Fizikos Olimpas 2008 m. vasaros sesija

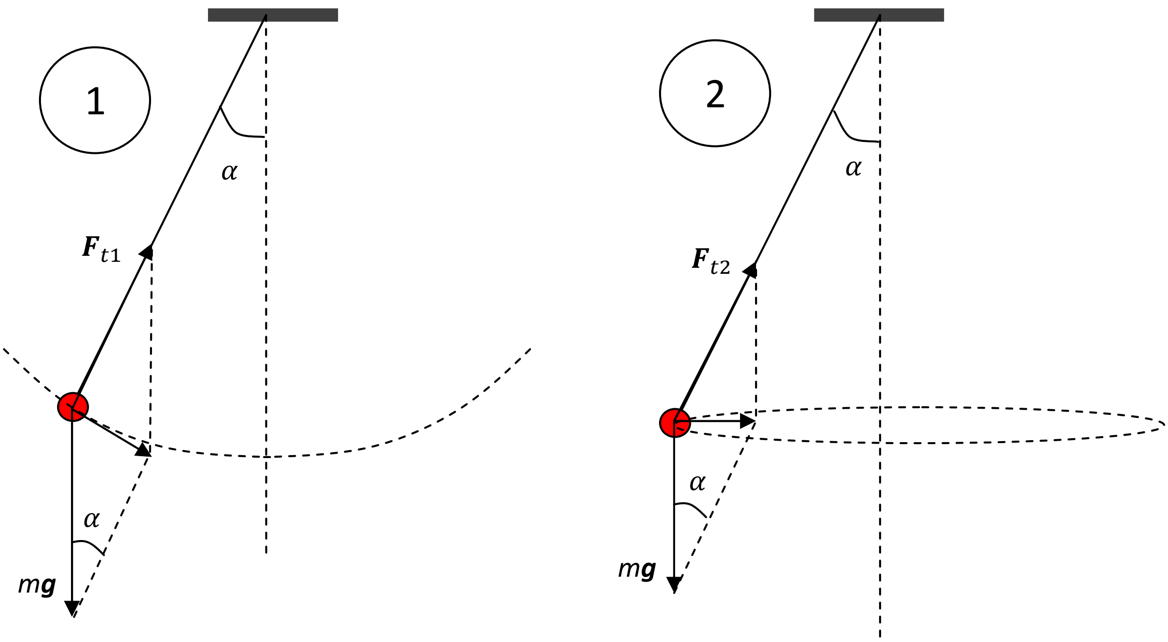
2 kursas

Svyravimai ir bangos

1. Matematinė svyruoklė atlenkiama nuo vertikalės ir paleidžiama judėti dviem būdais: 1) matematinė svyruoklė svyruoja plokštumoje (standartinis atvejis); 2) matematinės svyruoklės siūlas judėdamas brėžia konusą, o svarelis juda apskritimu. Kuriuo atveju siūlo įtempimo jėga didesnė, jei siūlo atlenkimo nuo vertikalės kampas vienodas ir lygus α? Apskaičiuokite ir palyginkite matematinės svyruoklės svyravimų periodą su laiku, per kurį svarelis padaro visą apsisukimą, tardami, kad α nedidelis.

Ats.: $F_{t2} > \mathrm{F}_{t1}$. $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} > T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\cos\alpha}$.

Sprendimas



1-asis brėžinys vaizduoja matematinės svyruoklės svyravimą plokštumoje, o 2-asis – svarelio sukimąsi horizontalioje plokštumoje. 1-uoju atveju atstojamoji jėga nukreipta svyruoklės svarelio judėjimo trajektorijos liestinės kryptimi, o 2-uoju – atstojamoji jėga vaidina įcentrinės jėgos vaidmenį ir nukreipta statmena vertikalei kryptimi į sukimosi ašį. Iš brėžinių matyti, kad

$F_{t1} = mg\cos\alpha$, o $F_{t2} = \frac{mg}{\cos\alpha}$. Tuo būdu, $F_{t2} > \mathrm{F}_{t1}$.

Matematinės svyruoklės atveju, vykstant svyravimams plokštumoje, kai atlenkimo kampas nedidelis,

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Jei svarelis sukasi horizontalioje plokštumoje,

$\frac{mv^2}{l\sin\alpha} = mg\tan\alpha$, iš čia $v = \sqrt{gl\tan\alpha\sin\alpha}$. Taigi, $T_2 = \frac{2\pi l\sin\alpha}{v} = \frac{2\pi l\sin\alpha}{\sqrt{gl\tan\alpha\sin\alpha}}$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\cos\alpha}\,.$$

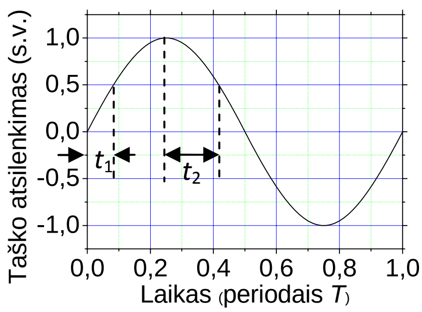
Iš čia matyti, kad $T_2 < T_1$. Vienok mažiems kampams gana dideliu tikslumu $\cos\alpha \approx 1$, todėl šiuos laikus galima laikyti apytikriai lygiais, t.y. $T_1 \approx T_2$.

2. Taško harmoninių svyravimų periodas *T*. Per kiek laiko t_1 taškas atsilenkia nuo pusiausvyros padėties iki pusės amplitudės? Per kiek laiko t_2 taškas atsilenkia nuo visos amplitudės iki pusės jos dydžio?

$Ats.$: $t_1 = \frac{T}{12}$; $t_2 = \frac{T}{6}$.

Sprendimas

Tegul svyravimai vyksta sinuso dėsniu, t. y. $x = A\sin\frac{2\pi}{T}t$. Grafikas parodytas paveiksle.



t_1 randame iš lygties $\sin\frac{2\pi}{T}t_1 = \frac{1}{2}$. Ją išsprendę minimaliam laikui gauname $t_1 = \frac{T}{12}$.

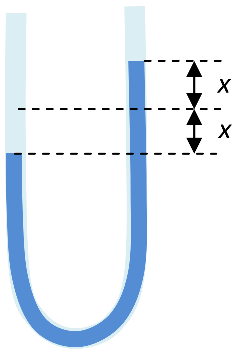
t_2 galime rasti, paslinkę laiko ašį per ketvirtį periodo į dešinę. Tuomet turėsime lygtį

$\cos\frac{2\pi}{T}t_2 = \frac{1}{2}$. Ją išsprendę gauname $t_2 = \frac{T}{6}$.

3. Rasti gyvsidabrio, supilto į U-pavidalo vamzdelį atvirais galais, svyravimų periodą, išvedus gyvsidabrio lygį iš pusiausvyros. Trinties nepaisyti. Vamzdelio skelrspjūvis $S = 0{,}20\ \mathrm{cm}^2$, gyvsidabrio masė $m = 150\ \ \mathrm{g}$.

$\mathrm{Ats.}: T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2\rho g S}} = 1{,}05\ \mathrm{s}.$

Sprendimas



Išvedus iš pusiausvyros gyvsidabrio lygį dydžiu x, stulpelių aukščių skirtumas tampa $2x$. Taigi, šio stulpelio $2x$ sunkio jėga ir suteikia visam vamzdelio gyvsidabriui pagreitį. Tuomet gyvsidabrio m judėjimo lygtis

$$m\ddot{x} = -2\rho g S x.$$

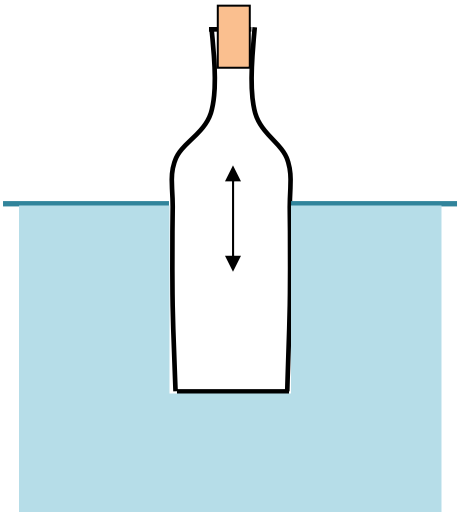
Tai lygtis $\ddot{x} = -\omega_0^2 x$, kurios sprendinys – sinusinė funkcija $x = A sin\omega_0 t$, t.y. gyvsidabrio stulpelio atveju

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2\rho g S}} = 1{,}05\ \mathrm{s}.$$

4. Rasti butelio, plūduriuojančio vandens paviršiuje, svyravimų periodą. Butelio masė m, jo skerspjūvis S. Į vandens lygio kitimą nekreipti dėmesio.

$\mathrm{Ats.}: T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho g S}}.$

Sprendimas



Jei butelis panyra dydžiu x, jį veikia papildoma keliamoji Archimedo jėga $\rho g S x$. Taigi, butelio judėjimo lygtis

$$m\ddot{x} = -\rho g S x.$$

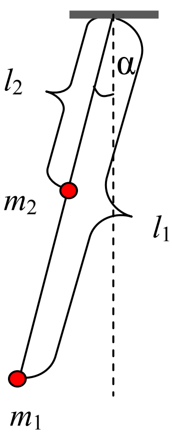
Lygties $\ddot{x} = -\omega_0^2 x$ sprendinys - sinusinė funkcija, kurios ciklinis dažnis ω_0. Mūsų atveju

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\rho g S}{m}}.$$

Taigi, periodas lygus

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho g S}}$$

5. Rasti svyruoklės, parodytos paveiksle, mažų svyravimų periodą. Taškinės masės m_1 ir m_2 kietai įtvirtintas ant besvorių strypų, kurių ilgiai l_1 ir l_2.



Ats.: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}{(m_1 l_1 + m_2 l_2) g}}$.

Sprendimas

Fizikinės svyruoklės periodas lygus

$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\alpha_s}}$, čia $I -$ fizikinės svyruoklės inercijos momentas pakabinimo ašies atžvilgiu,

o $\alpha_s -$ kreipimo momentas.

Surandame šiuos dydžius duotuoju atveju:

$I = m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2$, o α_s surandame iš jėgos momento, veikiančio fizikinę svyruoklę, ją išvedus iš pusiausvyros padėties kampu α:

$$M = -(m_1 g l_1 \sin\alpha + m_2 g l_2 \sin\alpha) \approx -(m_1 l_1 + m_2 l_2) g\alpha .$$

Iš čia $\alpha_s = (m_1 l_1 + m_2 l_2) g$. Tuo būdu,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}{(m_1 l_1 + m_2 l_2) g}} .$$

6. Kam lygus matematinės svyruoklės, kurios ilgis *l*, svyravimo periodas šiais atvejais: 1) lifte, kuris kyla su pagreičiu *a*; 2) lifte, kuris leidžiasi su pagreičiu *a*; 3) vagone, judančiame horizontalia kryptimi su pagreičiu *a*; 4) vežimėlyje, kuris be trinties leidžiasi nuožulniąja plokštuma, sudarančia kampą α su horizontu?

Ats.: 1) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}}$; 2) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g-a}}$; 3) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2+a^2}}}$; 4) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g\cos\alpha}}$.

Sprendimas

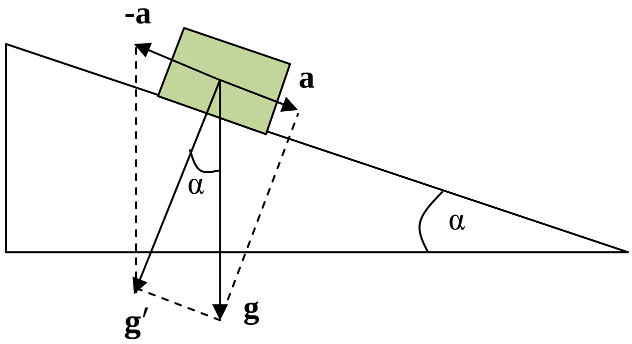
Visais atvejais matematinė svyruoklė svyruoja neinercinėje sistemoje, kurioje reiškinius galime aprašyti inercinės sitemos lygtimis, bet naudoti charakteringą pagreitį $\boldsymbol{g'}$. Pagal Dalambero principą šis pagreitis $\boldsymbol{g'} = \boldsymbol{g} - \boldsymbol{a}$, čia $\boldsymbol{a}$ – neinercinės sistemos pagreitis inercinės sistemos atžvilgiu.

1 – uoju atveju $g' = g + a$, todėl $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}}$.

2 – uoju atveju $g' = g - a$, todėl $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g-a}}$.

$3 - $ uojo atveju $g' = \sqrt{g^2 + a^2}$, todėl $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + a^2}}}$.

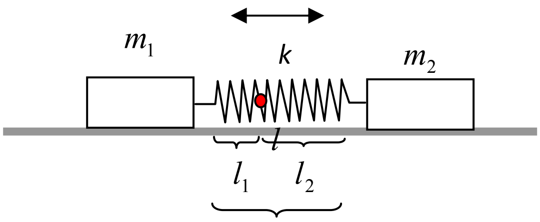
4-uoju atveju vežimėlis juda su pagreičiu $a = g \sin \alpha$.



Taigi, $g' = g \cos \alpha$, todėl $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g \cos \alpha}}$.

7. Ant horizontalios plokštumos padėti du masių m_1 ir m_2 tašeliai, sujungti spyruokle, kurios standumas k. Tašeliai suspaudžiami ir paleidžiami svyruoti. Rasti svyravimo periodą. Trinties nepaisyti.

Sprendimas



Pastebėsime, kad tašeliai su spyruokle sudaro uždarąją sistemą, nes trinties su plokštuma nepaisome. Vadinasi, sistemos masių centro C padėtis, vykstant svyravimams, išlieka nekintama. Tada galime tarti, kad, pvz., tašelis m_1 svyruoja C atžvilgiu, o svyravimus lemia spyruoklės dalis tarp tašelio m_1 ir masių centro C. Masių centrui

$$m_1 l_1 = m_2 l_2 \text{, ir } l_1 + l_2 = l \text{. Iš čia } l_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} l \text{.}$$

Spyruoklei $F = -kx$. Toliau „-„ praleisime, nes mus domina tik modulis. Jei nuo turimos ilgio *l* ir standumo *k* spyruoklės atkirptume l_1 dalį, tai jos standumas būtų kitas. Jei ilgio *l l* spyruoklę ištemptume dydžiu *x*, tai jos dalis l_1 pailgėja dydžiu x_1. Ją randame iš tempimo jėgos,kuri visuose spyruoklės taškuose vienoda. Taigi,

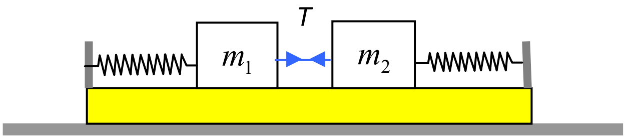
$kx = k_1 x_1$. Čia k_1 - l_1 ilgio spyruoklės standumas. Iš čia $k_1 = \frac{x}{x_1}k$. Tačiau bet kuriam *x* galioja $\frac{l}{l_1} = \frac{x}{x_1}$

Pasinaudoję l_1 išraiška, gauname

$$k_1 = k\frac{m_1 + m_2}{m_2}.$$

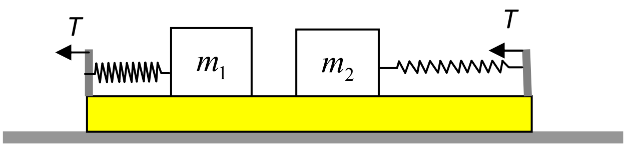
Tuomet $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}$.

8. Ant masės *M* platformos, padėtos ant horizontalios plokštumos, galuose įtvirtintos vienodo standumo lengvomis spuoklėmis masių m_1 ir m_2 kūnai (žr. brėž.). Jie sujungti siūlu, kurio įtempimo jėga *T*. Siūlas staiga perkerpamas, ir sistema paliekama pati sau. Kokiam trinties tarp platformos ir plokštumos koeficientui platforma pajudės? Trinties tarp kūnų ir platformos nepaisyti.



Sprendimas

Spyruoklių standumai vienodi, o kūnų masės skirtingos, todėl perkirpus siūlą kūnai svyruos skirtingais periodais. Tuomet ateis toks momentas,kai vienas kūnų bus maksimaliai suspaudęs savo spyruoklę, o kitas – maksimaliai ištempęs, pvz., kaip parodyta brėžinyje.

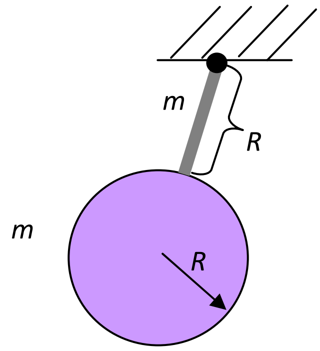


Tuomet platformą veiks didžiausia horizontali jėga, kuri turi viršyti trinties jėgą, t.y.

$2T > \mu(M + m_1 + m_2)g$. Iš čia

$$\mu < \frac{2T}{(M + m_1 + m_2)g}.$$

9. Laikrodžio svyruoklę atstoja fizikinė svyruoklė, kurią sudaro ilgio R ir masės m strypelis ir jo gale kietai įtvirtintas tokios pat masės ir spindulio R vienalytis diskas. Apskaičiuoti tokios laikrodžio svyruoklės mažų svyravimų periodą.



Sprendimas:

Fizikinės svyruoklės periodo formulė:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Sigma}{M_K}} \quad .$$

Čia I_Σ - fizikinės svyruoklės inercijos momentas svyravimo ašies atžvilgiu, o M_K - kreipimo momentas.

$$I_\Sigma = \frac{mR^2}{3} + \frac{mR^2}{2} + m(R+R)^2 = \frac{29}{6}mR^2$$

$$M_K = mg\frac{R}{2} + mg(R+R) = \frac{5}{2}mgR$$

Taigi

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{29}{15}\frac{l}{g}}$$

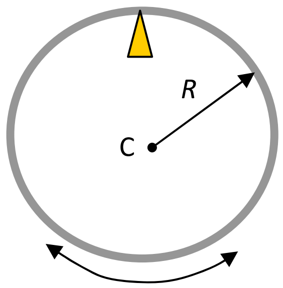
10. Plonas spindulio R žiedas svyruoja apie ašį, einančią per periferinį žiedo tašką. Vienu atveju ašis statmena žiedo plokštumai, o kitu – lygiagreti jai. Rasti nedidelių svyravimų periodą abiem atvejais.

Sprendimas

Abiem atvejais turime fizikinę svyruoklę, kuriai $t = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl_C}}$.

Čia I – svyruoklės inercijos momentas svyravimo ašies atžvilgiu, l_C - atstumas nuo ašies iki svyruojančio kūno masės centro.

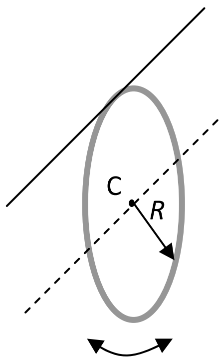
a) Ašis, apie kurią svyruoja žiedas, statmena žiedo plokštumai.



Šiuo atveju inercijos momentas $I = I_C + mR^2$ (pritaikyta Šteinerio teorema). Žiedui $I_C = mR^2$.

Taigi $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{mR^2 + mR^2}{mgR}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{2R}{g}} = 0{,}89\,\mathbf{s}$.

b) Ašis, apie kurią svyruoja žiedas, lygiagreti žiedo plokštumai



Dabar $I' = I'_C + mR^2$. Čia $I'_C = \dfrac{mR^2}{2}$ (buvo skaičiuota viename iš pavyzdinių uždavinių).

Tada

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{mR^2 + mR^2}{mgR}} = 2\pi\sqrt{\frac{3R}{2g}} = \pi\sqrt{\frac{6R}{g}} = 0{,}77\,\mathbf{s}.$$

11. Ant horizontaliai įtvirtinto kamertono pabertos smiltelės. Kamertonas suvirpinamas ir svyruoja $\nu = 400$ Hz dažniu. Kokia svyravimų amplitudė toje vietoje, kur smiltelės nepašoka? Kokia kamertono svyravimų amplitudė toje vietoje, kur smiltelės pusiausvyros padėties atžvilgi pašoka į aukštį $H = 2{,}0$ mm, laikant smiltelių smūgius į kamertoną absoliučiai netampriais.

Ats.: $A_1 \leq \frac{g}{4\pi^2\nu^2} = 1{,}55 \cdot 10^{-4}$ cm; $A_2 = \frac{g}{\omega}\sqrt{\frac{2H}{g} - \frac{1}{\omega^2}} = 7{,}9 \cdot 10^{-3}$ cm .

Sprendimas

1. Tarkime, kamertonas bet kuriuo laiko momentu t atsilenkia dydžiu x. Kamertonas atlieka harmoninius svyravimus, todėl jo atsilenkimas gali būti nusakomas kaip

$$x = A_1 sin\omega t.$$

Čia A – svyravimų amplitudė, ω- ciklinis svyravimų dažnis.

Smiltelės, judėdamos kartu su kamertonu, juda su jo pagreičiu, kurį galime surasti kaip

$$\ddot{x} = -A_1\omega^2 \sin \omega t \,.$$

Smiltelės atitrūks nuo kamertono, kai $|\ddot{x}_{max}| = A_1\omega^2 > g$ (iš tikrųjų $\ddot{x}_{max}$ turi būti $-g$, bet šiuo atveju mus domina tik pagreičio amplitudė). Taigi, smiltelės nepašoks, kai

$$A_1 \leq \frac{g}{4\pi^2\nu^2} = 1{,}55 \cdot 10^{-4} \text{ cm}.$$

2. Didėjant svyravimų aplitudei (kai A > $1{,}55 \cdot 10^{-4}$ cm), smiltelės tam tikru momentu pradės atšokti nuo kamertono. Tai momentas, kai pagreitis tampa $-g$.

Patogu panagrinėti vienoje laiko skalėje, kaip kinta kamertono nukrypimas nuo pusiausvyros (koordinatė), greitis ir pagreitis. Jei $x = A_2 \sin \omega t$, tai greitis $v = \dot{x} = A_2\omega \cos \omega t$, o pagreitis

$$a = \ddot{x} = -A_2\omega^2 \sin \omega t.$$

Paveiksle nubrėžtos visos trys priklausomybės per pirmąsias 3 ms. Randame laiką t_a, kuris atitinka šį atitrūkimo momentą.

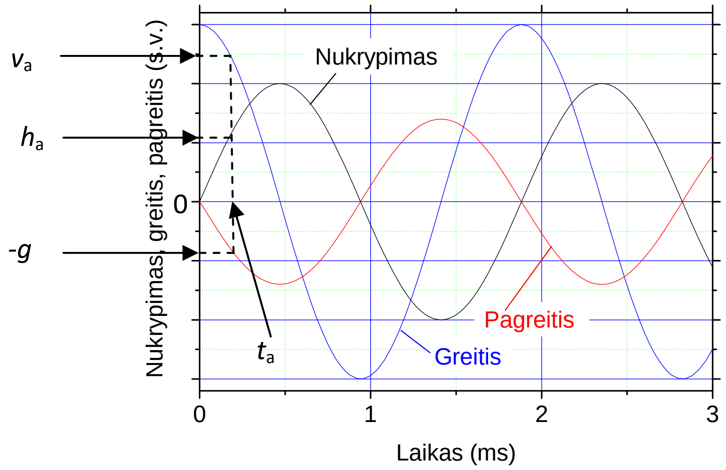
$-g = -A_2\omega^2 \sin \omega t_a$. Iš čia $\sin \omega t_a = \dfrac{g}{A_2\omega^2}$.

Taigi, galutinis aukštis H susideda iš pradinio nukrypimo nuo pusiausvyros padėties h_a ir aukščio, į kurį pakyla smiltelė, atitrūkusi nuo kamertono (tuo metu

ji turi tam tikrą greitį v_a). Tuo būdu,

$$H = h_a + \frac{v_a^2}{2g}$$

\`



Toliau surandame šiuos dydžius ir apskaičiuojame amplitudę A_2.

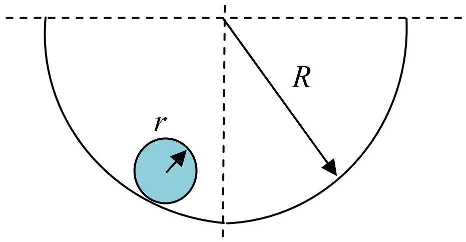
$$h_a = A_2 \sin \omega t_a = \frac{g}{\omega^2}.$$

$$v_a^2 = A_2^2 \omega^2 \cos^2 \omega t_a = A_2^2 \omega^2 \left(1 - \frac{g^2}{A_2^2 \omega^4}\right).$$

Tada

$$H = \frac{A_2^2 \omega^2}{2g} + \frac{g}{2\omega^2}. \text{ Iš čia } A_2 = \frac{g}{\omega}\sqrt{\frac{2H}{g} - \frac{1}{\omega^2}} = 7{,}9 \cdot 10^{-3} \text{ cm.}$$

12. Spindulio R cilindro formos vidiniu paviršiumi nedidele amplitude svyruoja kūnas (žiūr. brėž.). Koks svyravimų periodas, jei šis kūnas: 1) spindulio r rutuliukas, o trinties tarp kūno ir cilindro paviršiaus nėra; 2) Spindulio r žiedelis, kuris rieda cilindro paviršiumi nepraslysdamas; 3) spindulio r vienalytis cilindras, kuris rieda nepraslysdamas; 4) spindulio r rutuliukas, kuris rieda nepraslysdamas; 5) spindulio r besvorė plonasienė sfera, pripildyta idealaus skysčio.



Ats.: 1) $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{R-r}{g}}$; 2) $T_2 = 2\pi\sqrt{2\frac{R-r}{g}}$; 3) $T_3 = 2\pi\sqrt{\frac{3}{2}\frac{R-r}{g}}$; 4) $T_4 = 2\pi\sqrt{\frac{7}{5}\frac{R-r}{g}}$;

5) $T_5 = 2\pi\sqrt{\frac{R-r}{g}}$.

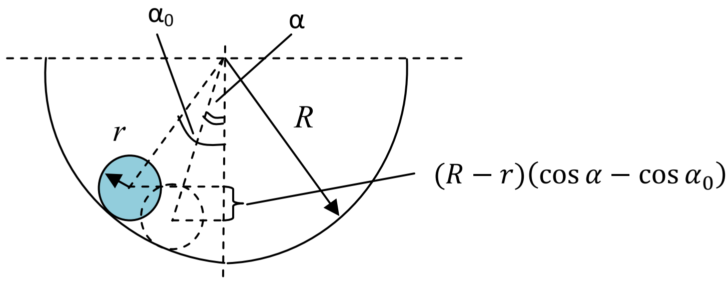
Sprendimas

1) Jei trinties tarp kūno ir cilindro paviršiaus nėra, tai kūno judėjimas – tik slenkamasis, o tai analogiškas atvejis matematinei svyruoklei, turinčiai siūlo ilgį ($R - r$). Vadinasi, svyravimų periodas

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R-r}{g}}.$$

2) Palyginkime, kokiais greičiais kiekvienu atveju juda kūno masės centras. Tam panagrinėkime kūno potencinės energijos pokytį, kai atsilenkimo kampas kinta nuo maksimalaus α_0 iki α. Visais 5 atvejais jis vienodas ir lygus (žiūr. brėž.)

$\Delta U = mg(R-r)(\cos\alpha - \cos\alpha_0)$.



Šis potenciės energijos pokytis sunaudojamas kūno kinetinei energijai, kuri kiekvienu atveju jau skirtinga. 1-uoju atveju

$$\Delta U = \frac{mv_1^2}{2}.$$

$2-$uoju atveju, kai žiedelis nepraslysta, jo kinetinė energija $K_2 = \frac{mv_2^2}{2} + \frac{I_2\omega_2^2}{2}$.

Čia žiedelio inercijos momentas $I_2 = mr^2$, o $\omega_2 = \frac{v_2}{r}$. Tuomet $K_2 = mv_2^2$. Vadinasi,

$\frac{mv_1^2}{2} = mv_2^2$. Tuo būdu, $2-$uoju atveju kiekviename taške kūno masės centro greitis yra

$\sqrt{2}$ kartų mažesnis.

Taigi, $2-$uoju atveju svyravimų periodas yra $\sqrt{2}$ kartų didesnis, t. y. $T_2 = 2\pi\sqrt{2\frac{R-r}{g}}$.

3) Nepraslystančio cilindro atveju kinetinė energija lygi

$K_3 = \frac{mv_3^2}{2} + \frac{I_3\omega_3^2}{2}$. Čia $I_3 = \frac{1}{2}mr^2$, o $\omega_3 = \frac{v_3}{r}$. Tuomet $K_3 = \frac{3}{4}mv_3^2$. Vadinasi,

$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{3}{4}mv_3^2$. Tuo būdu, $3-$uoju atveju kiekviename taške kūno masės centro greitis yra

$\sqrt{\frac{3}{2}}$ kartų mažesnis, lyginant su $1-$uoju atveju.

Taigi, $3-$uoju atveju svyravimų periodas yra $\sqrt{\frac{3}{2}}$ kartų didesnis, t. y. $T_3 = 2\pi\sqrt{\frac{3}{2}\frac{R-r}{g}}$.

4) Nepraslystančio rutulio atveju kinetinė energija lygi

$K_4 = \dfrac{mv_4^2}{2} + \dfrac{I_4\omega_4^2}{2}$. $\check{C}ia$ $I_4 = \dfrac{2}{5}mr^2$, o $\omega_4 = \dfrac{v_4}{r}$. Tuomet $K_4 = \dfrac{7}{10}mv_4^2$. Vadinasi,

$\dfrac{mv_1^2}{2} = \dfrac{7}{10}mv_4^2$. Tuo būdu, 4 − uoju atveju kiekviename taške kūno masės centro greitis yra

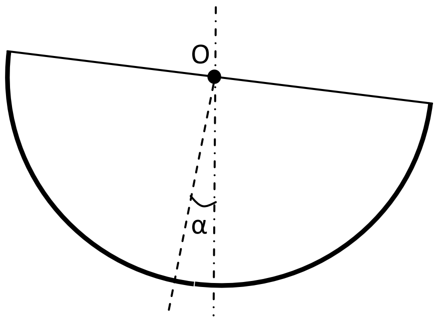
$\sqrt{\dfrac{7}{5}}$ kartų mažesnis, lyginant su 1 − uoju atveju.

Taigi, 4 − uoju atveju svyravimų periodas yra $\sqrt{\dfrac{7}{5}}$ kartų didesnis, t. y. $T_4 = 2\pi\sqrt{\dfrac{7}{5}\dfrac{R-r}{g}}$.

5) Šiuo atveju idealus skystis nesisuka, t.y. analogiškas atvejis 1-ajam, kuomet kūnas dalyvauja tik slenkamajame judėjime. Vadinasi,

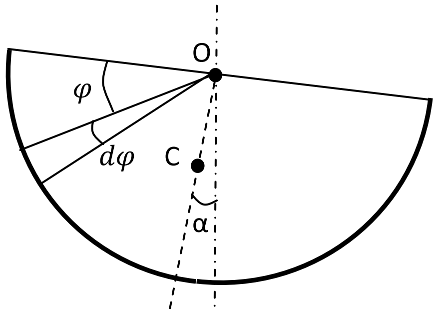
$$T_5 = 2\pi\sqrt{\frac{R-r}{g}}\ .$$

13. Viela sulenkta spindulio *R* puslankiu, kurio galai įtemptais netąsiais lengvais siūlais pririšti prie ašies, einančios per puslankio apskritimo centrą O (žiūr. brėž.). Rasti šios svyruoklės nedidelių svyravimų periodą.



Ats.: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\pi R}{2g}}$.

Sprendimas



Jei puslankio masių centras *C* yra atstumu l_C nuo apskritimo centro *O*, tai sistemos kreipimo momentas yra $\alpha_C = mgl_C$, Čia *m* – puslankio masė. Puslankio inercijos momentas sukimosi ašies atžvilgiu yra $= mR^2$. Tuomet tokios fizikinės svyruoklės svyravimo periodas

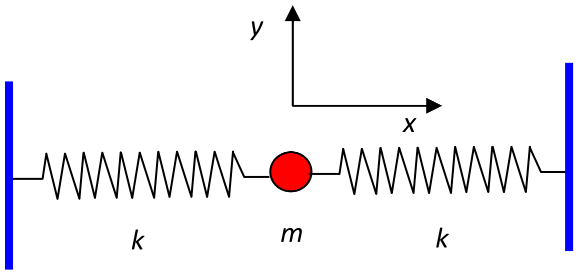
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl_C}}.$$

Belieka surasti puslankio masių centro padėtį, t.y. l_C. Šį atstumą nuo ašies O randame iš masių centro apibrėžimo:

$ml_C = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{m}{\pi R} Rd\varphi R\sin\varphi = \frac{2mR}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi = \frac{2mR}{\pi}$. Taigi, $l_C = \frac{2R}{\pi}$. Tuo būdu

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\pi R}{2g}}.$$

14. Masės m kūnas kartu su pritvirtintomis prie jo vienodomis spyruoklėmis padėtas ant horizontalaus stalo. Spyruoklės ištemptos iki ilgio l ir antriaisiais galais pritaisytos prie sienelių (žiūr. brėž.). Neištemptų spyruoklių ilgiai l_0 $(l > l_0)$, o jų standumas k. Koks kūno nedidelių svyravimų periodas išilgai x ir y ašių?



Ats.: $T_x = \pi\sqrt{\frac{2m}{k}}$, $T_y = \pi\sqrt{\frac{2ml}{(l-l_0)k}}$.

Sprendimas

Naudosimės harmoninių svyravimų lygtimi:

$$F = m\ddot{x} = -kx,$$

kurios sprendinys $x = x_0 \sin\omega t$, kur $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, ir $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

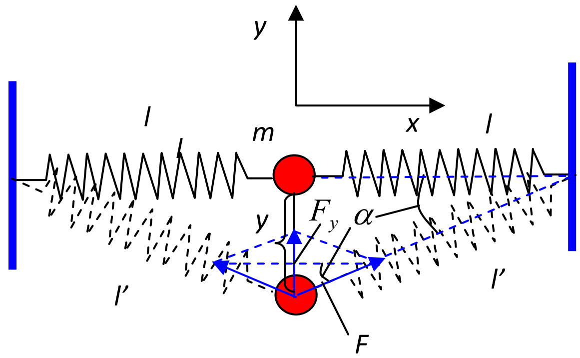
Panagrinėjame svyravimus x kryptimi.

Jei išvedame kūną iš pusiausvyros padėties dydžiu x, kūną į pusiausvyrą stengsis grąžinti jėga

$$F_x = -2kx.$$

Taigi, sprendinys $T_x = \pi\sqrt{\frac{2m}{k}}$.

Dabar tarkime, kad išvedėme kūną y kryptimi iš pusiausvyros dydžiu y.



Tuomet kūną į pusiausvyros padėtį stengsis grąžinti jėga

$$F_y = 2F\sin\alpha$$

Jėgą F randame iš

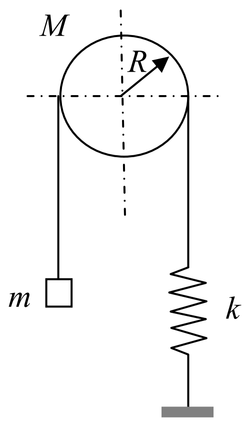
$$F = -(l'-l_0)k = -\left(\frac{l}{\cos\alpha} - l_0\right)k \approx -(l-l_0)k \text{, be to, } \sin\alpha \approx \frac{y}{l}.$$

Tuomet

$$F_y = -\frac{2(l-l_0)}{l}ky.$$

Taigi sprendinys $T_y = \pi\sqrt{\frac{2ml}{(l-l_0)k}}$.

15. Raskite pavaizduotos mechaninės sistemos, sudarytos iš masės m krovinio, vienalyčio masės M ir spindulio R skridinio bei standumo k spyruoklės, sujungtų besvoriu netąsiu siūlu, svyravimų periodą. Spyruoklės masės nepaisyti, svyravimų metu siūlas skridiniu nepraslysta. Išnagrinėti 2 atvejus: 1) skridinys – vienalytis cilindras; 2) skridinys – plonasienis vamzdis.



Ats.: $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{2m+M}{2k}}$; $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m+M}{k}}$.

Sprendimas

Užrašome judėjimo lygtį sukamajam judėjimui:

$I\beta = M_j$, čia $I -$ sistemos inercijos momentas, $\beta -$ kampinis pagreitis, $M_j -$ veikiantis sistemą jėgos momentas. 1-uoju atveju, spyruoklei pailgėjus dydžiu x,

$$\left(mR^2 + \frac{MR^2}{2}\right)\frac{\ddot{x}}{R} = -kxR\,.$$

Tai lygtis $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, kurios sprendinys – sinusinė funkcija su cikliniu dažniu ω_0. Mūsų atveju

$$\omega_0^2 = \frac{2k}{2m+M}\text{ , taigi } T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{2m+M}{2k}}\,.$$

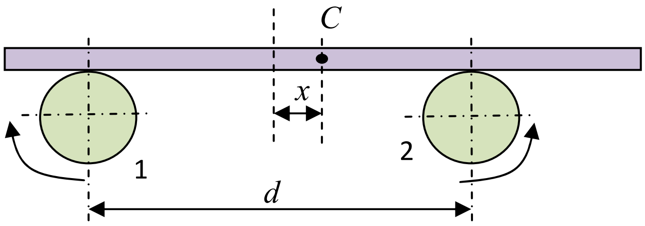
2-uoju atveju judėjimo lygtis atrodo taip:

$$(mR^2 + MR^2)\frac{\ddot{x}}{R} = -kxR\,.$$

Analogiškai gauname

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m+M}{k}}\,.$$

16. Du vienodi skridiniai, esantys viename aukštyje, greitai sukasi apie savo ašis priešingomis kryptimis (žiūr. brėž.). Atstumas tarp skridinių ašių $d = 10{,}0$ cm. Ant besisukančių skridinių uždedamas strypelis, galintis slysti skridiniais. Trinties tarp strypelio ir skridinių koeficientas $\mu = 0{,}25$. Jei pradiniu momentu strypelio masės centras C yra arčiau prie vieno iš skridinių (pvz., prie dešiniojo), tai jis pradeda judėti periodiškai iš dešinės į kairę, o po to – atgal. Įrodyti, kad tai sinusiniai virpesiai. Rasti svyravimų periodą. Kodėl lėtai sukantis skridiniams svyravimai gali būti neharmoniniai? Kaip judėtų strypelis, jei pasikeistų skridinių sukimosi kryptis?



$\text{Ats.}: T = \pi\sqrt{\frac{2d}{\mu g}} = 0{,}90\text{ s}\,.$

Sprendimas

Tegul strypelio masė M, jo masės centras pasislinkęs atstumu x nuo vidurinio taško tarp skridinių, o jėgos, kuriomis veikiami 1-asis ir 2-asis skridiniai yra atitinkamai F_1 ir F_2. Tuomet galime užrašyti jėgų vertikalia kryptimi lygybę (strypelis šia kryptimi nejuda) ir jėgos momentų lygybę, pvz., 1-ojo skridinio centro atžvilgiu (strypelis taip pat ir nesisuka):

$$\begin{cases} F_1 + F_2 = Mg \\ Mg\left(\frac{d}{2} + x\right) = F_2 d \end{cases}$$

Iš šių lygybių randame $F_2 = Mg\dfrac{d+2x}{2d}$, $\quad F_1 = Mg - F_2 = Mg\dfrac{d-2x}{2d}$.

Atstojamoji jėga, kuri veikia strypelį, lygi trinities jėgų skirtumui, duotuoju atveju lygi

$F_h = -\mu(F_2 - F_1) = -\dfrac{2\mu Mg}{d}x$. Čia " − "reiškia, kad atstojamoji jėga yra priešingo

ženklo negu x. Matome, kad tai harmoninių (sinusinių) svyravimų lygtis su cikliniu dažniu

$\omega_0^2 = \dfrac{2\mu g}{d}$. Tuo būdu, svyravimų periodas $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{d}{2\mu g}} = \pi\sqrt{\dfrac{2d}{\mu g}} = 0{,}90\ s$.

Jei skridiniai suktųsi lėtai, tam tikrais momentais gali susilyginti strypelio greitis su linijiniu vieno iš skridinių greičiu, ir atitinkama trinities jėga sumažėtų (taptų mažesnė už nusakomą per trinities koeficientą) , o tai jau netenkintų harmoninių svyravimų lygties.

Pasikeitus skridinių sukimosi krypčiai, strypelis nukristų nuo skridinių, nes atstojamoji jėga, veikianti strypelį, didėtų didėjant x ir būtų nukreipta x kryptimi.

17. Ilgio L tašelis juda pastoviu greičiu plokštuma be trinties ir pasiekia ribą, nuo kurios plokštuma tampa šiurkšti, su tašeliu turinti trinties koeficientą μ. Lėtėdamas tašelia sustoja, visu ilgiu dar nepatekdamas į šiurkščiąją plokštumos dalį. Koks turėjo būti tašelio greitis, kad taip sustotų? Per kiek laiko tašelis sustojo?

Ats.: $v < \sqrt{\mu g L}$; $\tau = \dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{L}{\mu g}}$.

Sprendimas

Tašeliui patekus į šiurkščiąją plokštumos dalį, jį pradeda veikti trinities jėga, kuri didėja, vis didesnei tašelio daliai patenkant ant šiurkščiosios plokštumos dalies. Jei pažymėsime šią dalį x (atstumą, kurį įveikia tašelis šiurkščiojoje plokštumos dalyje), tašelio masę – m, tai ši jėga (jos modulis) lygi

$$F_{tr}(x) = \mu\frac{m}{L}xg\ .$$

Toliau pasinaudojame enegijos tvermės dėsniu – tašelio kinetinė energija sunaudojama trinities jėgos darbui, tašeliui įveikiant atstumą l iki sustojimo (pagal sąlygą $l<L$) :

$\dfrac{mv^2}{2} = \displaystyle\int_0^l F_{tr}(x)dx$. Dešinės pusės integralas lygus $\displaystyle\int_0^l F_{tr}(x)dx = \dfrac{\mu m g l^2}{2L}$.

Tuo būdu, $v = l\sqrt{\frac{\mu g}{L}}$. Iš čia $l < L,$ kai $v < \sqrt{\mu g L}$.

Toliau panagrinėjame jau užrašytą trinties jėgos, veikiančios tašelį, išraišką. Pastebėsime, kad jėga turi priešingą ženklą nei x, be to, ji proporcinga šiam x ir yra vienintelė, veikianti tašelį. Tada taip patikslinus lygtis atrodo

$$m\ddot{x} = -\mu \frac{m}{L} g x \, .$$

Tai harmoninių svyravimų lygtis (akivaizdu, kad tik iki to momento, kai tašelis sustoja). Šios lygties sprendinys – sinusinė funkcija su periodu

$T = 2\mu\sqrt{\frac{L}{\mu g}}$. Laikas iki sustojimo $\tau = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{L}{\mu g}}$.

Galima skaičiuoti ir kitu būdu. Bendru atveju

$\tau = \int_0^l \frac{dx}{v(x)}$. Čia l – atstumas, kurį įveikęs šiurkščiojoje plokštumos dalyje tašelis sustoja,

t. y. $l = v\sqrt{\frac{L}{\mu g}}$.

Ttašeliui įveikus šiurkščiosios plokštumos dalį x energijos tvermės dėsnis atrodo taip:

$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv^2(x)}{2} + \frac{m\mu g x^2}{2L}$, iš čia $v(x) = \sqrt{v^2 - \frac{\mu g x^2}{L}} = \sqrt{\frac{\mu g}{L}}\sqrt{a^2 - x^2}$, čia $a^2 = \frac{v^2 L}{\mu g}$.

Tuo būdu,

$\tau = \int_0^l \frac{dx}{v(x)} = \sqrt{\frac{L}{\mu g}}\int_0^l \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$. Žinodami, kad $\int_0^l \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1}\frac{l}{a} = \sin^{-1}\frac{v\sqrt{\frac{L}{\mu g}}}{v\sqrt{\frac{L}{\mu g}}} = \frac{\pi}{2}$,

galiausiai gauname $\tau = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{L}{\mu g}}$.

18. Tarkime, kad į Žemės centrą per jos sukimosi ašį iškastą šachtą krinta akmuo. Laikydami Žemę vienalyčiu rutuliu ir nekreipdami dėmesio į trintį, apskaičiuokite akmens kritimo laiką.

Ats.: $\tau = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R}{g}} \approx 21$ min.

Sprendimas

Apskaičiuokime jėgą, kuria yra veikiamas masės m akmuo, esantis atstumu x nuo Žemės centro. Čia pastebėsime, kad akmenį veikia tik spindulio x Žemės dalis. Jei vidutinis Žemės tankis ρ, tai ši jėga lygi

$$F = -G\frac{\frac{4}{3}\pi x^3 \rho m}{x^2} = -\frac{4}{3}G\pi m\rho x\,.$$

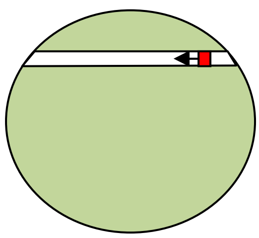
Čia G – gravitacijos konstanta. Tai lygtis $\ddot{x} = -\omega_0^2 x$, o jos sprendinys - sinusinė funkcija, kurios ciklinis dažnis ω_0. Mūsų atveju

$\omega_0 = \sqrt{\frac{4G\pi\rho}{3}}$, todėl jei vyktų svyravimai, visas periodas būtų $T = 2\pi\sqrt{\frac{3}{4G\pi\rho}}$. Taigi, akmuo

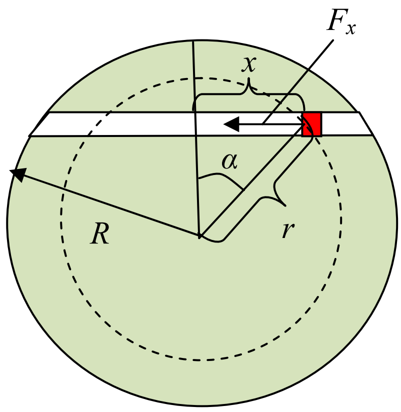
iki Žemės centro kristų $\tau = \frac{T}{4} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$. Žinodami, kad Žemės paviršiuje laisvojo kritimo

pagreitis $g = \frac{4\pi G R\rho}{3}$, gauname $\tau = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R}{g}} \approx 21$ min.

19. Įsivaizduokime, kad Žemėje iškastas tiesus tunelis, kaip parodyta paveiksle. Jei paleistume šiuo tuneliu judėti vagonėlį, veikiamą tik gravitacijos jėgos, nekreipiant dėmesio į trintį, vagonėlis pasiekęs tunelio pabaigą kitame Žemės paviršiaus taške, grįžtų atgal. Raskite tokių svyravimų periodą, tardami, kad Žemės rutulys vienalytis.



Ats.: $T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$.



Sprendimas

Apskaičiuojame jėgą F_x, kuri veikia esantį atstumu r nuo Žemės centro vagonėlį išilgai tunelio, atsižvelgdami į tai, kad viduje rutulio kūną veikia tik ta gravitacijos jėga, kurią sukuria r spindulio rutulys (žiūr. brėž.):

$F_x = -G\dfrac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho m}{r^2}\sin\alpha$, čia G – gravitacijos konstanta, ρ – Žemės tankis,

m – vagonėlio masė.

Žinodami, kad Žemės paviršiuje laisvojo kritimo pagreitis $g = \dfrac{4\pi G R\rho}{3}$, be to,

$x = r\sin\alpha$, jėgos išraišką galime pertvarkyti taip:

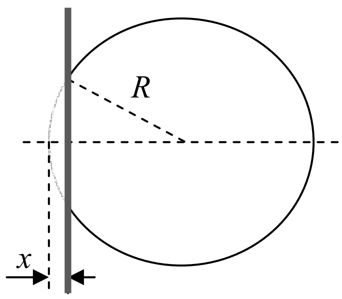
$$m\ddot{x} = -\frac{g}{R}mx\,.$$

Šios lygties sprendinys – sinusinė laiko funkcija, kurios periodas

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}\,.$$

20. Krepšinio kamuolys atsitrenkia į krepšio lentą ir smūgio metu šiek tiek deformuojasi, kaip parodyta pav. Tardami, kad $x << R$ (x – kamuolio deformacijos dydis, R – kamuolio spindulys) ir nekreipdami dėmesio į slėgio kamuolyje pokytį dėl deformacijos, įvertinkite smūgio į lentą laiką τ. Kamuolio masė m, slėgis kamuolyje p, o atmosferos slėgis p_0.

Ats.: $\tau = \pi\sqrt{\dfrac{m}{2\pi R(p-p_0)}}$.



Sprendimas

Apskaičiuojame, kokia jėga sienelė veikia kamuolį. Jei slėgis kamuolyje p, o kamuolio ir sienelės lietimosi plotas – skritulys, kurio spindulys $\sqrt{R^2-(R-x)^2}$, tai ši jėga lygi

$F = -(p-p_0)\pi[R^2-(R-x)^2] \approx -\pi(p-p_0)2Rx$. Čia „-„ reiškia, kad kamuolį veikianti jėga nukreipta priešinga x kryptimi, ir pasinaudota sąlyga $x<<R$. .

Taigi, kamuolio judėjimo lygtis (2-asis Niutono dėsnis) atrodo šitaip:

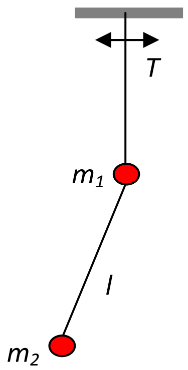
$$m\ddot{x} = -2\pi(p-p_0)Rx \text{ arba } \ddot{x} + \frac{2\pi(p-p_0)R}{m}x = 0\,.$$

Tai lygtis $\ddot{x} = -\omega_0^2 x$, o jos sprendinys - sinusinė funkcija, kurios ciklinis dažnis ω_0. Mūsų atveju

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{2\pi(p - p_0)R}{m}}$. Mus domina tik pusė svyravimų periodo, t. y.

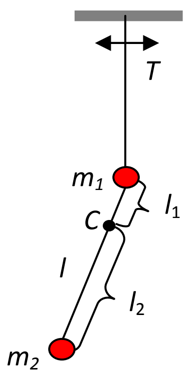
$$\tau = \frac{\pi}{\omega_0} = \pi\sqrt{\frac{m}{2\pi(p - p_0)R}}.$$

21. Nedideli svareliai m_1 ir m_2 surišti ilgio l siūlu, o vienas jų (m_1) kitu siūlu pririštas prie atramos, kuri nedidele amplitude harmoniškai svyruoja horizontalia kryptimi taip, kad viršutinysis siūlas visą laiką išlieka vertikalus. Koks turi būti atramos svyravimų periodas?



$$\text{Ats.}: T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 l}{(m_1 + m_2)g}}.$$

Sprendimas

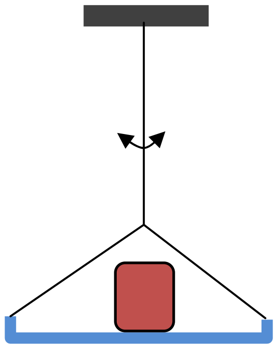


Svyravimai nedideli, todėl vertikalia kryptimi judėjimo galime nepaisyti. Tada svareliai ir siūlas l sudaro uždarą sistemą, kurios masių centro C padėtis, vykstant svyravimams, nekinta. Dabar galime įsivaizduoti,kad turime matematinę svyruoklę, kurią sudaro svarelis m_2 ir ilgio l_2 siūlas, pritvirtintas svarelių sistemos sistemos masių centre C. Belieka surasti l_2 – svarelio m_2 atstumą iki masių centro C.

$$\begin{cases} l_1 + l_2 = l \\ m_1 l_1 = m_2 l_2 \end{cases}.$$

Iš čia $l_2 = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2} l,$ taigi, $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l_2}{g}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_1 l_1}{(m_1 + m_2)g}}.$

22. Ant vielos pakabinta lėkštė, kurios inercijos momentas vertikalios ašies atžvilgiu I_0. Tuščios lėkštės nedidelių sukamųjų svyravimų periodas T_0. Ant lėkštės uždėjus svarstį, skamųjų svyravimų periodas tampa T. Koks svarsčio inercijos momentas tos pačios ašies atžvilgiu?



Ats.: $I = \dfrac{I_0(T^2 - T_0^2)}{T_0^2}.$

Sprendimas

Kai lėkštė tuščia,

$T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{I_0}{\alpha_s}}$, čia $\alpha_s -$ vielos kreipimo momentas.

Kai uždedamas svarstis,

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I_0 + I}{\alpha_s}}$, čia $I -$ svarsčio inercijos momentas. Tuomet $\dfrac{T_0^2}{T^2} = \dfrac{I_0}{I_0 + I}$.

Iš čia randame $I = \dfrac{I_0(T^2 - T_0^2)}{T_0^2}.$

22. Kiek per parą vėluoja švytuoklinis laikrodis, suderintas tiksliam darbui jūros lygyje, pakeltas į h = 200 m aukštį? Nuleistas į h = 200 m gylio šachtą?

Ats.: $\Delta\tau_\text{h} \approx \tau_0 \dfrac{h}{R} = 2{,}7$ s; $\Delta\tau_\text{š} \approx \tau_0 \dfrac{h}{2R} = 1{,}35$ s.

Sprendimas

Svyruoklės periodą nusako formulė $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{\alpha_s}}$. Keičiantis aukščiui, kinta tik kreipimo momentas α_s, kuris proporcingas laisvojo kritimo pagreičiui g, t.y. $\alpha_s = ag$ (čia a – proporcingumo konstanta, nepriklausanti nuo aukščio). Aukštyje h laisvojo kritimo pagreitis $g_h = G\dfrac{M}{(R+h)^2}$, čia M - Žemės masė, R – Žemės spindulys. Taigi, $g_h = G\dfrac{M}{(R+h)^2} = \dfrac{g}{\left(1+\dfrac{h}{R}\right)^2}$. Pasinaudodami šiomis išraiškomis, gauname $T_h = T_0\left(1+\dfrac{h}{R}\right)$. Matome, kad aukštyje h vieno periodo santykinis pailgėjimas lygus h/R. Vadinasi, per parą (ar kitą laiko tarpą) santykinis vėlavimas toks pat, taigi $\Delta\tau_{\mathrm{h}} \approx \tau_0\dfrac{h}{R} = 2{,}7$ s (čia $\tau_0 = 24\cdot 3600$ s - paros trukmė).

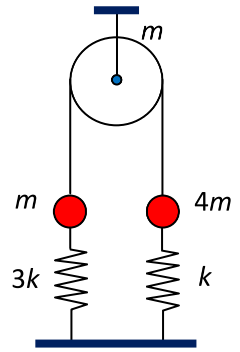
Gylyje h pagreitį lemia ta Žemės dalis, kurios spindulys (R-h), t.y.

$$g_{\check{s}} = G\frac{\frac{4}{3}\pi(R-h)^3\rho}{(R-h)^2} = G\frac{\frac{4}{3}\pi R\rho(R-h)}{R^3} = G\frac{M}{R^2}\left(1-\frac{h}{R}\right) = g\left(1-\frac{h}{R}\right).$$

Taigi, $T_{\check{s}} = T_0\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{h}{R}}} \approx T_0\left(1+\dfrac{h}{2R}\right)$. Vadinasi, per parą santykinis vėlavimas toks pat, todėl

$$\Delta\tau_{\mathrm{h}} \approx \tau_0\frac{h}{2R} = 1{,}35\,\mathrm{s}.$$

23. Per nejudamą vienalytį masės m skridinį permestas lengvas netąsus siūlas, kurio galuose pritvirtinti masių m ir $4m$ svareliai. Prie jų prikabintos spyruoklės, kurios šiek tiek ištempiamos ir kitais galais pritvirtinamos prie horizontaslios plokštumos (žr. brėž). Spyruoklių standumai atitinkamai $3k$ ir k. Kai sistema išvedama iš pusiausvyros ir paliekama pati sau, prasideda svyravimai. Koks šių svyravimų periodas?



Ats.: $T = \pi\sqrt{\dfrac{5{,}5m}{k}}$.

Sprendimas

Sistemos periodą nusako formulė

$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\alpha_s}}$, čia I – sistemos inercijos momentas sukimosi ašies atžvilgiu, α_s – kreipimo momentas.

Svyruojančios sistemos inercijos momentą sudaro skridinio inercijos momentas ir masių m ir $4m$, esančių atstumu R nuo sukimosi ašies (R – tai skridinio spindulys, kuris rodo svarelių atstumą nuo sukimosi ašies ir svyravimų metu svareliams nekinta). Tuo būdu

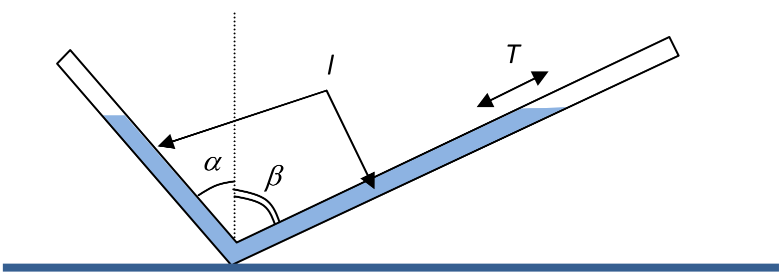
$$I = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 + 4mR^2 = 5{,}5mR^2 .$$

Grąžinantysis jėgos momentas, kuris sitemą grąžina į pusiausvyros padėtį, kai spyruoklės deformuojamos dydžiu x, lygus

$M = (3k + k)R\Delta x = 4kR^2\alpha$, todėl $\alpha_s = 4kR^2$. Vadinasi,

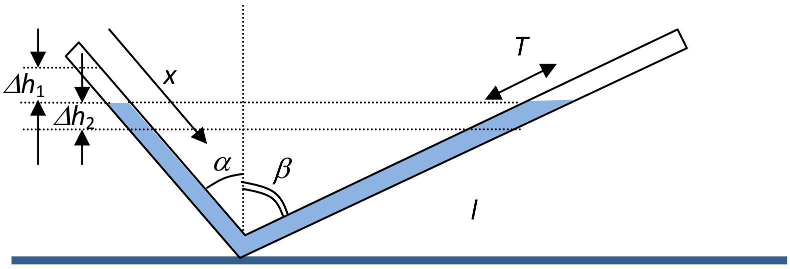
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\alpha_s}} = \pi\sqrt{\frac{5{,}5m}{k}} .$$

24. Idealus skystis supiltas į įtvirtintą horizontalioje plokštumoje sulenktą atvirų galų vamzdelį, kurio pečiai su vertikale sudaro kampus α ir β (žr. brėž.), o visas skysčio vamzdelyje ilgis l. Skystį išvedus iš pusiausvyros ir palikus sitemą pačiai sau, prasideda svyravimai. Koks šių svyravimų periodas T?



Ats.: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g(\cos\alpha + \cos\beta)}}$.

Sprendimas



Tegul skystį išvedame iš pusiausvyros padėties taip, kad kairajame petyje jo lygis pakyla dydžiu Δh_1, o dešinajame nusileidžia dydžiu Δh_2 (žr. brėž.). Tada kairysis petys (o kartu ir visas skystis) bus veikiamas hidrostatiniu slėgiu $\rho g(\Delta h_1+\Delta h_2)$. Pasirinkus analizei x-ašį išilgai, pvz., kairiojo vamzdelio, skystį veikianti jėga išilgai x-ašies lygi $\rho g(\Delta h_1+\Delta h_2)S$ (čia S – vamzdelio skerspjūvis). Ši jėga suteikia visam skysčiui, kurio masė ρlS, pagreitį $\ddot{x}$. Be to, aukščiai Δh_1 ir Δh_2 su skysčio atitinkamomis koordinatėmis susieti sąryšiais

$\Delta h_1 = x\cos\alpha$ ir $\Delta h_{21} = x\cos\beta$ (skystis nespūdus). Taigi, 2-asis Niutono dėsnis skysčiui yra toks:

$\rho lS\ddot{x} = -\rho gSx(\cos\alpha + \cos\beta)$. Čia „-„ paimtas dėl to, kad skysčio lygio kitimas ir jėga yra priešingų krypčių. Ši lygtis – tai harmoninių svyravimų lygtis, kurios sprendinys

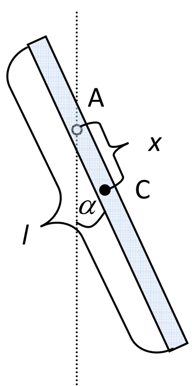
$\omega = \sqrt{\dfrac{g(\cos\alpha+\cos\beta)}{l}}$, todėl periodas $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g(\cos\alpha+\cos\beta)}}$.

25. Kur reikia pragręžti mažą skylutę vienalyčiame l ilgio strypelyje, kad jį pakabinus ant vinutės, tokia fizikinė svyruoklė svyruotų didžiausiu dažniu?

Ats.: Atstumu $x = \dfrac{l}{2\sqrt{3}}$ nuo strypelio masės centro.

Sprendimas

Tegul skylutę reikia pragręžti taše A atstumu x nuo strypelio masės centro C (žr. brėž.).



Tokios fizikinės svyruoklės dažnis nusakomas formule:

$\omega = \sqrt{\dfrac{\alpha_s}{I}}$, čia α_s – svyruoklės kreipimo momentas, o I – jos inercijos momentas A taško atžvilgiu. Jie lygūs:

$\alpha_{bl} = mgx$,

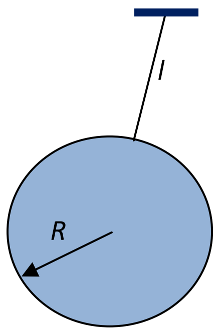
$I = m\left(\dfrac{l_2}{12} + x^2\right)$.

Tuo būdu $\omega = \sqrt{\dfrac{gx}{\dfrac{l^2}{12} + x^2}}$. Dažnis bus maksimalus tokiai x vertei, kuriai pošaknio išvestinė lygi nuliui (šiame taške pošaknis pasiekia maksimumą, taigi ir ω jame bus maksimalus) Tuo būdu

$$\left(\frac{x}{\dfrac{l^2}{12} + x^2} \right)' = \frac{\left(\dfrac{l^2}{12} + x^2 \right) - 2x^2}{\left(\dfrac{l^2}{12} + x^2 \right)^2} = 0, \text{ kai } x = \frac{l}{2\sqrt{3}}.$$

26. Lengvas plonasienis spindulio R sferos formos indas užpildomas vandeniu. Indas kietai sutvirtintas su lengvu ilgio l strypu, o kitas jo galas per šarnyrą pakabintas prie lubų. Kiek kartų pakinta šios svyruoklės nedidelių svyravimų periodas, jei vanduo užšąla?

Ats.: $\dfrac{T_2}{T_1} = \sqrt{1 + \dfrac{2}{5}\left(\dfrac{R}{R+l} \right)^2}$.



Sprendimas

Jei vanduo neužšalęs, tai svyruoklei judant skystis dalyvauja tik slenkamajame judėjime, t.y. svyruoklę galime prilyginti matematinei svyruoklei, kurios taškinė masė sukoncentruota atstumu l+R nuo pakabinimo taško. Tokiai matematinei svyruoklei

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l+R}{g}}.$$

Kai vanduo užąla, svyruoklė virsta fizikine svyruokle, kurios inercijos momentas pakabinimo taško atžvilgiu lygus

$$I = \frac{2}{5} mR^2 + m(l+R)^2 = mR^2 \left[\frac{2}{5} + \left(\frac{l+R}{R} \right)^2 \right].$$

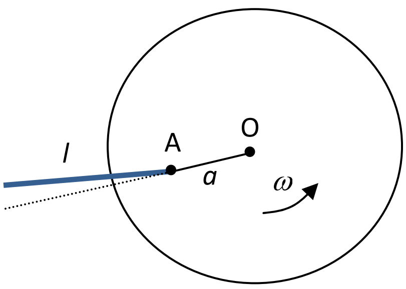
Tokios fizikinės svyruoklės kreipimo momentas $\alpha_s = mg(l+R)$, todėl jos svyravimo periodas

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{mR^2\left[\frac{2}{5}+\left(\frac{l+R}{R}\right)^2\right]}{mg(l+R)}} = 2\pi\sqrt{\frac{1+\frac{2}{5}\left(\frac{R}{l+R}\right)^2}{g}}. \text{ Taigi, } \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{1+\frac{2}{5}\left(\frac{R}{R+l}\right)^2}.$$

27. Ant besisukančio kampiniu greičiu ω horizontalaus disko atstumu a nuo sukimosi ašies O taške A ant šarnyro įtaisytas ilgio l strypelis, kuris diskui sukantis svyruoja OA atžvilgiu nedidele apmlitude. Koks šių svyravimų periodas?

Ats.: $T = \frac{2\pi}{\omega}\sqrt{\frac{2l}{3a}}$.

Sprendimas

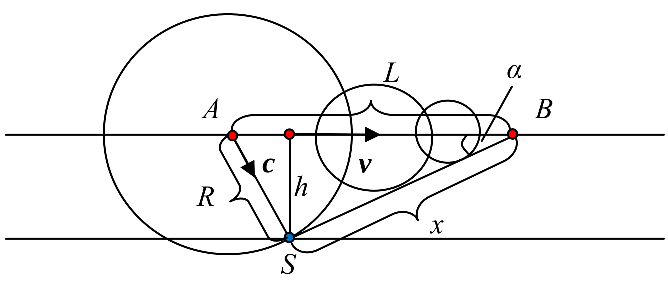


Pakabinimo taškas juda įcentriniu pagreičiu taško O atžvilgiu $a_{\text{įc}} = \omega^2 a$, todėl svyruoklė svyruoja neinercinėje sistemoje, kuri turi pagreitį $-a_{\text{įc}}$. Strypelio inercijos momentas taško O atžvolgiu $I = \frac{ml^2}{3}$, o kreipimo momentas $\alpha_s = \frac{ma_{\text{įc}}l}{2}$. Taigi periodas lygus $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\alpha_s}} = \frac{2\pi}{\omega}\sqrt{\frac{2l}{3a}}$.

28. Viršgarsinis reaktyvinis lėktuvas, kurio greitis v dvigubai didesnis už garso greitį ore (c = 340 m/s), praskrido aukštyje h = 5,0 km virš stebėtojo. Kokiu atstumu buvo lėktuvas nuo stebėtojo, kai jis išgirdo garsą?

Ats.: $x = \frac{vh}{c} = 10 \text{ km}$.

Sprendimas



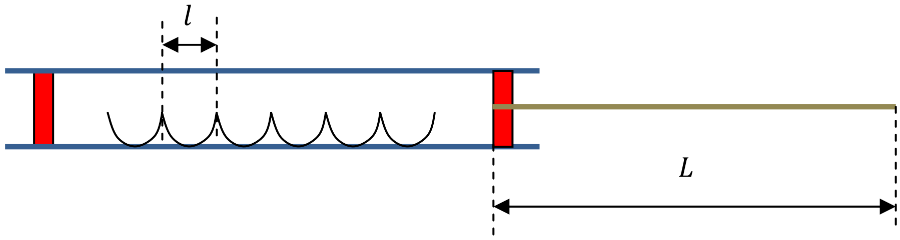
Lėktuvui judant didesniu greičiu už garso greitį, formuojasi kūgio formos fronto banga kaip superpozicija sferinio fronto bangų, spinduliuojamų iš kiekvieno lėktuvo trajektorijos taško (žiūr. brėž., kuriame parodytas pjūvio vaizdas). Kai ši banga pasiekia stebėtoją *S*, jis išgirsta garsą (sprogimo tipo). Tuo metu lėktuvas jau būna toliau nuo stebėtojo atstumu *x* (taškas *B*). Įdomu, kad stebėtojas išgirsta lėktuvo sukeltą garsą, kuris buvo išspinduliuotas anksčiau, nei lėktuvas atsidūrė tiesiai virš stebėtojo (taškas *A*). Toliau iš geometrinės analizės surandame atstumą *x*:

$\sin\alpha = \frac{h}{x} = \frac{R}{L} = \frac{c}{v}$. Tada $x = \frac{vh}{c} = 2h = 10$ km .

29. Kundto įrenginyje trinant plieninį įtvirtintą per vidurį strypą, kurio ilgis L =0,50 m, pabertos stikliniame vamzdyje smiltelės pasiskirsto į sutankėjimų ir praretėjimų sritis. Atstumas tarp gretimų sutankėjimų l = 3,0 cm. Rasti garso greitį pliene, jei garso greitis ore 340 m/s.

$Ats.: v_p = \frac{v_o L}{l} \approx 5700 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$

Sprendimas



Stovinčiosios bangos atveju atstumas tarp pūpsnių oro stulpe lygus pusbangių skaičiui, t.y.

$l = \frac{\lambda_o}{2}$. Garso bangos dažniui, kuris vienodas tiek pliene, tiek ore, $\nu = \frac{1}{T} = \frac{v_o}{\lambda} = \frac{v_o}{2l}$,

čia $v_o = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$

Įtvirtirtintame per vidurį plieniniam strype pagrindinės modos stovinti banga pūpsnius turi ties

atvirais galais, t. y. $L = \frac{\lambda_p}{2} = \frac{v_p}{2\nu}$. Iš čia $v_p = 2L\nu = \frac{v_o L}{l} \approx 5700 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$

30. Virš siauro cilindro formos indo, kurio aukštis H =1,0 m, skamba kamertonas, kurio savasis dažnis $f_0 = 510$ Hz . Į indą palengva pilamas vanduo. Kokiems vandens lygiams inde kamertono skambesys labai sustiprėja? Garso greitis ore c = 340 m/s.

Ats.: 0,167 m; 0,500 m; 0,167 m.

Sprendimas

Skambesys sustuiprėja tada, kai virš vandens esantis oro stulpas atitinka dažnio ν_0 garso stovinčiajai bangai. Šis oro stulpas viename gale yra atviras, o kitame gale – uždaras. Taigi, atvirajame gale formuojasi stovinčiosios bangos pūpsnis, o uždarajame – mazgas. Tuomet stovinčiosios bangos sąlyga

$l_k = \frac{\lambda}{4} + k\frac{\lambda}{2}$, čia $k = 0,1,2,...$, o $\lambda = \frac{c}{f}$, f – bangos dažnis.

Tada vandens stulpo aukštis $h = H - l_k$. Išnagrinėjame konkrečius atvejus.

Jei $k = 0$, tai $l_1 = \frac{\lambda}{4}$, taigi $h_1 = H - \frac{c}{4f_0} = 0{,}833\text{ m}$.

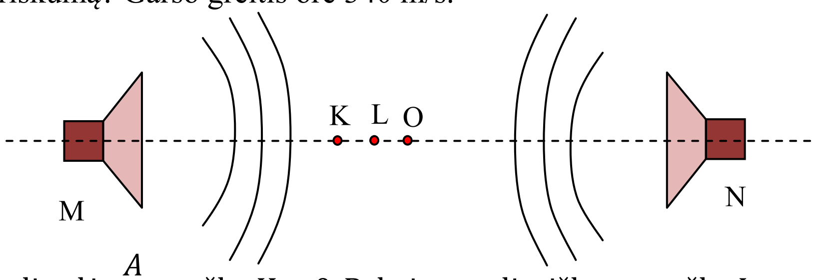
Jei $k = 1$, tai $l_2 = \frac{3}{4}\lambda$, taigi $h_2 = H - \frac{3c}{4f_0} = 0{,}500\text{ m}$.

Jei $k = 2$, tai $l_3 = \frac{5}{4}\lambda$, taigi $h_3 = H - \frac{5c}{4f_0} = 0{,}167\text{ m}$.

Jei $k = 3$, tai $l_4 = \frac{7}{4}\lambda = \frac{7c}{4f_0} = 1{,}17\text{ m} > 1\ m$. Taigi, jei $k \geq 3$, stovinčioji banga neįmanoma.

Vadinasi, garsas sustiprėja, kai vandens stulpo aukštis 0,167 m, 0,500 m ir 0,167 m.

31. Du vienodi garsiakalbiai M ir N prijungti prie įtampos generatoriaus, kurio sinusinių svyravimų dažnis 850 Hz. Atstumas tarp garsiakalbių 3,0 m. Viduriniajame atstumo tarp garsiakalbių taške O svyravimų amplitudė didžiausia ir lygi A (žiūr. brėž.). Kokia svyravimų amplitudė taškuose L ir K, jei OL = 5,0 cm, o OK = 10,0 cm? Koks būtų atsakymas, jei sukeistume vieno iš garsiakalbių prijungimo poliariškumą? Garso greitis ore 340 m/s.



Ats.: Taške L amplitudė $\frac{A}{\sqrt{2}}$, taške K – 0. Pakeitus poliariškumą, taške L amplitudė nepakinta, o taške K ji tampa A.

Sprendimas

Jei taške O amplitudė didžiausia, tai jame susitinka garso bangos (šaltiniai koherentiniai), kurių fazių skirtumas $\Delta\varphi = 0$. Garsiakalbių skleidžiamo garso bangos ilgis

$\lambda = \frac{c}{v} = 0{,}40$ m . Vadinasi, taškai L ir K nutolę nuo O atitinkamai atstumu $\frac{\lambda}{8}$ ir $\frac{\lambda}{4}$.

Jei interferuojančios dvi bangos aprašomos , pvz., $y_1 = \frac{A}{2}\cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}x\right)$,

$y_2 = \frac{A}{2}\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)$, tai turime ieškoti jų sumą $y = y_1 + y_2$.

Pasinaudoję trigonometriniu sąryšiu $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ ir

pasirinkus koordinačių pradžią taške O, gauname $y = A\cos\omega t\cos\frac{2\pi x}{\lambda}$. Taigi,

taške L $x = \frac{\lambda}{8}$, todėl amplitudė lygi $A\cos\frac{\pi}{4} = \frac{A}{\sqrt{2}}$. Taške K amplitudė lygi $A\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

Sukeitus vieno iš garsiakalbių poliariškumą, jo skleidžianmų bangų fazė kinta priešinga, t.y. viena

iš bangų, pvz, y_2 tampa $y_2 = -\frac{A}{2}\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)$. Dabar pasinaudojame trigonometriniu

sąryšiu $\cos\alpha - \cos\beta = 2\,\mathrm{A}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$. Taigi, šiuo atveju $y = -A\sin\omega t\sin\frac{2\pi x}{\lambda}$,

todėl taške L $x = \frac{\lambda}{8}$. Tuo būdu, amplitudė lygi $A\sin\frac{\pi}{4} = \frac{A}{\sqrt{2}}$. Taške K amplitudė lygi $A\sin\frac{\pi}{2} = A$.

32. Povandeninis laivas, judantis 8,0 m/s greičiu, siunčia ultragarso signalą, kurio dažnis 25 kHz. Signalas atsispindi nuo kliūties ir grįžta atgal. Rasti priimamo ir siunčiamo dažnio pokytį. Garso greitis vandenyje 1510 m/s.

Ats.: $\Delta f = f_0\frac{2v}{c-v} = 270$ Hz .

Sprendimas

Į kliūtį dėl Doplerio reiškinio patenka didesnio dažnio signalas, t.y.

$f_1 = \frac{f_0}{c - v_š}$, čia $f_0 -$ siunčiamas dažnis, $c -$ garso greitis, $v_š -$ šaltinio greitis.

Povandeniniame laive atsispindėjęs dažnio f_1 signalas dėl to paties Doplerio reiškinio priimamas dar didesnio dažnio f_2, nes šiuo atveju laivas yra judantis į šaltinį imtuvas, taigi

$fv_2 = f_1(c + v_i)$, čia v_i – imtuvo greitis. Mūsų atveju $v_š = v_i = v$. Taigi,

$\Delta f = f_2 - f_1 = f_0\frac{2v}{c-v} = 270$ Hz.

33. Policijos automobilis, įjungęs sireną, kurios dažnis $f_0 = 400$ Hz, važiuoja $u = 200\ \mathrm{km/h}$ greičiu. Priekyje šalikelėje stovi kitas policijos automobilis su tokia pat įjungta sirena. Kiekvienas iš policninkų skiria kitos mašinos sireną, nes jie abu be savo automobilio sirenos girdi didesnio dažnio kolegos automobilio sireną. Kuris iš policninkų girdi aukštesnio tono signalą? Kokius dažnius girdi kiekvienas policninkas? Garso greitis ore c = 340 m/s.

Ats.: Aukštesnį toną girdi stovinčio automobilio policninkas: $f_s = 478$ Hz $> \ f_j = 465$ Hz.

Sprendimas

Apskaičiuojame, kokio dažnio signalą priima stovintis policninkas, jei sirenos dažnis f_0. Iš Doplerio reiškinio, kuomet juda šaltiis, stovintis imtuvas priima dažnį

$$f_s = f_0 \frac{c}{c - v_š} = 478\ \mathrm{Hz}\,.$$

Važiuojantis policninkas kaip judantis imtuvas priima dažnį

$$f_j = f_0 \frac{c + v_i}{c} = 465\ \mathrm{Hz}\,.\ \text{Taigi, aukštesnį toną girdi stovičio automobilio policninkas.}$$

34. Povandeninis laivas, grimzdamas vertikaliai žemyn, siunčia dugno kryptimi trumpus hidrolokatoriaus garso impulsus, kurių trukmė τ_0. Atsispindėjusių signalų, kuriuos registruoja laivo hidrolokatorius, impulsų trukmė τ. Koks laivo grimzdimo greitis v_x, jei garso greitis vandenyje c?

Ats.: $v_x = \dfrac{\tau_0 - \tau}{\tau_0 + \tau} c\,.$

Sprendimas

Dugno atžvilgiu laivo paiųstas impulsas, kurio trukmė τ_0, sutrumpėja, nes per tą laiką laivas spės nusileisti dydžiu $v_x\tau_0$, t.y. atstumas, kurį impulsas įveikia per savo naująją trukmę, yra $l = (c - v_x)\tau_0$. Tokį “ilgį” jis “užima” erdvėje. Taigi, šio impulso trukmė

$$\tau_1 = \frac{(c - v_x)\tau_0}{c}.$$

Šis impulsas priimančio laivo atžvilgiu sklinda greičiu $(c + v_x)$. Taigi, laivo atžvilgiu impulsas turi trukmę

$$\tau = \frac{l}{c + v_x} = \frac{c - v_x}{c + v_x}\tau_0.\ \text{Iš čia surandame}\ v_x = \frac{\tau_0 - \tau}{\tau_0 + \tau} c\,.$$