kelia slėgio ties puodo dugnu jėga, nes pagal Paskalio dėsnį slėgis perduodamas į visas puses (taip pat ir į viršų) vienodai. Taigi,

$$\rho g h = \frac{mg}{\pi(R^2 - r^2)}, \text{ iš čia } \quad h = \frac{m}{\pi\rho(R^2 - r^2)}.$$

11. Gintaro gabalas sveriamas tiksliomis svertinėmis svarstyklėmis. Svarstyklės pusiausvyroje, kai gintaras atsveriamas žalvariniu svareliu, kurio masė $m_1 = 300{,}00$ g. Sveriama 0°C temperatūroje jūros lygyje. Kokia tikroji gintaro gabalo masė? Kokios papildomos masės Δm prireiks pasiekti pusiausvyrai 5,5 km aukštyje virš jūros lygio, kur oro tankis dvigubai mažesnis? Ant kurios svarstyklių lėkštelės šios masės svarelį reikės uždėti? Atitinkami medžiagų tankiai: $\rho_0 = 1{,}29\,\frac{kg}{m^3}, \rho_ž = 8{,}50 \cdot 10^3\,\frac{kg}{m^3}, \rho_g = 1{,}10 \cdot 10^3\,\frac{kg}{m^3}$.

$$\text{Ats.}: m \approx 300{,}00\left(1 - \frac{\rho_o}{\rho_ž} + \frac{\rho_o}{\rho_g}\right) = 300{,}3 \text{ g};\ \Delta m \approx m_1 \frac{\rho_0(\rho_ž - \rho_0)}{2\rho_g \rho_ž} \approx 150 \text{ mg};\ \text{šią papildomą}$$

masę reikės uždėti ant lėkštelės su žalvariniu svareliu.

Sprendimas

Užrašome svarstyklių pusiausvyros sąlygą, atsižvelgdami į Archimedo keliamąją jėgą ore, kuri skirtinga gintaro gabalui ir žalvariniam svareliui. Jei *m* – tikroji gintaro masė, jo tūris V_g, o svarelio tūris $V_ž$, tai lygtis tokia:

$$mg - V_g\rho_0 g = m_1 g - V_ž \rho_0 g,$$

$$mg\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_g}\right) = m_1 g\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_ž}\right), \text{tuo būdu,}$$

$$m = m_1 \frac{1 - \frac{\rho_o}{\rho_ž}}{1 - \frac{\rho_o}{\rho_g}} \approx m_1\left(1 - \frac{\rho_o}{\rho_ž} + \frac{\rho_o}{\rho_g}\right) = 300{,}3 \text{ g.}$$

5,5 km aukštyje oro tankis $\rho'_o = \frac{\rho_0}{2}$, todėl gintaras čia bus keliamas labiau sumažėjusia Archimedo jėga nei žalvarinis svarelis, lyginant su svėrimu jūros lygyje, nes gintaro gabalo tūris didesnis už žalvarinio svarelio tūrį ($\rho_ž > \rho_g$). Reikės papildomos masės Δm ant lėkštelės su svareliu. Tada lygsvaros atveju

$$mg - V_g\rho'_0 g = m_1 g - V_ž\rho'_0 g + \Delta m g\,,$$

$$\Delta m = m\left(1 - \frac{\rho_0}{2\rho_g}\right) - \left(1 - \frac{\rho_0}{2\rho_ž}\right) \approx m_1\left[\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_ž} + \frac{\rho_0}{\rho_g}\right)\left(1 - \frac{\rho_0}{2\rho_g}\right) - 1 + \frac{\rho_0}{2\rho_ž}\right] \approx$$

$$\approx m_1\left(-\frac{\rho_0}{\rho_ž} + \frac{\rho_0}{\rho_g} - \frac{\rho_0}{2\rho_g} + \frac{\rho_0}{2\rho_ž}\right) = m_1\frac{\rho_0(\rho_ž - \rho_0)}{2\rho_g\rho_ž} \approx 150 \text{ mg.}$$

12. Stiklinėje plūduriuoja gabalas ledo. Kaip pasikeis vandens lygis stiklinėje, ištirpus visam ledui? Kaip pakistų šis lygis, jei lede būtų įšalęs: 1) metalo šratas? 2) butelio kamštis? Tarti, kad atitinkamai metalo, vandens, ledo ir kamščio tankiams galioja $\rho_m > \rho_v > \rho_l > \rho_k$.

Ats.: Ištirpus vienalyčiam ledo gabalui, vendens lygis stiklinėje nepakinta. Ištirpus ledui su įšalusiu metalo šratu vandens lygis nukrinta, o su įšalusiu kamščiu – lygis nepakinta.

Sprendimas

Vienalyčio ledo gabalas.

Jei po vandeniu esančio ledo tūris V_{l1}, ledo masė *m,* o visas ledo tūris *V*, tai pagal Archimedo dėsnį po vandeniu yra ledo tūris $V_{l1} = \dfrac{m}{\rho_v} = \dfrac{\rho_l}{\rho_v} V$, čia $m -$ viso ledo masė. Antra vertus, iš tūrio V ledo susidaro vandens tūris $V_v = \dfrac{\rho_l}{\rho_v} V$, t. y. šis vanduo ir užpildys po vandeniu buvusio ledo tūrį, todėl galiausiai vandens lygis nepakis.

Ledas su įšalusiu metalo šratu.

Tegul šiuo atveju po vandeniu esančio ledo gabalo tūris V_{l2}, visas ledo tūris V_l, ledo kartu su šratu masė $m_{lš} = m_l + m_š$. Tuomet pagal Archimedo dėsnį $V_{l2} = \frac{m_{lš}}{\rho_v} = \frac{m_l + m_š}{\rho_v} = \frac{\rho_l}{\rho_v} V_l + \frac{\rho_m}{\rho_v} V_š$.

Bet iš ledo susidaro $V_{vš} = \dfrac{\rho_l}{\rho_v} V_l$ vandens, o visam šratui panirus, išstumiamas $V_š$ *tūris* vandens, todėl $V_{l2} > V_{vš} + V_š$, nes $\rho_m > \rho_v$, Tuo būdu, po vandeniu esančio ledo tūris nėra užpildomas susidariusiu iš ledo ir išstumtu šrato vandens tūriu. Dėl to galiausiai vandens lygis stiklinėje nukris.

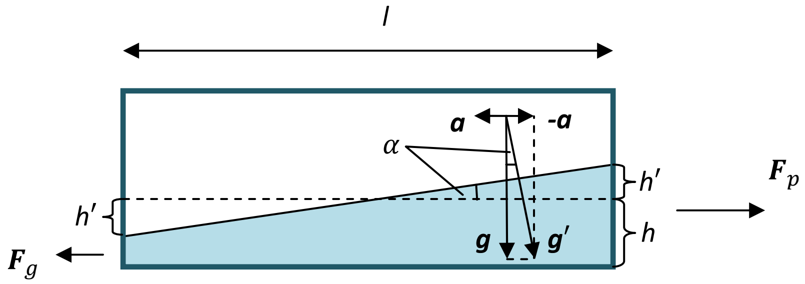
Ledas su įšalusiu kamščiu

Tegul šiuo atveju po vandeniu esančio ledo gabalo tūris V_{l3}, visas ledo tūris V_l, ledo kartu su kamščiu masė $m_{lk} = m_l + m_k$. Tuomet pagal Archimedo dėsnį $V_{l3} = \frac{m_{lk}}{\rho_v} = \frac{m_l + m_k}{\rho_v} = \frac{\rho_l}{\rho_v} V_l + \frac{\rho_k}{\rho_v} V_k$. Bet iš ledo susidaro $V_{vk} = \frac{\rho_l}{\rho_v} V_l$ vandens, o likusio plūduriuoti kamščio išstumiamas po vandeniu esančio V_{k1} *tūris* vandens. Jis lygus $V_{k1} = \frac{\rho_k}{\rho_v} V_k$., todėl $V_{l3} = V_{vk} + V_{k1}$, t. y. tiksliai tiek, kiek tūrio užėmė po vandeniu buvęs ledas. Tuo būdu, vandens lygis stiklinėje nepakis.

13. Benzovežis, kurio cisterna dalinai užpildyta benzinu, judėdamas $v = 40 \, \frac{\text{km}}{\text{val}}$ greičiu, pradeda stabdyti ir tolygiai lėtėdamas sustoja per $t = 15$ s. Rasti, kiek kartų stabdymo metu slėgio jėga į priekinę cisternos sienelę didesnė už jėgą, veikiančią galinę sienelę. Cisterna – tai stačiakampis gretasienis, kurio ilgis $l = 4{,}0$ m. Benzino lygis nejudančioje cisternoje $h = 0{,}40$ m.

$$Ats.: \frac{F_p}{F_g} \approx \left(\frac{2ght + lv}{2ght - lv}\right)^2 = 4{,}9.$$

Sprendimas



Stabdymo metu cisterna – neinercinė sistema, kurioje pagal Dalambero principą galime įvesti inercijos pagreitį, priešingą cisternos pagreičiui $\boldsymbol{a}$ (žiūr. brėž.) ir nagrinėti reiškinius kaip inercinėje sistemoje. Tuomet atstojamasis pagreitis $\boldsymbol{g'} = \boldsymbol{g} - \boldsymbol{a}$. Jis statmenas bezino paviršiui, kuris tokiu būdu formuojasi cisternos stabdymo metu. Čia matome, kad priekinę sienelę veikia slėgio jėga F_p, kuri didesnė už galinę sienelę veikiančią jėgą F_g . Kadangi hidrostatinis slėgis proporcingas gyliui, tai jėgos, veikiančios sienelę, skaičiavimui galime imti vidutinę jėgą, kuri lygi jėgai ties puse aukščio. Tuo būdu, jei cisternos plotis s, šios jėgos atitinkamai lygios:

$$F_p = \frac{\rho g(h + h')}{2} S_p, F_g = \frac{\rho g(h - h')}{2} S_g.$$

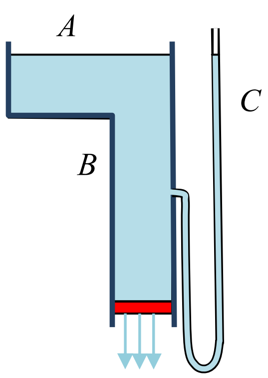
Čia prieknės ir galinės sienelės plotai, apsemti benzinu, atitinkamai lygūs

$$S_p = s(h + h') \text{ ir } S_g = s(h - h').$$

Iš brėžinio matyti, kad $h' = \frac{l}{2}\sin\alpha$. Kampą galime surasti iš pagreičio a ir g santykio, pastebėdami, kad realiu atveju $a \ll g$. Taigi, $\sin\alpha \approx \tan\alpha \approx \frac{a}{g}$. Pagreičio a vertę randame iš tolygiai lėtėjančio judėjimo lygties, t.y. $a = \frac{v}{t}$. Tai įrašę į ankstesnes jėgų išaiškas ir paėmę jėgų santykį, gauname

$$\frac{F_p}{F_g} = \left(\frac{h + h'}{h - h'}\right)^2 \approx \left(\frac{2ght + lv}{2ght - lv}\right)^2 = 4{,}90.$$

14.

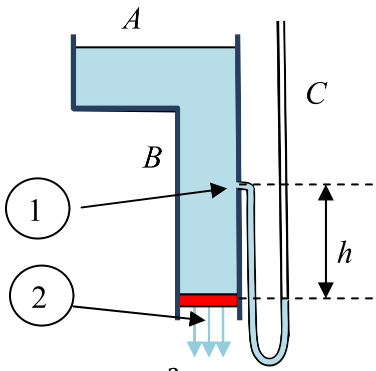


Labai platus cilindro formos indas A dugne turi kiaurymę, sujungtą su vamzdžiu B, prie kurio prijungtas manometras C. Apatinis vamzdžio galas užkištas kamščiu, o skysčio lygiai inde ir manometre lygūs. 1) Kur yra manometro skysčio lygis, jeigu atkemšamas vamzdis ir skysčiui leidžiama laisvai tekėti? Į vidinę skysčio trintį neatsižvelgti. 2) Kaip pasikeistų atsakymas, jei vamzdis į apačią siaurėtų?

Ats.: 1) Manometro skysčio lygis yra ties apatiniu vamzdžio B galu. 2) Manometro skysčio lygis yra aukščiau už apatinį vamzdžio B galą.

Sprendimas

1) Užrašome Bernulio lygtį srovės vamzdeliui taškams 1 ir 2 (žiūr. brėž).



$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}$. Čia $v_1 = v_2$ (tai seka iš nenutrūkstamumo lygties

$v_1 S_1 = v_2 S_2$). Be to, apatiniame vamzdžio B gale $p_2 = p_0$. Taigi, $p_1 = p_0 - \rho g h$.

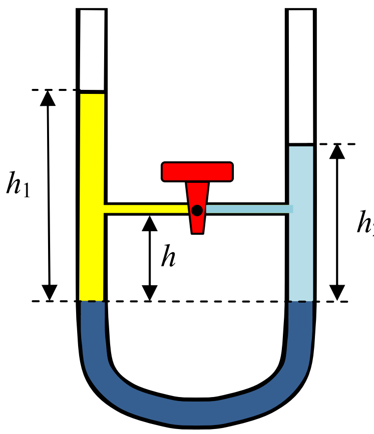
Tuo būdu, taške 1 slėgis yra mažesnis už atmosferos slėgį p_0 skysčio stulpo aukščio h slėgiu. Taigi, monometro C skysčio lygis yra ties apatiniu vamzdžio B galu.

2) Jei $S_2 < S_1$, tai iš nenutrūkstamumo lygties $v_2 > v_1$. Tada Bernulio lygtis tampa

$p_1 = p_0 - \rho g h + \frac{\rho}{2}(v_2^2 - v_1^2)$. Tuo būdu, manometro C skysčio lygis pakyla aukščiau

už vamzdžio B apatinį galą.

15.



Į *U* pavidalo vamzdelį įpilta gyvsidabrio, vandens ir spirito kaip parodyta brėžinyje. Gyvsidabrio, užpildančio apatinę dalį, lygis abiejose vamzdelio dalyse vienodas, o spirito aukštis $h_1 = 50$ cm. Vamzdelio dalys aukštyje $h = 30$ cm sujungtos žymiai siauresniu vamzdeliu, kuris uždarytas čiaupu. Koks yra vandens stulpelio aukštis h_2? Kas atsitiks, atidarius čiaupą? Kaip pasiskirstys skysčiai vamzdelio dalyse, jei spiritas pakeičiamas alyva, kuri skirtingai nuo spirito, su vandeniu nesimaišo, ir atidaromas čiaupas? Vandens tankis $\rho_v = 1{,}0 \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$, spirito ir alyvos $-$ $\rho_s \approx \rho_a \approx 0{,}80 \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$, o gyvsidabrio $-$ $\rho_g = 13{,}6 \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$. Į kapiliarinius reiškinius neatsižvelgti.

Ats.: $h_2 = \frac{\rho_s}{\rho_v} h_1 = 40$ cm. Atidarius čiaupą, spiritas tekės į vandens vamzdelį į dešinę.

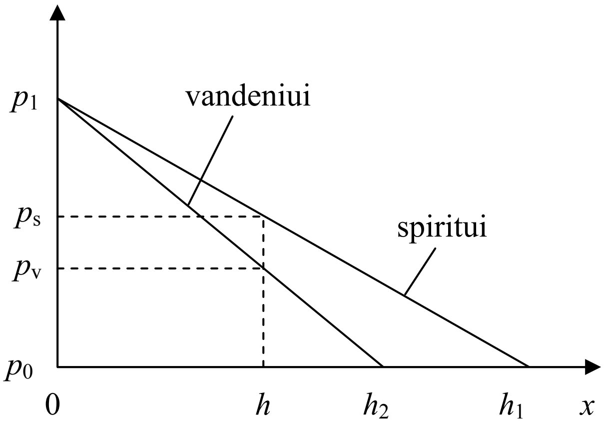
Spiritą pakeitus alyva ir atsukus čiaupą, virš jungiamoj vamzdelio abiejose U pavidalo vamzdelio dalyse yra vienodas alyvos aukštis $x = 15$ cm, dešinėje dalyje po vamzdeliu yra vanduo, kurio aukštis $l = 30{,}2$ cm, o kairėje – po vamzdeliu yra $y = 20$ cm alyvos stulpelis ir $z = 9{,}8$ cm vandens stulpelis. Gyvsidabrio lygis pakinta labia nežymiai: kairėje dalyje jis pakyla $H = 0{,}16$ cm, o dešinėje – tiek pat nusileidžia.

Sprendimas

Abiejose vamzdelio dalyse ties gyvsidabrio paviršiais slėgis vienodas, todėl

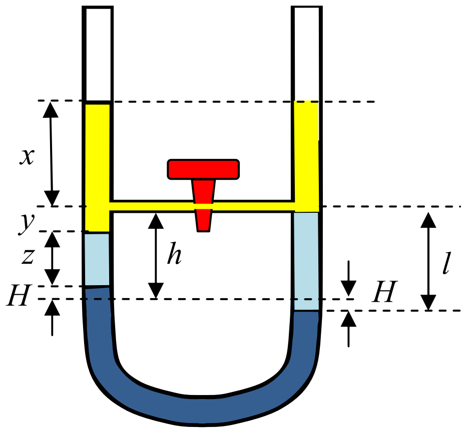
$\rho_v h_2 = \rho_s h_1$. Iš čia $h_2 = \dfrac{\rho_s}{\rho_v} h_1 = 40$ cm.

Atidėkime slėgio priklausomybę nuo aukščio vandens ir spirito stulpeliams:



Kaip matyti, aukštyje h ties čiaupu spirito stulpelyje slėgis didesnis už vandens slėgį ties čiaupu. Tuo būdu, atidarius čiaupą spiritas tekės į vamzdelio dalį su vandeniu. Spiritas maišosi su vandeniu, todėl galiausiai nusistovės pusiausvyra su tokia pat gyvsidabrio padėtimi bei vienodais spirito ir vandens mišinio lygiais abiejose U pavidalo vamzdelio dalyse.

Jei spiritas pakeičiamas alyva, atidarius čiaupą alyva tekės į vandens vamzdelio dalį ir kils į paviršių. Kapiliarumo reiškinių nėra, todėl vandens paviršius turi būti horizontalus. Taigi, vanduo tekės į alyvos vamzdelį ir grims į žemyn iki gyvsidabrio. Galiausiai nusistovės pusiausvyra, kuomet alyva užpildys abu vamzdelius iki jungiamojo vamzdelio, todėl alyvos lygis abiejose dalyse vienodas (per jungiamąjį vamzdelį tai susisiekiantis indas). Kairiajame vamzdelyje alyvos susikaupia ir žemiau jungiamojo vamzdelio. Kadangi dalis alyvos pateko iš kairiosios į dešiniąją dalį, aišku, kad turėjo nusileisti dešinysis ir pakilti kairysis gyvsidabrio lygis. Šis pokytis iš tikrųjų yra labai nedidelis. Įvedę atitinkamus pažymėjimus, surandame galutinę skysčių padėtį vamzdelio dalyse.



$h = y + H + (h_2 - h - H)$. Iš čia $y = 2h - h_2 = 20$ cm.

x surandame iš lygties

$2x + y = h_1$, iš čia $x = \dfrac{h_1 - y}{2} = 15$ cm.

Užrašome slėgių lygybę vienodai nuo dugno nutolusiems gyvsidabrio taškams, kuriuos pasirenkame taip: dešinėje – gyvsidabrio paviršiuje, kairėje – gyleje $2H$ nuo paviršiaus.

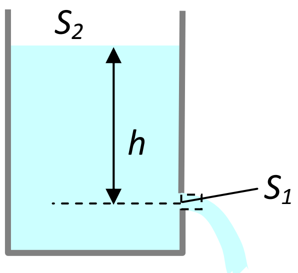
$\rho_v g(h + H) = 2\rho_g gH + \rho_v g(h_2 - h - H) + \rho_a g(2h - h_2)$. Iš čia surandame aukštį:

$H = \dfrac{(2h - h_2)(\rho_v - \rho_a)}{2(\rho_g - \rho_v)} = 0{,}16$ cm. Kaip ir reikėjo tikėtis, tai labai mažas aukštis, lyginant su kitais stulpelių aukščiais.

$z = h_2 - h - H \approx 9{,}8$ cm.

$l = h_2 - z \approx 30{,}2$ cm.

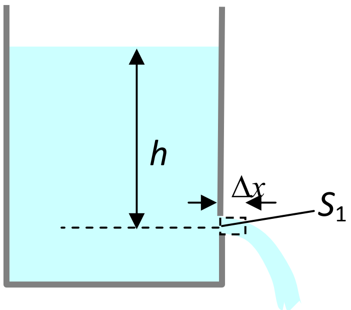
16. Indas pripildytas tankio ρ skysčio. Gylyje h yra nedidelė skylutė, iš kurios srūva skystis. Rasti skysčio tekėjimo greitį, jei skylutės skerspjūvis S_1 , o indo – S_2. Skystį laikyti idealiu. Kokiu greičiu mažėja skysčio lygis inde?



Ats.: $v_1 = \sqrt{\dfrac{2gh}{1 - \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2}} \approx \sqrt{2gh}$; $v_2 = \sqrt{\dfrac{2gh}{\left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2 - 1}} \approx \dfrac{S_1}{S_2}\sqrt{2gh}$

Sprendimas

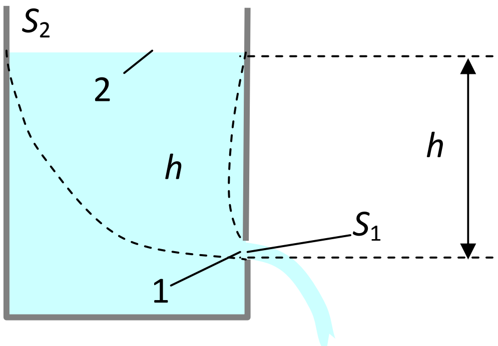
Pradžioje tarkime, kad $S_2 >> S_1$. Tegul per trumpą laiko tarpą iš skylutės išteka $S_1 \Delta x$ tūrio skysčio (žiūr. brėž.). Tai skysčio masė $\rho S_1 \Delta x$. Jai kinetinę energiją suteikia jėga, kurią galime apskaičiuoti kaip slėgio ir skylutės skerspjūvio sandaugą, t.y. $F = \rho g h S_1$. Jėga veikia, masei Δm įveikiant atstumą Δx, t.y. ji atlieka darbą $F \Delta x$.



Iš energijos tvermės dėsnio

$F \Delta x = \frac{\Delta m v_1^2}{2}$. Taigi, $\rho g h S_1 \Delta x = \frac{\rho S_1 \Delta x v_1^2}{2}$. Iš čia $v_1 = \sqrt{2gh}$.

Bendresniu atveju, kai nebūtinai indo skerspjūvis žymiai didesnis už skylutės skerspjūvį, galime pasinaudoti Bernulio lygtimi, imdami srovės vamzdelį, kuris brėžinyje parodytas punktyru.



Taigi, Bernulio lygtis 1 ir 2 taškui:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h \, .$$

Čia tariame, kad atmosferos slėgiai vandens paviršiuje ir skylutės atvirojoje pusėje vienodi.

Pasinaudojame ir nenutrūkstamumo lygtimi

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \, .$$

Iš šių lygčių surandame

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gh}{1-\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2}},$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2gh}{\left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2 - 1}}.$$

Matome, kad v_1 išraiškoje, kai $S_2 >> S_1$, greičio išraiška tampa tokia pat kaip ankstesnė: $v_1 = \sqrt{2gh}$, o $v_2 \approx \frac{S_1}{S_2}\sqrt{2gh}$.

17. Platus cilindro formos indas, kurio dugne esanti nedidelė kiaurymė užkišta kamščiu, iki aukščio h pripildytas vandens. Po kiek laiko iš indo ištekės visas vanduo, atkimšus kiaurymę? Indo ir kiaurymės skerspjūviai atitinkamai lygūs S ir σ. Į vandens klampumą nekreipti dėmesio.

Ats.: $t = \frac{S}{\sigma}\sqrt{\frac{2h}{g}}$.

Sprendimas

Panagrinėjame vandens tekėjimą, kai jo lygis x. Tuomet iš nedidelės kiaurymės vanduo teka greičiu $v(x) = \sqrt{2gx}$. Iš nenutrūkstamumo lygties išplaukia, kad vandens lygis inde mažėja greičiu

$$v_x(x) = \frac{\sigma}{S}v(x) = \frac{\sigma}{S}\sqrt{2gh}.$$

Taigi, visas laikas lygus

$$t = \int_0^h \frac{dx}{v_x(x)} = \frac{S}{\sigma\sqrt{2g}}\int_0^h \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{S}{\sigma}\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

18. Ant lygaus stalo stovi platus skerspjūvio S indas su vandeniu. Vandens aukštis inde h, o indo svoris P. Šoninėje indo sienelėje netoli dugno yra nedidelė apskritimo formos spindulio r kiaurymė, užkišta kamščiu. Atkimšus kiaurymę, indas pradeda šliuožti stalu. Ką gaima pasakyti apie trinities tarp indo ir stalo koeficientą?

Ats.: $\mu < \frac{2gh\rho\pi r^2}{P + \rho ghS}$.

Sprendimas

Per gylyje h esančią kiaurymę vanduo veržiasi greičiu $v = \sqrt{2gh}$. Per mžą laiko tarpą Δt

išbėga $\Delta m = \rho v \Delta t \pi r^2$ vandens. Ši vandens masė yra vekiama jėga $F = \rho g h \pi r^2$. Taigi, šiam vandens kiekiui galime užrašyti judesio kiekio tvermės dėsnį:

$$F\Delta t = \Delta m v, \text{ iš čia } F = \frac{\Delta m v}{\Delta t} = \frac{\rho v \Delta t \pi r^2 v}{\Delta t} = \pi r^2 \rho v^2 = 2\pi \rho g h r^2.$$

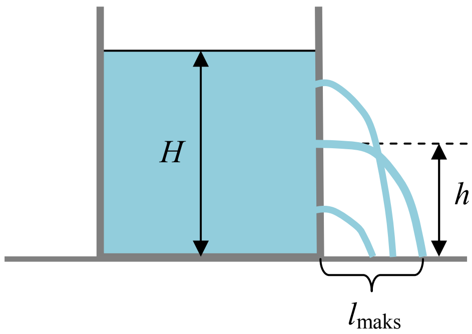
Pagal III Niutono dėsnį tokia pat jėga tik priešinga kryptimi yra veikiamas ir indas. Jis pajuda, kuomet ši jėga viršija trinties jėgą, t.y.

$$F > \mu(P + \rho S h g). \text{ Iš čia gauname } \mu < \frac{2\pi \rho g h r^2}{P + \rho S h g}.$$

19. Iš statinės su vandeniu šoninės sienelės esančių mažų skylučių švirkščia vanduo. Pastebėta, kad toliausiai vanduo žemę pasiekia iš skylutės, kuri yra h = 60 cm virš žemės. Kiek vandens yra statinėje? Tarti, kad statinė yra cilindro formos.

Ats.: $H = 1{,}2$ m .

Sprendimas



Tegul skylutė yra aukštyje x virš žemės, o vandens statinėje aukštis H. Iš skylutės vanduo veržiasi greičiu $= \sqrt{2g(H - x)}$. Jei laikas, per kurį vanduo pasiekia žemę, yra t, tai horizontalus atstumas, kurį įveikia vanduo, lygus $l = vt$. Antra vertus, laikas t lygus vandens kritimo iš aukščio x laikui:

$$x = \frac{gt^2}{2}, \text{ iš čia } t = \sqrt{\frac{2x}{g}}. \text{ Taigi, } l = \sqrt{2g(H - x)} \cdot \sqrt{\frac{2x}{g}} = 2\sqrt{x(H - x)}.$$

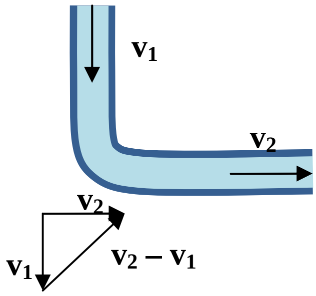
l bus maksimalus, kai pošaknis maksimalus. Tai atitiks x, kuris tenkina sąlygą

$$[x(H - x)]' = 0, \text{arba } H - x - x = 0. \text{ Iš čia } x = \frac{H}{2}, t.y. H = 2h = 1{,}2 \text{ m}.$$

20. Sulenktu 90° kampu vamzdžiu, kurio skerspjūvis S, greičiu v teka dujos. Dujų tankis ρ. Kokia jėga dujos veikia vamzdį? Kokia veiktų jėga, jei vamzdis būtų sulenktas 60° kampu? 120°?

Ats.: $F_1 = \sqrt{2}\rho S v^2$; jei kampas 60°, $F_2 = \sqrt{3}\rho S v^2$; jei kampas 120°, $F_3 = \rho S v^2$.

Sprendimas



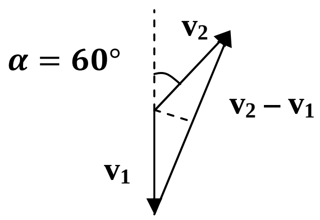
Čia aišku, kad $|\boldsymbol{v}_2| = |\boldsymbol{v}_1| = v$, bet dujų tekėjimo kryptis pakinta. Imdami mažą Δt, galime apskaičiuoti judesio kiekio pokytį, kurį įgyja per šį laiką pratekėjusių dujų masė $\Delta m = \rho S v \Delta t$. Šis judesio kiekio pokytis atsiranda dėl jėgos impulso. Tai jėga, kuria vamzdis veikia dujų masę, bet tokia pat jėga pagal III Niutono dėsnį veikiamas ir vamzdis. Būtent šią jėgą $\boldsymbol{F_1}$ ir turime surasti. Taigi,

$\Delta m \boldsymbol{v}_2 - \Delta m \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{F}_1 \Delta \boldsymbol{t}$.

$\rho S v \Delta t(\boldsymbol{v_2} - \boldsymbol{v_1}) = \boldsymbol{F_1} \Delta t$, tuo būdu, $F_1 = \rho S v |\boldsymbol{v_2} - \boldsymbol{v_1}|$. Iš brėžinio matyti, kad

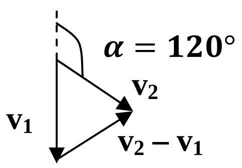
$|\boldsymbol{v_2} - \boldsymbol{v_1}| = \sqrt{2} v$. Tuomet, $F_1 = \sqrt{2} \rho S v^2$.

Jei vamzdis būtų sulenktas 60° kampu, vektoriai atrodytų taip:



Šuo atveju $F_2 = \rho S v |\boldsymbol{v_2} - \boldsymbol{v_1}| = 2\rho S v^2 \sin 60° = \sqrt{3}\, \rho S v^2$.

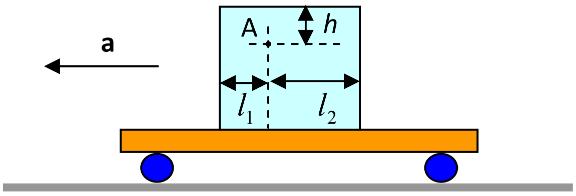
Jei vamzdis būtų sulenktas 120° kampu, vektoriai atrodytų taip:



Šuo atveju

$F_3 = \rho S v |\boldsymbol{v_2} - \boldsymbol{v_1}| = 2\rho S v^2 \sin 30° = \rho S v^2$.

21. Ant vežimėlio stovi kubo formos indas, pilnas vandens. Vežimėlis juda pastoviu pagreičiu *a*. Rasti slėgį taške A, esančiame gylyje *h* ir atstumu l_1 ir l_2 nuo kubo sienelių. Indas tvirtai uždengtas dangčiu.



Ats.: $p = \rho(gh + al_1)$.

Sprendimas

Jei vežimėlis stovėtų ($a = 0$), tai taške A būtų slėgis

$$p_g = \rho gh \text{ (čia } \rho \text{ - vandens tankis).}$$

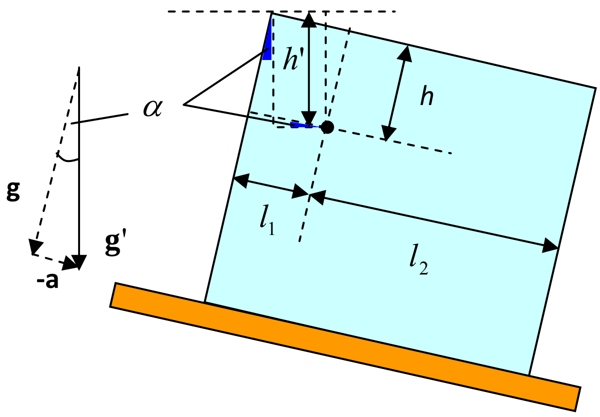
Jei nebūtų Žemės traukos, o vežimėlis judėtų pagreičiu $a \neq 0$ horizontalia kryptimi, tuomet taške A būtų slėgis

$$p_a = \rho a l_1 .$$

Jei $a \neq 0$ ir $g \neq 0$, pagal Paskalio dėsnį slėgis į visas puses perduodamas vienodai, todėl

$$p = p_g + p_a = \rho(gh + al_1) .$$

Galima samprotauti ir kitaip. Įveskime inercijos jėgą, atitinkančią pagreitį –**a**, ir persikelkime į neinercinę sistemą, nejudamai surištą su vežimėliu. Toje sistemoje pagal Dalambero principą galime nagrinėti kūnų dinamiką kaip įprastinėje inercinėje sistemoje, tik pagreitis joje turi būti $\mathbf{g}' = \mathbf{g} - \mathbf{a}$, t.y. $g' = \dfrac{g}{\cos\alpha}$ arba $a = gtg\alpha$ (žiūr. brėž.).



Iš brėžinio galime sudaryti lygtis, kurias išsprendę surandame h', o tokiu būdu ir slėgį p, pritaikydami būtent Dalambero prncipą.

$$l_1 = htg\alpha + \left(h' - \frac{h}{\cos\alpha}\right)\frac{1}{\sin\alpha} .$$

Iš čia surandame $h' = l_1 \sin\alpha + h\cos\alpha$. Tuomet

$$p = \rho g' h' = \rho \frac{g}{\cos\alpha}(l_1 \sin\alpha + h\cos\alpha) = \rho(g l_1 tg\alpha + hg) = \rho(hg + a l_1).$$

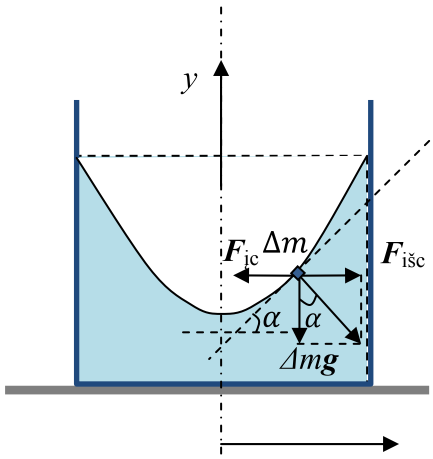
22. Vertikalus cilindras dalinai užpildomas skysčiu. Cilindras sukamas pastoviu kampiniu greičiu apie vertikalią jo simetrijos ašį. 1) Kokią formą įgyja skysčio paviršius? 2) Kaip pasiskirsto slėgis cilindro dugne? 3) Kiek skiriasi slėgis indo dugne ties jo šonine sienele, jei kampinis greitis $\omega = 5$ aps./s, skystis – vanduo, kurio aukštis indo centre H = 20 cm, o indo spindulys R = 15 cm.

Ats.: 1) Skysčio paviršiaus forma – sukimosi paraboloidas. Vertikali koordinatė y nuo atsumo iki ašies x priklauso kaip $y = \frac{\omega^2 x^2}{2g}$. 2) $\Delta p = \rho g H + \frac{\omega^2 x^2}{2g}$. 3) $\Delta p(R) = 1{,}31 \cdot 10^4$ Pa.

Sprendimas

1) Išskiriame nedidelį skysčio elementą Δm ir panagrinėjame jį veikiančias jėgas besisukančioje (neinercinėje) kampiniu greičiu ω sistemoje (žiūr. brėž.). Tegul jo atsumas iki ašies x, o vertikali koordinatė y. Paviršius nuostoviu atveju turi būti toks, kad atstojamoji jėga veiktų į paviršių statmena kryptimi. Neinercinėje sistemoje turime įvesti inercijos jėgą, kuri šiuo atveju lygi

$\boldsymbol{F}_{in} = \boldsymbol{F}_{išc} = -\boldsymbol{F}_{įc}$. Taigi, $F_{išc} = \Delta m \omega^2 x$. Iš brėžinio matyti, kad $\tan\alpha = \frac{F_{išc}}{\Delta m g} = \frac{\omega^2 x}{g}$.



Antra vertus, $\tan\alpha = y'(x)$. Taigi, $y'(x) = \frac{\omega^2 x}{g}$. Suintegravę gauname, kad $y = \frac{\omega^2 x^2}{2g} + C$.

Čia C – integravimo konstanta. Tuo būdu, skysčio sukimosi paviršius – sukimosi paraboloidas.

2) Slėgį į indo dugną galime apskaičiuoti, žinodami, kaip priklauso skysčio lygio aukštis nuo koordinatės *x*, t.y.

$$p(x) = p_0 + \rho g H + \frac{\rho \omega^2 x^2}{2}.$$

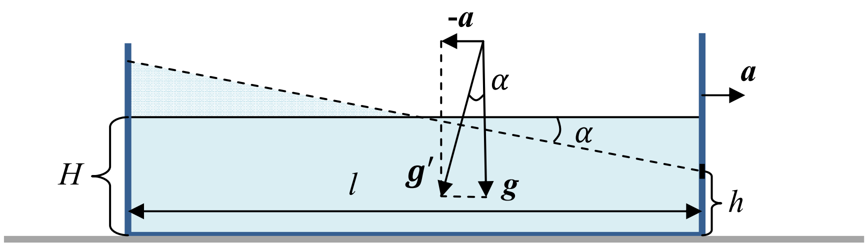
3) Ties sienele indo dugne slėgių skirtumas lygus

$$\Delta p = p(R) - p_0 = \rho g H + \frac{\rho \omega^2 R^2}{2} = 1{,}31 \cdot 10^4 \text{ Pa. Čia } \rho = 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

23. Šoninėje pločio *l* indo sienoje aukštyje *h* nuo dugno yra nedidelė kiaurymė. Kokiam horizontaliam pagreičiui esant, įpiltas skystis netekės iš kiaurymės, jei į nejudantį indą su užkimšta kiauryme buvo įpilta skysčio iki aukščio *H*?

Ats.: $a > \dfrac{2g(H-h)}{l}$.

Sprendimas



Judantis su pagreičiu indas- neinercinė sistema, kurioje pagal Dalambero principą galime įvesti inercijos pagreitį $-\boldsymbol{a}$, ir nagrinėti mechanikos uždavinius, taikydami inercinės sistemos lygtis, tardami, kad šioje sistemoje veikia jėgų laukas, nusakomas pagreičiu $\boldsymbol{g}' = \boldsymbol{g} - \boldsymbol{a}$. Iš brėžinio matyti, kad judančiame su pagreičiu inde vandens lygis pakrypsta taip, kad būtų statmenas pagreičiui $\boldsymbol{g}'$. Tuomet žemesniajam vandens kraštui pasiekus kiaurymę, vanduo iš jos nebetekės. Sudarę geometrinius sąryšius tam atvejui, kai vanduo pasiekia kiaurymę, surandame minimalaus pagreičio vertę.

Pagreičiams $\tan \alpha = \dfrac{a_{min}}{g}$. Antra vertus, skysčio geometriniams parametrams

$\tan \alpha = \dfrac{H-h}{\frac{l}{2}}$. Išsprendę šias lygtis surandame pagreitį: $a_{min} = \dfrac{2g(H-h)}{l}$.

Akivaizdu, kad vanduo netekės, jei $a > \dfrac{2g(H-h)}{l}$

24. Uždarame cilindro formos inde, pripildytame vandens, yra 3 kūnai: kamštis, plieno veržlė ir kūnas K, kurio tankis 1,0 g/cm^3. Cilindras įsukamas apie jo simetrijos ašį. Kaip cilindre išsidėstys šie daiktai, jei ašis vertikali?

Ats.: Kamštis – cilindro centre viršuje, veržlė – apačioje pakraštyje, kūnas K – lieka ten, kur buvęs.

Sprendimas

Galima nagrinėti veikiančias daiktus jėgas 2 nepriklausomom kryptim – vertikalia ir horizontalia. Vertikalia kryptimi veikia žemės trauka, kurią charakterizuoja laisvojo kritimo pagreitis $\boldsymbol{g}$. Taigi, skysytje plienos veržlė paskęs ir atsidurs dugne, nes jos sunkis didesnis už Archimedo jėgą. Kamštis plūduriuos viršuje, nes Archimedo keliamoji jėga didesnė už kamščio sunkį. Kūnas K vertikalios koordinatės požiūriu lieka vietoje, nes Archimedo jėga lygi kūno sunkiui, todėl atstojamoji jėga lygi 0.

Horizontalia kryptimi analizė gali būti atlikta, persikėlus į besisukančią (neinercinę) sistemą ir įvedus išcentrinę inercijos jėgą, kuri proporcinga atstumui nuo sukimosi ašies. Tuomet radialine kryptimi veikia jėgos laukas, kuris charakterizuojamas išcentriniu pagreičiu, o visi reiškiniai pagal Dalambero principą gali būti nagrinėjami kaip įprastoje inercinėje sistemoje. Taigi, veržlė šio jėgos lauko bus nustumta į cilindro pakraštį, nes radialine kryptimi sukimosi ašies link veikianti Archimedo jėga mažesnė už išcentrinę veržlės jėgą. Kamščio atveju atvirkščiai – Archimedo jėga didesnė už inercijos jėgą, ir kamštis juda link sukimosi ašies. Centre kamštis užima stabilią padėtį. Kūno K atveju abi jėgos (kaip ir vertikaliu atveju) vienodos ir kompemsuoja viena kitą, todėl kūnas K nejudės ir horizontalioje plokštumoje.

25. Uždaras cilindro formos indas, kurio pagrindo spindulys R, pilnas pripildytas tankio ρ_s skysčio, sukasi kampiniu greičiu ω apie vertikalią savo simetrijos ašį. Inde yra nugrimzdęs tankio ρ ($\rho > \rho_s$) spindulio r rutuliukas. Rasti jėgą, kuria rutuliukas veikia: 1) dugną; 2) šoninę sienelę.

Ats.: 1) $P_d = \frac{4}{3}\pi r^3 g(\rho - \rho_s)$; 2) $P_š = \frac{4}{3}\pi\omega^2(R - r)r^3(\rho - \rho_s)$.

Sprendimas

1) Indo sukimasis nekeičia jėgos, veikiančios vertikalia kryptimi, nes sukimasis vyksta horizontalioje plokštumoje. Taigi, į dugną veikia rutuliuko sunkis minus Archimedo jėga:

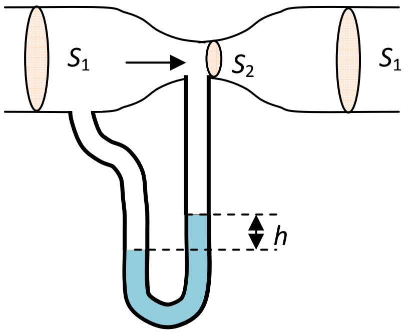
$$P_d = \frac{4}{3}\pi r^3 g(\rho - \rho_s).$$

2) Nagrinėjant rutuliuko kartu su indu sukimąsi, patogu persikelti į neinercinę sistemą, nejudamai surištą su šiais besisukančiais daiktais. Tuomet rutuliuką, esantį dugne ties indo sienele, galime traktuoti kaip esantį inercinėje sistemoje, bet veikiamą inercijos jėga, kuri šiuo atveju lygi $-\boldsymbol{F}_{ic}$. Tačiau rutuliukas yra skystyje, todėl radialine kryptimi atsiranda ir Archimedo jėga, kuri priešinga inercijos jėgos krypčiai. Atstojamoji jėga ir bus ta jėga, kuria rutuliukas spaus šoninę indo sienelę. Taigi,

$$F_{š} = \omega^2(R-r)\frac{4}{3}\pi r^3\rho - \omega^2(R-r)\frac{4}{3}\pi r^3\rho_s = \frac{4}{3}\pi\omega^2(R-r)r^3(\rho-\rho_s).$$

Čia nagrinėjome rutuliuko masės centro judėjimą, nes inercijos jėga proporcinga pirmam atstumo iki sukimosi ašies laipsniui, todėl atstojamasis poveikis gali būti suvestas į poveikį taškinei masei, esančiai rutuliuko masės centre.

26.



Dujų ar skysčių sąnaudas per laiko vienetą galima išmatuoti Venturio vamzdeliu (žiūr. brėž.). Šis vamzdelis turi susiaurėjimą. Platesniosios jo dalies skerspjūvis S_1, o siauresniosios – S_2. Tarp šių vamzdelio dalių įtaisytas manometras su žinomo tankio ρ skysčiu. Koks dujų ūris prateka vamzdeliu per laiko vientą, jei dujų tankis ρ_1, o manometre stulpelių aukščiai skiriasi h?

Ats.: $\Delta V = S_1 S_2 \sqrt{\frac{2gh\rho}{(S_1^2 - S_2^2)\rho_1}}$

Sprendimas

Jei žinotume dujų tėkmės greitį, pvz., taške 1 greitį v_1, tai per laiko vienetą pratekėtų dujų tūris

$\Delta V = v_1 S_1$. Taigi, turime surasti šį greitį.

Pritaikome tekančioms dujoms Bernulio lygtį:

$\frac{\rho_1 v^2}{2} + \rho g H + p = Const.$ Mūsų atveju antrasis narys atkrenta, nes tiek platesnė, tiek siauresnė

vamzdelio sritis yra viename aukštyje . Tuo būdu, 1-ajam ir 2-ajam taškui

$\frac{\rho_1 v_1^2}{2} + p_1 = \frac{\rho_1 v_2^2}{2} + p_2$, be to, pasinaudojame nenutrūkstamumo lygtimi $v_1 S_1 = v_2 S_2$.

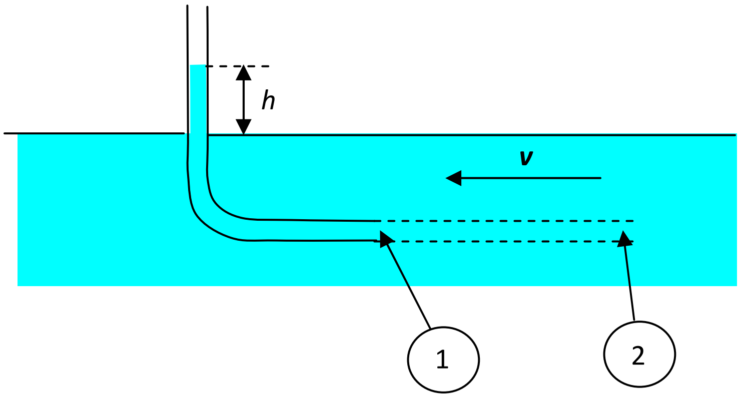
Taigi, $\frac{\rho_1}{2}(v_2^2 - v_1^2) = p_1 - p_2$. Čia $p_1 - p_2 = \rho g h$. Išsprendę lygtis, gauname

$v_1 = S_2 \sqrt{\frac{2gh\rho}{(S_1^2 - S_2^2)\rho_1}}$. Galiausiai $\Delta V = S_1 S_2 \sqrt{\frac{2gh\rho}{(S_1^2 - S_2^2)\rho_1}}$.

27. Nuo permesto per upelį liepto nuleistas išlenktas vamzdelis, atviru galu nukreiptas prieš vandens srovę. Vanduo vamzdeliu pakyla į $h = 200\mathbf{mm}$ aukštį virš upelio vandens lygio. Rasti vandens tėkmės greitį.

Ats.: $v = \sqrt{2gh} = 1{,}98\mathbf{m/s}$.

Sprendimas



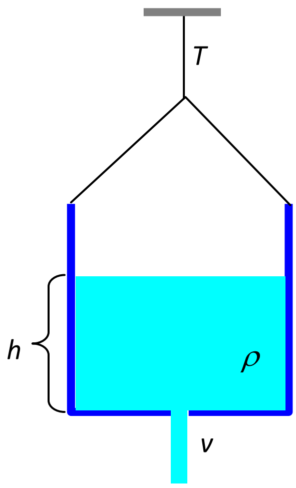
Išskiriame vandens sraute srovės vamzdelį (punktyras brėžinyje) ir užrašome bendrą Bernulio lygtį diems šio vamzdelio taškams:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2 \; .$$

Šiuo konkrečiu atveju $v_1 = 0$, $h_1 = h_2$, $p_1 - p_2 = \rho g h$, $v_2 = v$. Tada

$$\frac{v^2}{2} = gh \text{. Iš čia } v = \sqrt{2gh} = 1{,}98\mathbf{m/s} .$$

28. Indas su vandeniu, kurio aukštis inde h, pakabintas prie lubų. Indo dugne išgręžta maža skerspjūvio S skylutė. Kaip pakinta siūlo, kuris laiko indą, įtempimo jėga, jei skylutė atkemšama ir vanduo pradeda bėgti?



Ats.: $\Delta T = 2\rho S g h$.

Sprendimas

Iš indo su vandeniu gyleje h mažos skylutės vanduo teka greičiu $v = \sqrt{2gh}$. Per nedidelį laiko tarpą Δt ištekanti vandens masė Δm nusineša judesio kiekį Δmv, kuris atitinka jėgos impulsą $F\Delta t$. Ši jėga ir yra siūlo įtempimo jėgos pokytis ΔT (įtempimo jėga sumažėja), t.y.

$\Delta mv = \Delta T\Delta t$. Bet $\Delta m = \rho S\Delta x$, čia Δx - kelias, kurį įveikia vandens čiurkšlė per laiko tarpą Δt . Tuo būdu,

$\frac{S\Delta x\rho}{\Delta t}v = \Delta T$. Pastebėsime, kad $\frac{\Delta x}{\Delta t} = v$. Taigi,

$$\Delta T = \rho S v^2 = 2\rho Sgh .$$

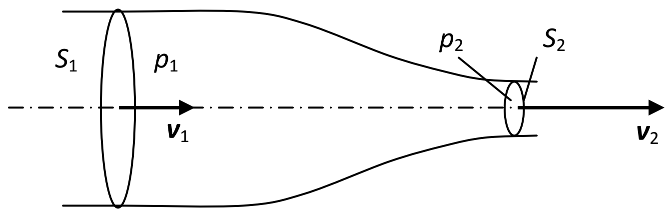
29. Vandens patrankos vamzdžio skerspjūvis keičiasi nuo $S_1 = 100{,}0$ cm^2 iki $S_2 = 5{,}0$ cm^2. Rasti jėgos, kuria reikia laikyti vandens patranką, kryptį ir modulį, jei čiurkšlės greitis ties išmetimo anga $v_1 = 30{,}0$ m/s, o slėgis mažas.

Ats.: Vandens patranką reikia laikyti priešinga čiurkšlei kryptimi, jėgos dydis

$$F = \frac{\rho v_1^2 (S_1 - S_2)^2}{2S_2} = 81{,}2 \text{ kN}.$$

Sprendimas

Išnagrinėjame jėgas, veikiančias vamzdį ir išmetamo vandnes masę vandens patrankoje.



Tegul per nedidelį laiko tarpą Δt per vamzdžio galą išteka Δm vandens masė, turinti greitį v_2. Ši masė yra veikiama atstojamosios jėgos, atsirandančios dėl slėgių skirtumo $(p_1 - p_2)S_1 \approx p_1 S_1$ bei jėgos F, kuria vamzdis veikia vandenį (tokia pat jėga ir vanduo veikia vamzdį čiurkšlės kryptimi, o šią jėgą ir turime rasti). Masė Δm įgyja judesio kiekį, kurį per Δt kaip jėgos impulsą ir suteikia ši atstojamoji jėga:

$(p_1 S_1 - F)\Delta t = \Delta m(v_2 - v_1)$, čia $\Delta m = S_2 v_2 \Delta t \rho$. Be to dar pritaikę nenutrūkstamumo lygtį

$v_1 S_1 = v_2 S_2$ gauname

$$F = p_1 S_1 - S_2 v_2^2 \rho \left(1 - \frac{S_2}{S_1}\right).$$

Slėgį randame iš Bernulio lygties, kurią spręsdami kartu su nenutrūkstamumo lygtimi, gauname:

$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}$ (toliau p_2 atmesime). Iš čia randame slėgį p_1:

$p_1 = \frac{\rho}{2}(v_2^2 - v_1^2) = \frac{\rho}{2} v_2^2 \left(1 - \frac{S_2^2}{S_1^2}\right)$. Tuo būdu,

$$F = \frac{\rho}{2} v_2^2 \left[S_1\left(1 - \frac{S_2^2}{S_1^2}\right) - 2S_2\left(1 - \frac{S_2}{S_1}\right)\right] = \frac{\rho}{2} v_2^2 \frac{(S_1 - S_2)^2}{S_1} = 81{,}2 \text{ kN}.$$

30. Rutuliukas kyla į viršų skystyje pastoviu geičiu. Rutuliuko medžiagos tankis n kartų mažesnis už skysčio tankį. Kokia yra pasipriešinimo judėjimui skystyje jėga, jei rutuliuko svoris ore P?

Ats.: $F_{tr} = (n-1)P$.

Sprendimas

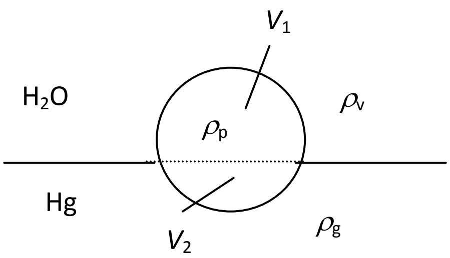
Judėjimo greitis pastovus, todėl visų veikiančių rutuliuką jėgų suma lygi 0. Į viršų rutuliuką veikia Archimedo jėga, o priešinga kryptimi – rutuliuko svoris P ir pasipriešinimo jėga F_{tr}. Pastaroji jėga priklauso nuo greičio (mažiems greičiams ji tiesiog proporcinga greičiui), todėl nusistovi toks greitis, kad jėgų suma būtų lygi 0. Archimedo jėga yra n kartų didesnė už rutuliuko svorį, nes ji lygi išstumo skysčio svoriui, o šis proporcingas skysčio tankiui. Taigi,

$$P + F_{tr} = nP, \text{ iš čia } F_{tr} = (n-1)P.$$

31. Plieninis rutuliukas plūduriuoja gyvsidabryje. Ant jo paviršiaus užpilamas vandens sluoksnis, kuris visiškai padengia rutuliuką. Kuri rutuliuko dalis yra vandenyje? $\rho_g = 13{,}6$ g/cm^3, $\rho_p = 7{,}8$ g/cm^3, $\rho_v = 1{,}0$ g/cm^3.

Ats.: $x = \frac{\rho_g - \rho_p}{\rho_g - \rho_v} = 0{,}46$.

Sprendimas



Turime surasti $x = \frac{V_1}{V} = \frac{V_1}{V_1 + V_2}$, čia V_1 ir V_2 – rutuliuko tūrio dalys atitinkamai vandenyje ir gyvsidabryje.

Plieninį rutuliuką hipotetiškai galime pakeisti kitu, kuris bus tokioje pat pusiausvyroje kaip ir plieninis rutuliukas, jei jo dalį V_1, esančią vandenyje, pakeisime vandeniu, o dalį V_2, esančią gyvsidabryje, pakeisime gyvsidabriu. Tada galime užrašyti rutuliuko pusiausvyros sąlygas abiem atvejais:

$\rho_v V_1 + \rho_g V_2 = \dfrac{F_A}{g}$ ir $\rho_p V = \dfrac{F_A}{g}$. Čia F_A – veikianti rutuliką Archimedo jėga. Iš šių lygčių surandame $x = \dfrac{V_1}{V} = \dfrac{\rho_g - \rho_p}{\rho_g - \rho_v} = 0{,}46$.

32. Vandenilio pripildytas balionas per laiką t = 30 s gali pakelti m_1 = 70 kg masės žmogų į H = 100 m aukštį. Koks baliono tūris? Baliono apvalkalo ir pintinės masė m_2 = 20 kg, oro ir vandenilio tankiai atitinkamai lygūs ρ_1 = 1,3 kg/m^3 ir ρ_2 = 0,1 kg/m^3. Oro pasipriešinimo nepaisyti.

Ats.: $V = \dfrac{(m_1 + m_2)(a+g)}{(\rho_1 - \rho_2)g - \rho_2 \dfrac{2h}{t^2}} = 77$ m^3.

Sprendimas

2-asis Niutono dėsnis kylančiam pagreičiu a balionui

$$V\rho_1 g - (m_1 + m_2 + V\rho_2)g = (m_1 + m_2 + V\rho_2)a .$$

Antra vertus, pagreitį galime rasti iš baliono kilimo laiko ir aukščio, t.y.

$h = \dfrac{at^2}{2}$. Iš čia $a = \dfrac{2h}{t^2}$.

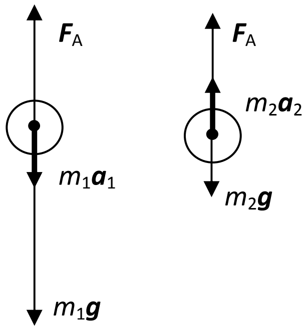
Įrašę šią vertę į 2-ojo Niutono dėsnio lygtį, iš jos randame baliono tūrį:

$$V = \frac{(m_1 + m_2)(a+g)}{(\rho_1 - \rho_2)g - \rho_2 \dfrac{2h}{t^2}} = 77 \text{ m}^3.$$

33. Aerostatas, kurio masė m, leidžiasi pastoviu pagreičiu a. Kokią balasto masę reikia išmesti, kad aerostatas pradėtų kilti tokio pat dydžio pagreičiu?

Ats.: $\Delta m = \dfrac{2ma}{g+a}$.

Sprendimas



Užrašome judėjimo lygtis abiem atvejais:

$$\begin{cases} m_1 g - F_A = m_1 a_1 \\ F_A - m_2 g = m_2 a_2 \end{cases}.$$

Čia $a_1 = a_2 = a$, $m_2 = m$, F_A – Archimedo jėga. Be to $m_1 - m_2 = \Delta m$. Iš šių lygčių surandame

$$\Delta m = \frac{2ma}{g+a}.$$

34. Į indą supilti dviejų rūšių nesimaišantys skysčiai, kurių tankiai ρ_1 ir ρ_2 ($\rho_1 < \rho_2$), o atitinkami aukščiai h_1 ir h_2. Nuo viršutiniojo skysčio paviršiaus paleidžiamas nedidelis rutuliukas, kuris galiausiai pasiekia indo dugną nuliniu greičiu. Koks rutuliuko medžiagos tankis?

Ats.: $\rho = \dfrac{\rho_2 h_2 + \rho_1 h_1}{h_1 + h_2}$.

Sprendimas

Rutuliuko medžiagos tankis ρ turi būti iš intervalo $\rho_1 < \rho < \rho_2$, t.y. pirmajame skystyje rutulikas grimzta greitėdamas, o antrajame – lėtėdamas. Jei pirmajame skystyje pagreitis a_1, tai pirmojo skysčio apačią rutuliukas pasiekia, turėdamas greitį $v = \sqrt{2a_1 h_1}$. Indo dugne rutuliukas sustos, jei $v = \sqrt{2a_2 h_2}$. Taigi, pagreičiai turi tenkinti reikalavimą

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{h_2}{h_1}.$$

Pagreičiai priklauso nuo aplinkų tankių. Pirmajame skystyje rutuliuko judėjimo lygtis

$V(\rho - \rho_1) = V\rho a_1$, iš čia $a_1 = \left(1 - \dfrac{\rho_1}{\rho}\right) g$.

Analogiškai surandame pagreitį a_2:

$$a_2 = \left(\frac{\rho_2}{\rho} - 1\right) g.$$

Taigi, pasinaudoję anksčiau gauta pagreičių santykio išraiška galiausiai gauname

$$\rho = \frac{\rho_2 h_2 + \rho_1 h_1}{h_1 + h_2}.$$

35. Rasti vandens gylį, kuriame oriniu $d = 8{,}00$ mm kalibro pistoletu negalima atlikti šūvio. Pistoleto vamzdžio ilgis $l = 25$ cm, kulkos masė $m = 6{,}0$ g, o jos greitis išlekiant iš vamzdžio ore lygus $v = 32$ m/s.

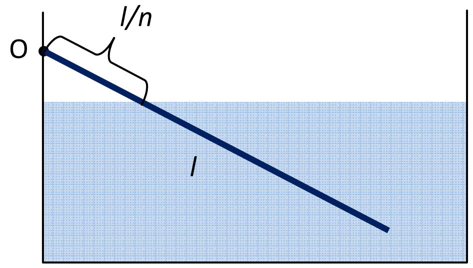
Ats.: $h = \dfrac{2mv^2}{\pi\rho d^2 l} = 25$ m.

Sprendimas

Kulkos kinetinė energija sunaudojama vandeniui iš pistoleto vamzdžio išstumti:

$\dfrac{mv^2}{2} = \rho g h \dfrac{\rho d^2}{4} l$. Iš čia $h = \dfrac{2mv^2}{\pi\rho d^2 l} = 25$ m.

36. Prie indo su vandeniu sienelės per šarnyrą O pritvirtintas plonas vienalytis strypelis, kuris yra pusiausvyroje, kai virš vandens išnyra n-oji jo dalis (žr. brėž.). Strypelis kybo tik ant šarnyro, nesiekdamas indo dugno ir kitų sienelių. Koks strypelio tankis?



Ats.: $\rho = \dfrac{n^2 - 1}{n^2}\rho_v$.

Sprendimas

Strypelis pusiausvyroje, jei jo sunkio jėgos momentas atsveriamas Archimedo jėgos, kurią sukelia tik panirusi strypelio dalis, momentas. Jei pažymėsime kampą, kurį sudaro streypelis su horizontu, α, tai minėtų jėgos momentų lygybė atrodo taip:

$$\frac{l}{2}\cos\alpha \rho S l = l\frac{n-1}{n}\rho_v S\left(\frac{l}{n}\cos\alpha + \frac{l(n-1)}{n}\frac{1}{2}\cos\alpha\right),$$

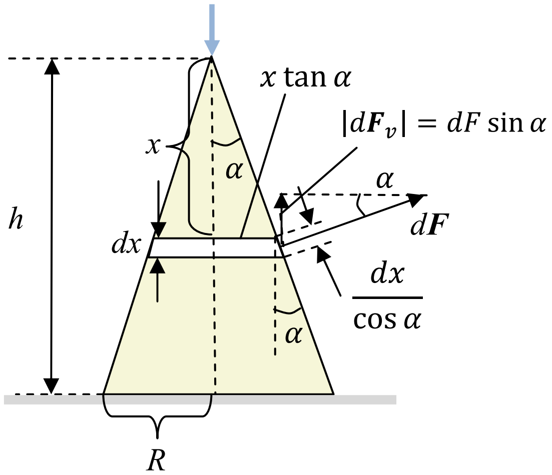
$$\frac{\rho}{2} = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{2+n-1}{2n}\rho_v \text{, taigi, } \rho = \frac{n^2-1}{n^2}\rho_v .$$

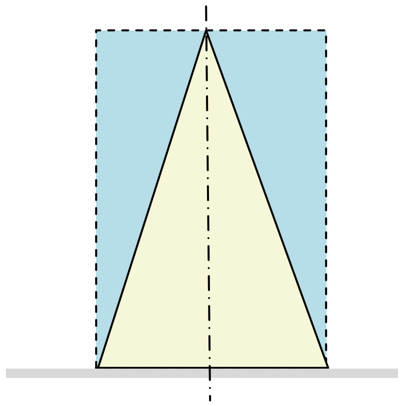
37. Kūgio formos gaubtas, sandariai priglundantis prie horizontalios plokštumos, viršūnėje turi mažą kiaurymę, per kurią pilamas vanduo. Kokia šio gaubto masė, jei jis pakyla nuo plokštumos tuo metu, kai vanduo visiškai užpildo erdvę po gaubtu? Kūgio pagrindo spindulys R, o jo aukštis h. Kokia būtų gaubto masė, jei jis turėtų spindulio R pussferės formą su maža kiauryme viršūnėje ir pakiltų nuo plokštumos tuo metu, kai vanduo visiškai užpildytų pussferę?

Ats.: Kūgio atveju $M = \dfrac{2}{3}\pi\rho R^2 h$; pussferės atveju $M = \dfrac{1}{3}\pi\rho R^3$.

Sprendimas

Kūgio formos gaubtas





Slėgio jėga skirtingame gylyje x veikia šoninio kūgio paviršiaus segmentą statmena jam kryptimi, todėl į viršų reikia imti jos projekciją, proporcingą $\sin \alpha$ (2α - kūgio viršūnės kampas). Visa jėga, kelianti gaubtą į viršų, apskaičiuojama kaip integralas, kintant x nuo 0 iki h:

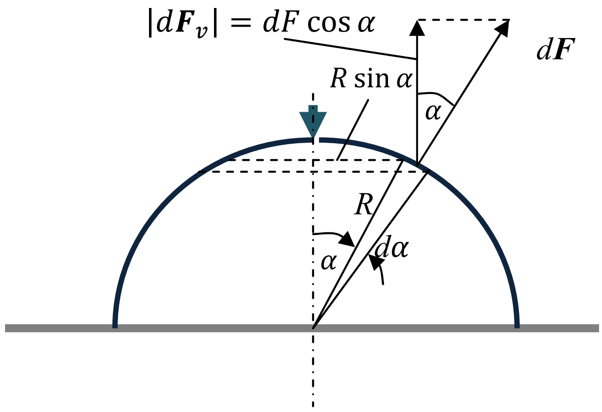
$$Mg = \int_0^h \rho g x 2\pi \, x \tan \alpha \frac{dx}{\cos \alpha} \sin \alpha = 2\pi \rho g \tan^2 \alpha \int_0^h x^2 dx \text{ . Bet } \tan \alpha = \frac{R}{h}, o \int_0^h x^2 dx = \frac{h^3}{3},$$

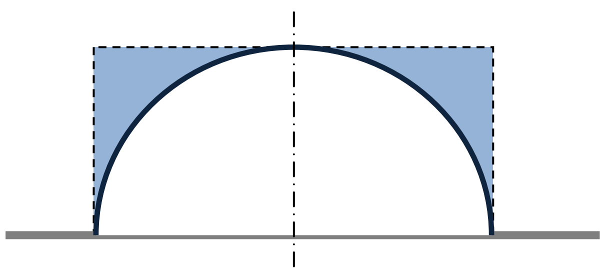
taigi, $M = \frac{2}{3}\pi \rho R^2 h$.

Galima samprotauti ir kitaip. Įsivaizduokime, kad užpildome erdvę iki viso cilindro su tuo pačiu kūgio pagrindu (brėžinyje dešinėje hipotetinis cilindras parodytas punktyru). Jei šį įsivaizduojamą cilindrą užpildytume vandeniu ir pašalintume kūgį, vanduo po kūgiu savo formos nepakeistų. Vadinasi, kūgio vaidmenį (jo svorį) atstoja papildomas vandens sluoksnis, papildantis kūgį iki cilindro (tamsesnė sritis brėžinyje dešinėje). Šio vandens masė lygi:

$$M = \rho V = \rho \left(\pi R^2 h - \frac{1}{3}\pi R^2 h \right) = \frac{2}{3}\pi \rho R^2 h.$$

Pussferės atvejis





Šiuo atveju patogu pasirinkti integravimo kintamąjį kampą α, leisdami jam kisti nuo 0 iki $\pi/2$. Tuo būdu, paussferę kelia jėga

$$Mg = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi R \sin \alpha R d\alpha \rho g R(1-\cos\alpha)\cos\alpha = 2\pi g\rho R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\alpha(1-\cos\alpha)\cos\alpha d\alpha\ .$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\alpha(1-\cos\alpha)\cos\alpha d\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\alpha\cos\alpha d\alpha - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\alpha\cos^2\alpha d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\alpha\, d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\alpha d(\cos\alpha) = -\frac{1}{4}\cos 2\alpha \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\cos^3\alpha}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\ .$$

Tuomet $M = \frac{1}{3}\pi\rho R^3$.

Ir šiuo atveju galima samprotauti kitaip. Įsivaizduokime, kad užpildome erdvę iki viso cilindro su tuo pačiu pussferės pagrindu (brėžinyje dešineje hipotetinis cilindras parodytas punktyru). Jei šį įsivaizduojamą cilindrą užpildytume vandeniu ir pašalintume pussferę, vanduo po pussfere savo formos nepakeistų. Vadinasi, kūgio vaidmenį (jo svorį) atstoja papildomas vandens sluoksnis, papildantis pussferę iki cilindro (tamsesnė sritis brėžinyje dešinėje). Šio vandens masė lygi:

$$M = \rho V = \rho\left(\pi R^2 \cdot R - \frac{2}{3}\pi R^3\right) = \frac{1}{3}\pi\rho R^3.$$

38. Ant lygaus stalo stovi platus skerspjūvio *S* indas su vandeniu. Vandens aukštis inde *h*, o indo svoris *P*. Šoninėje indo sienelėje netoli dugno yra nedidelė apskritimo formos spindulio *r* kiaurymė, užkišta kamščiu. Atkimšus kiaurymę, indas pradeda šliuožti stalu. Ką gaima pasakyti apie trinities tarp indo ir stalo koeficientą?

Ats.: $\mu < \dfrac{2gh\rho\pi r^2}{P + \rho g h S}$.

Sprendimas

Per gylyje *h* esančią kiaurymę vanduo veržiasi greičiu $v = \sqrt{2gh}$. Per mžą laiko tarpą Δt

išbėga $\Delta m = \rho v \Delta t \pi r^2$ vandens. Ši vandens masė yra vekiama jėga $F = \rho g h \pi r^2$. Taigi, šiam vandens kiekiui galime užrašyti judesio kiekio tvermės dėsnį:

$$F\Delta t = \Delta m v, \text{ iš čia } F = \frac{\Delta m v}{\Delta t} = \frac{\rho v \Delta t \pi r^2 v}{\Delta t} = \pi r^2 \rho v^2 = 2\pi\rho g h r^2.$$

Pagal III Niutono dėsnį tokia pat jėga tik priešinga kryptimi yra veikiamas ir indas. Jis pajuda, kuomet ši jėga viršija trinties jėgą, t.y.

$F > \mu(P + \rho Shg)$. Iš čia gauname $\mu < \dfrac{2\pi\rho ghr^2}{P + \rho Shg}$.

39. Kokios formos turi būti cilindrinės simetrijos indas, kad ištekant skysčiui per mažą skritulio formos spindulio R kiaurymę indo dugne skysčio lygis kistų pastoviu greičiu? Skystis idealus.

Ats.: Indo aukštis $h(x) \propto \left(\dfrac{x^4}{R^4} - 1\right)$, čia x – atstumas nuo indo simetrijos ašies. Jei

$x >> R, h(x) \propto x^4$ - tai ketvirto laipsnio parabolė.

Sprendimas

Pasinaudojame teorijos (1-16) formule, kuri duoda skysčio lygio h kitimo greitį:

$v_2 = \sqrt{\dfrac{2gh}{\left(\dfrac{S_2}{S_1}\right)^2 - 1}}$. Čia h – vandens lygio padėtis dugno atžvilgiu, S_1 ir S_2 – atitinkamai kiaurymės ir indo ties vandens lygiu h skerspjūvių plotai.

Jei $S_2 >> S_1, v_2 \approx \dfrac{S_1}{S_2}\sqrt{2gh}$. Mūsų atveju $v_2 \approx \dfrac{R^2}{x^2}\sqrt{2gh(x)}$. Akivaizdu, kad v_2 bus pastovus, jei v_2 nuo x nepriklausys, t.y. būtina, kad $h(x) \propto x^4$.

Bendru atveju galima analizuoti

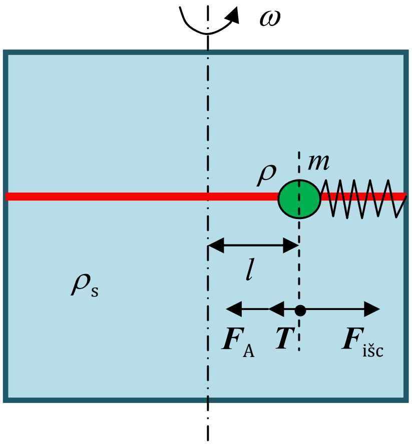
$v_2 = \sqrt{\dfrac{2gh(x)}{\left(\dfrac{x^2}{R^2}\right)^2 - 1}}$. Ši funkcija nepriklauso nuo x, jei $h(x) \propto \left[\left(\dfrac{x^2}{R^2}\right)^2 - 1\right]$. Taigi

$h(x) = C\left(\dfrac{x^4}{R^4} - 1\right)$, čia C – konstanta. Jei $x >> R, h(x) \propto x^4$ - tai ketvirto laipsnio parabolė.

40. Uždaras cilindrinės simetrijos indas, užpildytas skysčiu, kurio tankis ρ_s, sukasi kampiniu greičiu ω apie vertikalią indo simetrijos ašį, kartu įsukdamas ir jame esantį skystį. Inde įtaisytas horizontalus lygus strypas, kuris įleistas į skystį ir kaip skersmuo jungia priešingas indo sieneles. Ant strypo užmauti nedidelis masės m ir tankio ρ kūnas ir spyruoklė, kurie lengvai slankioja srypu. Sistemai sukantis, kūnas užima padėtį atstumu l nuo sukimosi ašies. Panagrinėti atvejus, kai $\rho_s, = \rho$, $\rho_s > \rho$ ir $\rho_s < \rho$. Kokia jėga kūnas veikia spyruoklę?

Ats. Kai $\rho_s, = \rho$, kūnas lieka vietoje atstumu l nuo sukimosi ašies; kai $\rho_s, > \rho$, kūnas lokalizuojasi centre. Abiem šiais atvejais kūnas spyruoklės neveikia. Kai $\rho_s < \rho$, kūnas spaudžia spyruoklę jėga $T = m\omega^2 l\left(1-\frac{\rho_s}{\rho}\right)$.

Sprendimas



Persikėlę į besisukančią kampiniu greičiu ω neinercinę sistemą, kūno pusiausvyrą joje galime nagrinėti, įvedę išcentrinę inercijos jėgą. Ji kūno vietoje lygi $F_{\text{išc}} = m\omega^2 l$. Tokiame jėgų lauke bendru atveju atsiranda ir priešingos krypties Archimedo jėga, lygi $F_A = \rho_s V\omega^2 l$, čia V kūno tūris (išstumto vandens tūris). Ši Archimedo jėga nukreipta į centrą (į sukimosi ašį).

Kai $\rho_s, = \rho$, Archimedo jėga lygi priešingai jėgos lauko jėgai (šiuo atveju inercijos jėgai), todėl kūną veikianti atstojamoji jėga lygi 0, ir kūnas lieka nejudamas. Akivaizdu, kad spyruokllės kūnas neveikia jokia jėga.

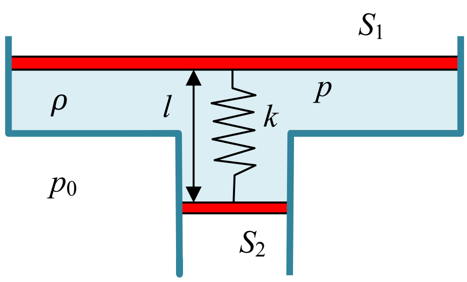
Kai $\rho_s, > \rho$, kūną veikianti Archimedo jėga didesnė už inercijos jėgą ir nukreipta į centrą, todėl kūnas atsiduria ir stengiasi būti centre, atitrūkdamas nuo spyruoklės. Jis spyruoklės šiuo atveju taip pat neveikia.

Kai $\rho_s < \rho$, sistemos pusiausvyra nusistovi, kai kūną veikianti atstojamoji jėga lygi 0:

$$T + F_A = F_{\text{išc}}.$$

Taigi $T = m\omega^2 l - \rho_s V\omega^2 l = m\omega^2 l\left(1-\frac{\rho_s}{\rho}\right)$.

41. Sistemą sudaro du sujungti skirtingų skerspjūvių S_1 ir S_2 ($S_1 > S_2$) vertikalūs cilindrai, kurie užpildyti nespūdžiu tankio ρ skysčiu ir uždengti sandariais besvoriais stūmokliais, sukabintais lengva standumo k spyruokle (žiūr. brėž.). Sistemą palikus pačiai sau, nusistovi pusiausvyra. Koks atstumas tarp stūmoklių, jei neištemptos spyruoklės ilgis l_0? Koks slėgis skystyje ties viršutiniu stūmokliu, jei atmosferos slėgis p_0? Kokiam spyruoklės standumui galima pusiausvyra?



Ats.: $l = \dfrac{kl_0(S_1 - S_2)}{k(S_1 - S_2) - \rho g S_1 S_2}$; $p = p_0 + \dfrac{\rho g S_2 k l_0}{k(S_1 - S_2) - \rho g S_1 S_2}$; $k > \dfrac{\rho g S_1 S_2}{S_1 - S_2}$;

Sprendimas

Pusiausvyros atveju kiekvieną iš stūmoklių veikiančių jėgų atstojamoji lygi 0. Jei spyruoklė ištempta, ji stūmoklius veikia tam tikra tempimo jėga $T = k(l - l_0)$. Taigi,

$p_0S_1 + T = pS_1$, ir

$p_0S_2 + T = pS_2 + \rho glS_2$.

Išsprendę šią lygčių sistemą ir priėmę domėn T išraišką, gauname

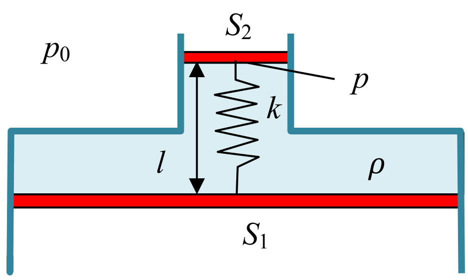
$$l = \frac{kl_0(S_1 - S_2)}{k(S_1 - S_2) - \rho gS_1S_2} \text{ ir } p = p_0 + \frac{\rho gS_2kl_0}{k(S_1 - S_2) - \rho gS_1S_2}.$$

Jei spyruoklės standumas bus nedidelis, jos ištempimo gali neužtekti pakankamai jėgai T sukelti , kad būtų pasiektas jėgų balansas pusiausvyros atveju. Iš l išraiškos matome, kad vardiklis ribiniu atveju gali artėti į 0, tuomet $l \to \infty$. Tuo būdu,

$$k > \frac{\rho gS_1S_2}{S_1 - S_2}.$$

Suprantama, kad stūmoklių ilgių turi pakakti, kad spyruoklė išsitemptų reikiamu ilgiu.

42. Sistemą sudaro du sujungti skirtingų skerspjūvių S_1 ir S_2 ($S_1>S_2$) vertikalūs cilindrai, kurie užpildyti nespūdžiu tankio ρ skysčiu ir uždengti sandariais besvoriais stūmokliais, tarp kurių įsprausta lengva standumo k spyruoklė (žiūr. brėž.). Sistemą palikus pačiai sau, nusistovi pusiausvyra. Koks atstumas tarp stūmoklių, jei neištemptos spyruoklės ilgis l_0? Koks slėgis skystyje ties viršutiniu stūmokliu, jei atmosferos slėgis p_0?



Ats.: $l = \frac{kl_0(S_1 - S_2)}{k(S_1 - S_2) + \rho gS_1S_2}; p = p_0 - \frac{\rho gS_1kl_0}{k(S_1 - S_2) + \rho gS_1S_2}.$

Sprendimas

Nagrinėjame atvejį, kada pusiausvyra nusistovi ne visam skysčiui perėjus į didįjį cilindrą, nes atraip stūmokliai iš cilindrų iškristų.

Pusiausvyros atveju kiekvieną iš stūmoklių veikiančių jėgų atstojamoji lygi 0. Jei spyruoklė suspausta, ji stūmoklius veikia tam tikra stūmimo jėga $T = k(l_0 - l)$. Taigi,

$p_0S_2 = pS_2 + T$, ir

$p_0S_1 = (p + \rho g l)S_1 + T$.

Išsprendę šią lygčių sistemą ir priėmę domėn T išraišką, gauname

$$l = \frac{kl_0(S_1 - S_2)}{k(S_1 - S_2) + \rho g S_1 S_2} \text{ ir } p = p_0 - \frac{\rho g S_1 k l_0}{k(S_1 - S_2) + \rho g S_1 S_2}.$$

43. Iš vandens pagreičiu $a = 1$ m/s^2 kranu keliama tūrio $V = 3$ m^3 gelžbetonio plokštė. Rasti lyno, kuriuo keliama plokštė, įtempimo jėgą. Vandens pasipriešinimo galima nepaisyti. Gelžbetonio vidutinis tankis $\rho_g = 2{,}2$ g/cm^3.

Ats.: $T = V\left[\rho_g(a+g) - \rho_v g\right] = 42$ kN, čia ρ_v – vandens tankis.

Sprendimas

Užrašome 2-ąjį Niutono dėsnį keliamai plokštei:

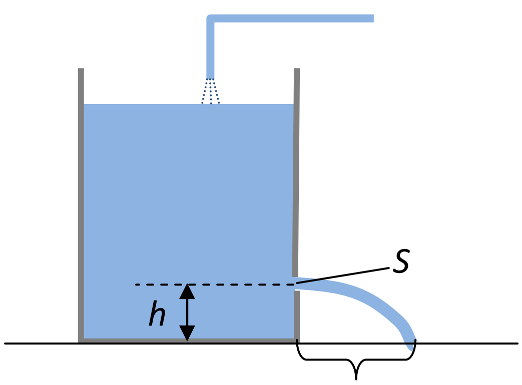
$T - mg + F_A = ma$, čia $g = 9{,}81$ m/s^2.

$T = V\left[\rho_g(a+g) - \rho_v g\right] = 42$ kN, čia ρ_v – vandens tankis.

44. Platus indas, turintis $S = 2$ cm^2 skerspjūvio kiaurymę šoninėje sienelėje, aukštyje $h = 0{,}1$ m nuo dugno, užpildomas vandeniu. Indo viršuje įvestas vamzdis, kuris papildo vandenį ir išlaiko pastovų jo lygį inde. Kiek vandens kiekvieną sekundę turi įtekėti į indą, kad ištekanti per kiaurymę srovė žemę pasiektų $l = 0{,}5$ m atstumu nuo šoninės sienelės?

Ats.: $V = lS\sqrt{\dfrac{g}{2h}} = 7{,}0 \cdot 10^{-4}$ m^3/s.

Sprendimas



Ištekantis per kiaurymę vanduo turi horizontalų greitį, kuriuo judėdamas jis įveikia atstumą l per laiką t, kurį jis kartu krinta laisvu kritimu žemyn, t.y. $t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$. Bet $l = vt$, todėl $v = l\sqrt{\dfrac{g}{2h}}$. Ištekančio per kiaurymę per sekundę vandens tūris turi būti lygus įtekančiam per tą patį laiką vandens tūriui, t.y.

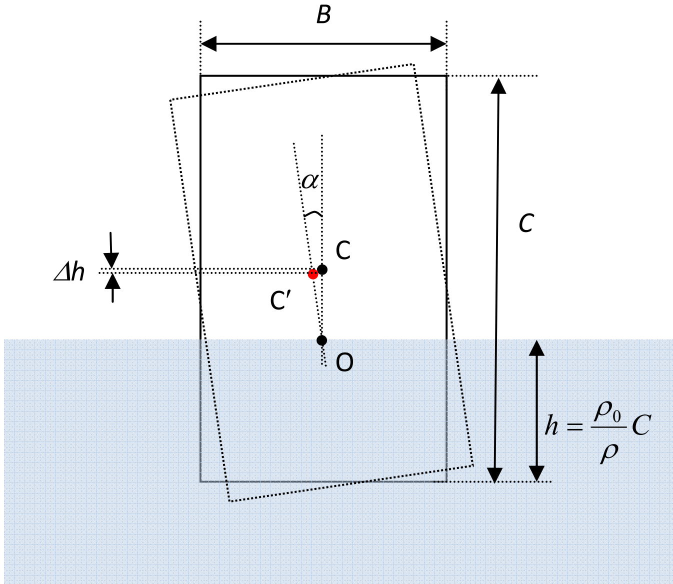
$V = vS = lS\sqrt{\dfrac{g}{2h}} = 7{,}0 \cdot 10^{-4}$ m^3/s.

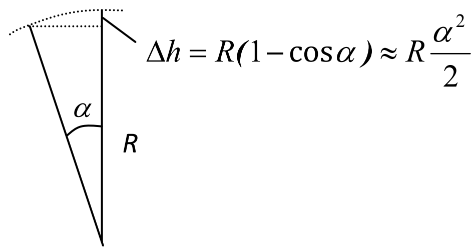
45. Vandenyje plūduriuoja stačiakampio gretasienio formos kūnas, kurio pagrindo matmenys *A* ir *B* (*A*>*B*), o aukštis *C*. Rasti kūno plūduriavimo stabilumo sąlygas, jei kūnas vienalytis, o jo tankis ρ_0. Kokiam kūno tankiui pusiausvyros sąlyga mažiausiai tikėtina?

Ats.: $B^2 > 6C^2 \frac{\rho_0}{\rho}\left(1-\frac{\rho_0}{\rho}\right)$, čia ρ-vandens tankis. Mažiausiai tikėtina pusiausvyra kūno tankiui

$\rho_0 = \frac{\rho}{2}$.

Sprendimas





Tarkime, kad plūduriuojantį kūną pakreipėme nedideliu kampu α<<1. Kūno pusiausvyra bus stabili, jei kūno ir vandens sistemos potencinė energija padidėja. Antraip pusiausvyra nestabili. Akivaizdu, kad turime nagrinėti stačiakampio gretasienio judėjimą pjūvyje, kurį sudaro jo kraštinės *C* ir pagrindo kraštinė *B* (žr. brėž.), nes kitame pjūvyje kūno padėtis stabilesnė (*A*>*B*).

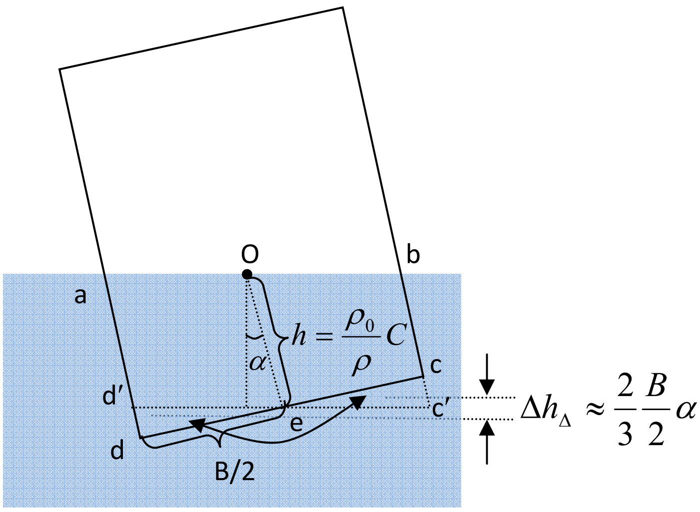
Pakreipiant kūną, jis sukasi apie ašį, esančią vandens paviršiuje (brėžinyje ši ašis statmena brėžinio plokštumai ir eina per tašką O). Pažymėtina, kad tiek vertikalioje padėtyje, tiek pakreiptas kūnas išstumia tą patį tūrį vandens. Vertikalioje padėtyje panirusi kūno aukščio dalis yra $h = \frac{\rho_0}{\rho}C$ (tai išplaukia iš Archimedo dėsnio).

Kūno ir vandens sistemos potencinę energiją sudaro kūno potencinė energija (ji tuo didesnė, kuo aukščiau pakilęs kūno masės centras C) ir išstumto vandens potencinė energija (ji tuo didesnė, kuo žemiau yra panirusios kūno dalies, hipotetiškai užpildytos vandeniu, masės centras). Pakreipus kūną kampu α, jo masės centras nusileidžia iš padėties C į padėtį C′ (žr. brėž). Aukščio pokytis lygus

$\Delta h \approx C\left(\frac{1}{2}-\frac{\rho_0}{\rho}\right)\frac{\alpha^2}{2}$ (skaičiavimą iliustruoja brėžinys dešinėje). Taigi, kūno potencinė energija sumažėja dydžiu

$$\Delta U_k = \rho_0 ABC^2\left(\frac{1}{2}-\frac{\rho_0}{\rho}\right)\frac{\alpha^2}{2}g$$

Dabar turime apskaičiuoti sistemos potencinės energijos pokytį dėl išstumto vandens. Plūduriuojančio kūno stabilumui būtina, kad šis potencinės energijos pokytis būtų teigiamas ir didesnis už kūno potencinės energijos sumažėjimą ΔU_k. Detaliau panagrinėkime išstumiamo vandens masės centro kitimą, pakreipus kūną kampu α.



Pakreipus kūną kampu α, išstumiamas vanduo užima tūrį figūros (stačiosios prizmės), kurios pjūvis abcd (žr. brėž.). Tegul šio vandens masė m_v, o jo masės centras yra atstumu x nuo vandens paviršiaus. Kadangi panirusios kūno dalies tūris nesikeičia, tai $m_v = \rho\frac{\rho_0}{\rho}ABC = \rho_0 ABC$. x vertę galime surasti, pasinaudoję masės centro apibrėžimu ir tardami, kad figūra abcd gali būti gauta iš figūros abc′d′ atimant trikampį cc′e ir pridedant trikampį dd′e (čia kalbama apie geometrinių figūrų pjūvius, o skaičiuojant tūrius ir mases reikėtų imti atitinkamas trikampes prizmes su aukštine A). Taigi

$$m_v x \approx m_\Delta \Delta h_\Delta + \frac{1}{2}m_v\frac{\rho_0}{\rho}C\left(1-\frac{\alpha^2}{2}\right).$$

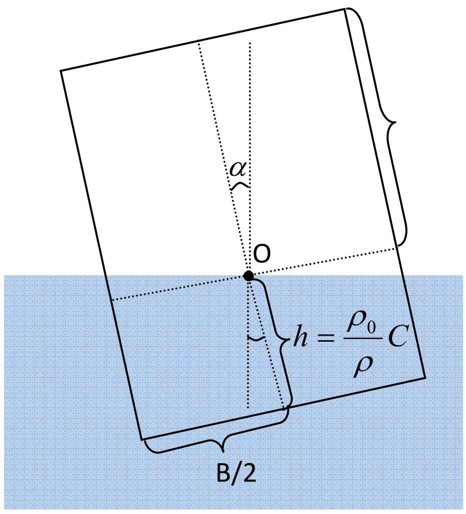
Čia trikampių cc′e ir dd′e pjūvius atitinkančių prizmių masė $m_\Delta \approx \rho\frac{1}{2}\left(\frac{B}{2}\right)^2\alpha A$ (primename, kad α <<1), Δh_Δ - atstumas, kuriuo nusileidžia šių trikampių prizmių masių centras, sukeitus jas vietomis (strėlytė brėžinyje). Pasinaudodami tuo, kad trikampio masės centras yra vieno trečdalio aukštinės atstumu nuo jo pagrindo (vėlgi pasinaudojame sąlyga α<<1), surandame $\Delta h_{\Delta} \approx \frac{2}{3}\frac{B}{2}\alpha$.

Kūno, esančio vertikalioje padėtyje, išstumto vandens masės centras yra atstumu $\frac{1}{2}\frac{\rho_0}{\rho}C$ nuo vandens paviršiaus, o pakreipus kampu α - atstumu x. Taigi, išstumto vandens potencinė energija padidėja dydžiu

$\Delta U_v = m_v g\left(x - \frac{1}{2}\frac{\rho_0}{\rho}C\right)$. Priminsime, kad stabiliai kūno plūduriavimo sąlygai būtina, kad $\Delta U_{\mathrm{v}} > \Delta U_{\mathrm{k}}$. Tuo būdu, įrašę reikiamas dydžių išraiškas, galiausiai po algebrinių pertvarkymų stabilumo sąlygai gauname tokį reikalavimą:

$$B^2 > 6C^2\frac{\rho_0}{\rho}\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right).$$

Galima samprotauti ir kitaip. Tarę, kad kūną pakreipiame mažu kampu α, skaičiuojame jėgų momentus, kurie verčia kūną virsti ir tam priešinasi.



Galime įsivaizduoti, kad virsti kūną verčia iškilusios virš vandens kūno dalies sunkio jėgos momentas, t.y.

$$M_1 = \frac{1}{2}\left(C - \frac{\rho_0}{\rho}C\right)\alpha\rho_0 AB\left(C - \frac{\rho_0}{\rho}C\right)g.$$

Kūną grąžinantis į pusiausvyros padėtį momentas atsiranda dėl papildomos Archimedo jėgos sukeliamo momento, nes kairioji kūno dalis papildomai panyra, o dešinioji – iškyla (priminsime, kad kūnas pasvyra apie savo simetrijos ašį, esančią vandens paviršiuje ir einančią per tašką O). Taigi šis jėgos momentas lygus

$$M_2 = 2\int_0^{B/2} (\rho - \rho_0) x \alpha dx A g x = \frac{1}{12}(\rho - \rho_0) A B^3 \alpha g \, .$$

Pusiausvyros stabilumui būtina, kad grąžinantis jėgos momentas viršytų verčiantįjį, t.y. $M_2 > M_1$. Įrašę momentų vertes, gauname tą pačią sąlygą

$$B^2 > 6C^2 \frac{\rho_0}{\rho}\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right).$$

Ši išraiška kūno tankio atžvilgiu – parabolinė priklausomybė. Jos šakos eina žemyn, t.y. parbolė turi maksimumą, kuriame yra griežčiausias nelygybės reikalavimas.Funkcijos ekstremumo tašką galime surasti, imdami išvestinę ρ_0 atžvilgiu ir prilygindami ją 0.

$$\frac{\mathrm{d}\left[\rho_0\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)\right]}{\mathrm{d}\rho_0} = 0 \text{, kai } \rho_0 = \frac{\rho}{2} \, .$$