Uždaviniai

(2009 m. sausio 12-18 d.)

1. Krovinys, kurio masė 1,00 kg, pakabintas ant spyruoklinių svarstyklių (dinamometro) ir keliamas į viršų. Pradžioje judėjimas tolygiai greitėjantis, po to tolyginis, galiausiai tolygiai lėtėjantis. Absoliuti pagreičio, kuriuo juda krovinys, vertė vienoda ir lygi 1,00 m/s^2. Ką rodo dinamometras kiekvienu iš šių trijų etapų, jei jo skalė sugraduota jėgos kilogramais? Laisvojo kritimo pagreitį laikyti 9,81 m/s^2.

Ats.: 1,10 kG; 1,00 kG; 0,898 kG.

Sprendimas

Pastebėsime, kad jėgos kilogramas (kG) – tai jėga, kuri suteikia 1 kg masės kūnui laisvojo kritimo pagreitį *g*. Tuo būdu, 1 kG = 9,81 N.

Užrašome antrąjį Niutono dėsnį kiekvienam etapui. Kylant į viršų greitėjant

$T_g - mg = ma$. Iš čia $T_g = m(g+a) = 1{,}00(9{,}81 + 1{,}00) = 10{,}8\text{N} = 1{,}10\text{kG}$.

Judant tolygiai

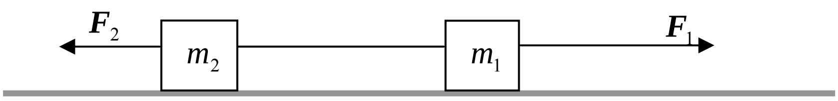
$T_t - mg = 0$, t.y. $T_t = mg = 1{,}00 \cdot 9{,}81 = 9{,}81\text{N} = 1{,}00\text{kG}$.

Tolygiai lėtėjančio judėjimo atveju

$mg - T_l = ma$. Iš čia

$$T_l = m(g-a) = 1{,}00(9{,}81 - 1{,}00) = 8{,}81\text{N} = 0{,}898\text{kG}$$

2. Du masių m_1 ir m_2 tašeliai sujungti lengvu siūlu, kuris išlaiko *T* įtempimo jėgą. Kūnus veikia jėgos $F_1 = 3\alpha t$ ir $F_2 = \alpha t$ (čia α - pastovus koeficientas, o *t* – jėgų veikimo laikas). Suraskite, kuriuo laiko momentu siūlas nutrūks.



Ats.: $t = \dfrac{T(m_1 + m_2)}{\alpha(m_1 + 3m_2)}$.

Sprendimas

Užrašome antrąjį Niutono dėsnį sistemai:

$F_1 - F_2 = (m_1 + m_2)a$,

$3\alpha t - \alpha t = (m_1 + m_2)a$, iš čia

$$a = \frac{2\alpha t}{m_1 + m_2}.$$

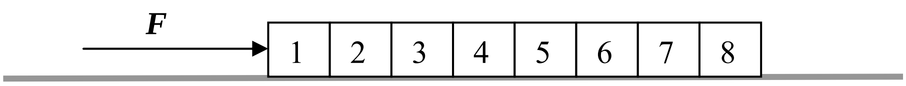
Siūlo įtempimo jėgą *N* surandame iš antrojo Niutono dėsnio lygties vienam iš tašelių, pvz., 1-ajam:

$3\alpha t - N = m_1 a$.

Įrašydami *a* išraišką ir maksimalią įtempimo jėgą $N = T$, gauname

$$t = \frac{T(m_1 + m_2)}{\alpha(m_1 + 3m_2)}.$$

3. Ant horizontalaus stalo į eilę sudėti 8 vienodi kubeliai, kurių kiekvieno masė $m = 1{,}0\text{kg}$. Pirmąjį iš kubelių eilės veikia pastovi jėga $F = 10{,}0\text{N}$ (žiūr. brėž.). Rasti pagreitį, kuriuo judės kubeliai, jei jų trinties į stalą koeficientaas $\mu = 0{,}10$. Kam lygi jėga, kuria 5-asis kubelis veikia 6-ąjį kubelį.



Sprendimas

Užrašome antrąjį Niutono dėsnį kubelių sistemai:

$$F - 8\mu mg = 8ma$$. Iš čia

$$a = \frac{F - 8\mu mg}{8m} = 0{,}25\,\mathrm{m/s^2}.$$

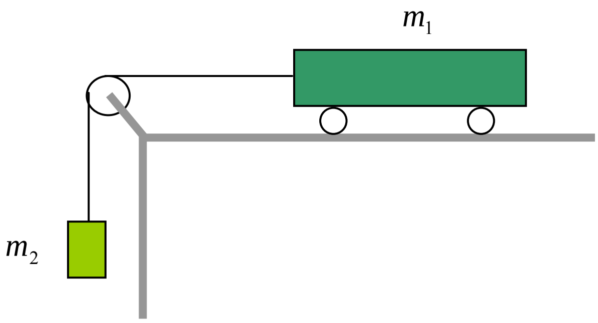
Pagal trečiąjį Niutono dėsnį jėga, kuria 5-asis kubelis veikia 6-ąjį, lygi jėgai, kuria 6-asis kubelis veikia 5-ąjį, tegul tai jėga *N*. Panagrinėkime pirmųjų 5 kubelių sistemą, kuriai galime užrašyti antrąjį Niutono dėsnį:

$F - F_{5-6} - 5\mu mg = 5ma$. Įrašę jau gautą a išraišką randame

$$F_{5-6} = \frac{3}{8}F = 3{,}75\,\mathrm{N}\ .$$

4. Antrasis Niutono dėsnis dažnai iliustruojamas tokiu bandymu. Masės m_1 vežimėlis išjudinamas pradžioje masės m_2 svareliu, po to svareliu, kurio masė *n* (pvz., $n = 2$) kartų didesnė.

a) ar galima teigti, kad nesant trinties, pagreitis antruoju atveju *n* kartų didesnis, nei pirmuoju?
b) Koks pagreičių santykis, jei $m_1 = 200\mathrm{g}$, $m_2 = 30\mathrm{g}$, o trinties koeficientas tarp stalo ir vežimėlio $\mu = 0{,}10$?
c) Kokiam trinties koeficientui antruoju atveju pagreitis bus *n* kartų didesnis, nei pirmuoju?



Sprendimas

a) Užrašome antrąjį Niutono dėsnį svareliui m_2 ir nm_2:

$$m_2 g = (m_1 + m_2)a_1$$
$$nm_2 g = (m_1 + nm_2)a_2$$

Iš čia:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{n(m_1 + m_2)}{m_1 + nm_2} \neq n.$$

b) Vėlgi užrašome antrąjį Niutono dėsnį svareliui m_2 ir nm_2, kai yra trintis:

$$m_2 g - \mu m_1 g = (m_1 + m_2)a_1$$
$$nm_2 g - \mu m_1 g = (m_1 + nm_2)a_2$$

Iš čia

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{(nm_2 - \mu m_1)(m_1 + m_2)}{(nm_2 + m_1)(m_2 - \mu m_1)} = 3{,}54.$$

c) Iš paskutiniosios pagreičių santykio išraiškos gauname:

$$\frac{a_2}{a_1} = n = \frac{(nm_2 - \mu_1 m_1)(m_1 + m_2)}{(nm_2 + m_1)(m_2 - \mu_1 m_1)}.$$

Iš čia

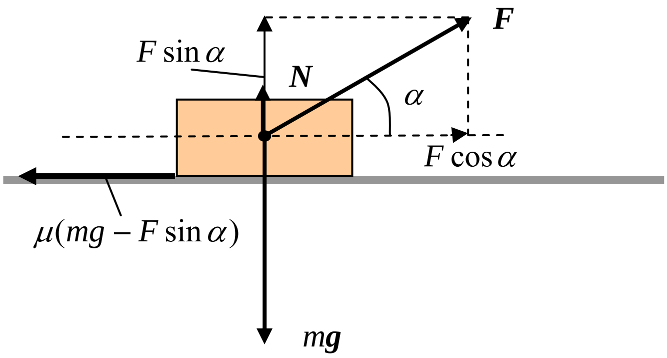
$$\mu_1 = \frac{nm_2^2}{m_1\left[m_2(n+1)+m_1\right]} = 0{,}031.$$

5. Kokia minimalia jėga ir kaip reikėtų veikti masės $m = 100\text{kg}$ dėžę, padėtą ant horizontalios plokštumos, norint ją paslinkti? Trinties koeficientas tarp dėžės ir plokštumos $\mu = 0{,}30$.

Ats.: $F_{\min} = \dfrac{\mu mg}{\sqrt{1+\mu^2}}$. Kampas $\alpha = arctg\mu$.

Sprendimas

Turime traukti dėžę jėga, nukreipta tam tikru kampu α :



Dėžės pajudėjimo momentu galime užrašyti:

$$\mu(mg - F\sin\alpha) = F\cos\alpha.$$

Beje, vertikalia kryptimi kūną veikianti suminė jėga lygi 0, t.y. $mg - F\sin\alpha = N$.

Taigi,

$$F = \frac{\mu mg}{\mu\sin\alpha + \cos\alpha}.$$

Randame jėgos ekstremumą (minimumą) kampo α atžvilgiu, prilygindami $\dfrac{dF}{d\alpha}$ nuliui:

$$\frac{dF}{d\alpha} = \frac{\mu mg}{(\mu\sin\alpha + \cos\alpha)^2}(\mu\cos\alpha - \sin\alpha) = 0, \text{ kai}$$

$$\mu\cos\alpha - \sin\alpha = 0, \text{ t.y.}$$

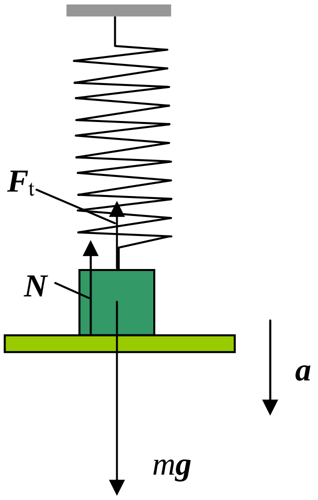
$$tg\alpha = \mu.$$

Tuomet ši minimali jėga lygi:

$$F_{\min} = \frac{\mu mg}{\mu\sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{\mu mg}{\mu\dfrac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}} = \frac{\mu mg}{\sqrt{1+\mu^2}} = 282\,\mathbf{N}.$$

6. Ant padėklo guli masės *m* krovinys, kuris lengva standumo *k* spyruokle pritvirtintas prie lubų. Pradiniu momentu spyruoklė neištempta. Padėklas pradedamas leisti žemyn pastoviu pagreičiu *a*. Per kiek laiko *t* krovinys atitrūksta nuo padėklo?

Sprendimas



Kol krovinys nuo padėklo dar neatitrūkęs, krovinį veikia 3 jėgos: sunkio *mg*, spyruoklės tempimo $F_t = kx$ ir padėklo reakcijos jėga *N*. Užrašome antrąjį Niutono dėsnį kroviniui:

$$mg - N - kx = ma\ .$$

Atitrūkimo momentu $N = 0$, taigi tuomet spyruoklė bus išsitempusi dydžiu x_0. Jį iš lygties nesunkiai surandame:

$$x_0 = \frac{m(g-a)}{k}.$$

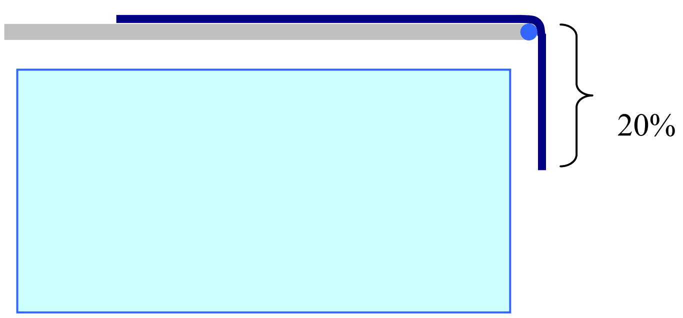
Laiką, per kurį padėklas įveikia šį atstumą, randame iš lygties:

$$x_0 = \frac{at^2}{2}.$$ Taigi,

$$t = \sqrt{\frac{2m(g-a)}{k}}\ .$$

7. Ant horizontalaus stalo padėta ilgia vienalytė grandinė. Ji pradeda slinkti stalu, kai jos dalis, sudaranti 20 % viso ilgio, yra nusvirusi nuo stalo krašto. Koks trinities tarp stalo ir grandinės koeficientas?

Sprendimas



Tegul $k = 20\% = 0{,}2$.

Jei trinties tarp grandinės ir stalo koeficientas μ , grandinės masė M, jos ilgis L, slydimas prasidės, kai bus tenkinama lygtis:

$$\frac{M}{L} Lk \cdot g = \mu \frac{M}{L} L(1-k)g \ .$$

Iš čia $\mu = \dfrac{k}{1-k} = 0{,}25$.

8. Ant stalo padėta masės m_1 = 3,0 kg lenta, ant kurios uždėtas masės m_2 = 1,0 kg tašelis. Kokia horizontalia jėga reikia veikti lentą, kad tašelis nuslystų nuo lentos? Trinties koeficientas tarp tašelio ir lentos μ_1 = 0,15, o tarp lentos ir stalo μ_2 = 0,25.

Sprendimas

Kai tašelis slysta lentos atžvilgiu, tarp lentos ir tašelio veikia trinties jėga $F_{tr1} = \mu_1 m_2 g$. Tokio dydžio jėga suteiks tašeliui pagreitį, ir tokio pat dydžio jėga priešinsis lentos judėjimui, t.y. ji bus priešingos krypties tai jėgai $\boldsymbol{F}$ (ją turime rasti), kuria veikiama lenta. Trinties jėga tarp lentos ir stalo taip pat veiks priešinga $\boldsymbol{F}$ kryptimi ir lygi $F_{tr2} = \mu_2 (m_1 + m_2)g$. Tuomet lentai galime užrašyti 2-ąjį Niutono dėsnį:

$$m_1 a_1 = F = \mu_1 m_2 g - \mu_2 (m_1 + m_2) g \ .$$

Šis dėsis tašeliui atrodo taip:

$$m_2 a = \mu_1 m_2 g \ .$$

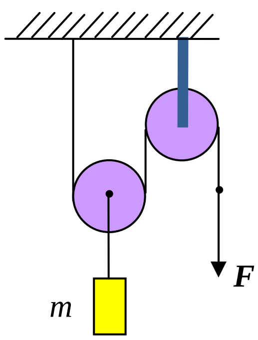
Kad tašelis nuslystų nuo lentos, būtina, kad $a_1 > a$. Ribiniu atveju, kai $a_1 = a$,

$$\mu_1 m_1 g = F - \mu_1 m_2 g - \mu_2 (m_1 + m_2) g \ .$$

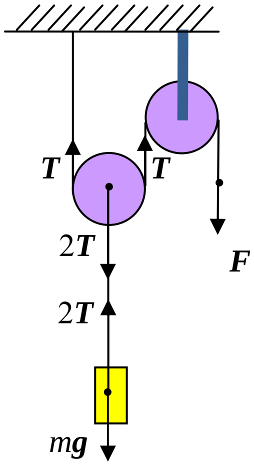
Išsprendę gauname

$$F > (\mu_1 + \mu_2)(m_1 + m_2) g = 15{,}7\text{N} \ .$$

9. Krovinys, kurio masė m = 40,0 kg, keliamas į viršų sistema, kurią sudaro judamas ir nejudamas skridiniai (žiūr. brėž.). Rasti pagreitį, kuriuo juda krovinys, ji virvės, permestos per nejudamą skridinį, galą veikia jėga F = 250 N. Į virvės ir skridinių masę nekreipti dėmesio.



Sprendimas



Pastebėję, kad $T = F$, užrašome 2-ąjį Niutono dėsnį kroviniui:

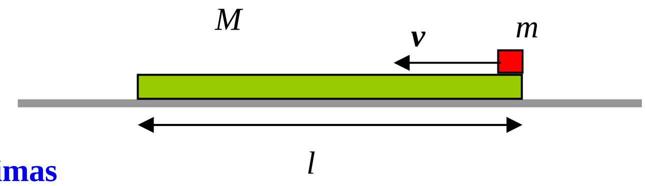
$$2F - mg = ma.$$

Iš čia surandame pagreitį a:

$$a = \frac{2F}{m} - g = \frac{2 \cdot 250}{40{,}0} - 9{,}8 = 2{,}7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

10. Gulinčios ant lygaus horizontalaus stalo masės M ir ilgio l lentos galo padėtas nedidelis masės m kūnas. Kokį horizontalų greitį v reikia suteikti smūgiu kūnui m (žiūr. brėž.), kad jis nuslystų nuo lentos? Trinties koeficientas tarp lentos ir kūno μ, o trinties į stalą galima nepaisyti.

Ats.: $v = \sqrt{2\mu g l\left(1 + \dfrac{m}{M}\right)}$.



Sprendimas

Imdami ribinį atvejį, kai kūnas m yra pačiame lentos gale ir ten sustoja, galime taikyti kūno m ir lentos M uždarajai sistemai judesio kiekio ir energijos tvermės dėsnius:

$$\begin{cases} mv = (M + m)u \\ \mu mgl = \dfrac{mv^2}{2} - \dfrac{(M + m)u^2}{2} \end{cases}.$$

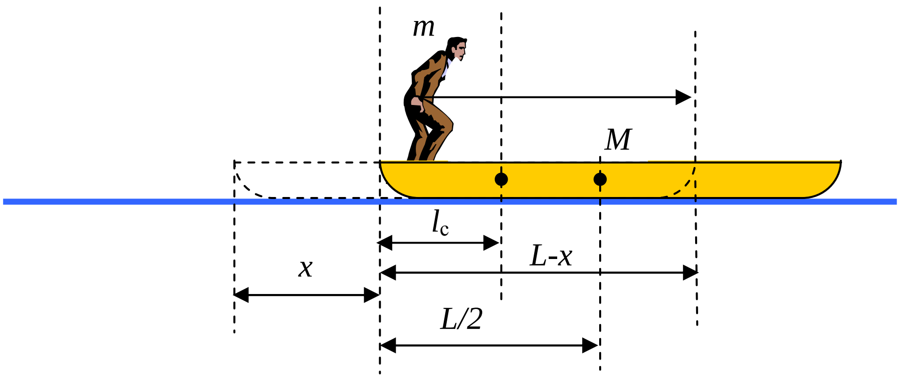
Iš šių lygčių eliminavę u, gauname

$$v = \sqrt{2\mu g l\left(1 + \frac{m}{M}\right)}.$$

11. Valtis su žmogumi stovi nejudėdama ežere. Rasti, kiek pasislenka valtis žmogui pereinant iš vieno valties galo į kitą. Žmogaus masė $m = 80\text{kg}$, valties masė $M = 150\text{kg}$, o jos ilgis $L = 4{,}0\text{m}$.

Sprendimas

Tegul pradžioje žmogus yra kairėje valties pusėje.



Pasirinkę atskaitos tašką kairįjį valties kraštą, randame valties ir žmogaus sistemos masių centrą:

$$M\frac{L}{2} + m\cdot 0 = (m+M)l_c,$$

iš čia $l_c = \dfrac{M}{2(M+m)}L$.

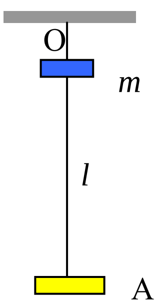
Žmogui pereinant iš vieno valties galo į kitą, masių cantro padėtis nekinta, nes trintis tarp valties ir vandens labai maža, ir nagrinėjama sistema gali būti laikoma kaip uždaroji. Taigi, dabar masių centro padėtį galima nusakyti lygtimi:

$$(m+M)l_c = m(l-x) + M\left(\frac{L}{2} - x\right).$$

Iš šių dviejų lygčių gauname

$$x = \frac{m}{m+M}L = 1{,}4\text{m}.$$

12. Lygios ilgio l ir standumo k gumos atkarpa vienu galu pritvirtinta taške O. Kitame jos gale yra pritvirtintas ribotuvas A. Iš taško O gumos atkarpa pradeda kristi masės m žiedas. Rasti didžiausią gumos pailgėjimą, jei į gumos ir ribotuvo mases bei trintį galima neatsižvelgti.



Sprendimas

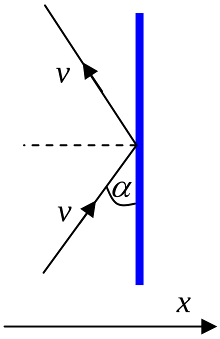
Užrašome energijos tvermės dėsnį dviem kraštinėms žiedo padėtims:

$$mg(l+x)=\frac{kx^2}{2}.$$

Iš čia $x=\frac{mg}{k}\left(1+\sqrt{1+2\frac{kl}{mg}}\right)$.

13. Vandens čiurkšlė, kurios skerspjūvis $S=6{,}0\mathrm{cm}^2$, atsitrenkia į sieną kampu $\alpha=30°$ ir tampriai atšoka, neprarasdama greičio. Rati jėgą, kuria veikiama siena, jei čiurkšlės greitis $v=12{,}0\mathrm{m/s}$.

Sprendimas



Jei nagrinėtume čiurkšlės trajektoriją kaip parodyta brėžinyje, *x*-kryptimi judesio kiekio pokytis lygus

$$\Delta p=2\Delta mv\sin\alpha.$$

Jėga, veikianti sieną, atsiranda dėl to, kad šis judesio pokytis įvyksta per tam tikrą laiką Δt, t.y.

$$F\Delta t=2\Delta mv\sin\alpha\text{. Taigi } F=2\frac{\Delta mv\sin\alpha}{\Delta t}.$$

Bet $\frac{\Delta m}{\Delta t}=\frac{S\Delta x\rho}{\Delta t}=Sv\rho$ (čia ρ - vandens tankis). Tuomet $F=2Sv^2\rho\sin\alpha\approx 86{,}4\mathrm{N}$

14. Kam lygus matematinės svyruoklės, kurios ilgis *l*, svyravimo periodas šiais atvejais: 1) lifte, kuris kyla su pagreičiu *a*; 2) lifte, kuris leidžiasi su pagreičiu *a*; 3) vagone, judančiame horizontalia kryptimi su pagreičiu *a*; 4) vežimėlyje, kuris be trinties leidžiasi nuožulniąja plokštuma, sudarančia kampą α su horizontu?

Ats.: 1) $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}}$. 2) $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g-a}}$; 3) $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2+a^2}}}$; 4) $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g\cos\alpha}}$.

Sprendimas

Visais atvejais matematinė svyruoklė svyruoja neinercinėje sistemoje, kurioje reiškinius galime aprašyti inercinės sitemos lygtimis, bet naudoti charakteringą pagreitį $\boldsymbol{g}'$. Pagal Dalambero principą šis pagreitis $\boldsymbol{g}' = \boldsymbol{g} - \boldsymbol{a}$, čia $\boldsymbol{a}$ – neinercinės sistemos pagreitis inercinės sistemos atžvilgiu.

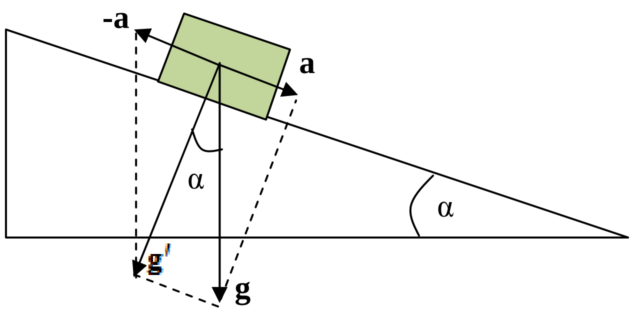
1-uoju atveju $g' = g + a$, todėl $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g+a}}$.

2-uoju atveju $g' = g - a$, todėl $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g-a}}$.

3-uoju atveju $g' = \sqrt{g^2 + a^2}$, todėl $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g'}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{\sqrt{g^2+a^2}}}$.

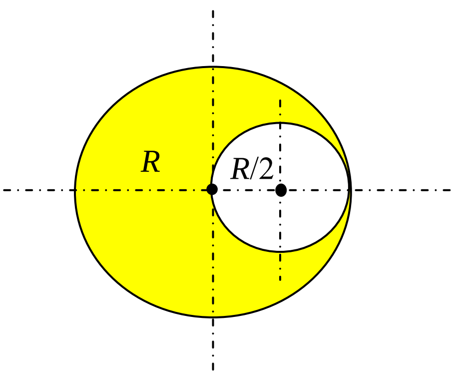
4-uoju atveju vežimėlio pagreitis $a = g\cos\alpha$.

4-uoju atveju vežimėlis juda su pagreičiu $a = g\sin\alpha$.



Taigi $g' = g\cos\alpha$, todėl $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g\cos\alpha}}$.

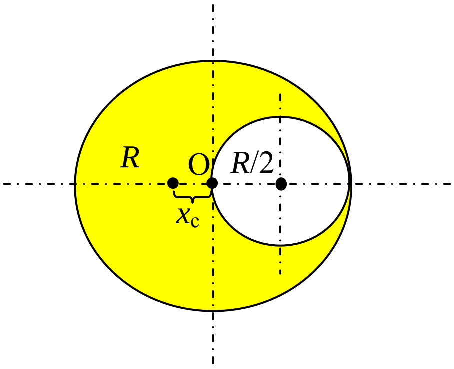
15. Rasti vienalyčio spindulio *R* disko, turinčio spindulio *R*/2 kiaurymę, kurios centras yra atstumu *R*/2 nuo disko centro, masių centrą.



Sprendimas

Galime įsivaizduoti, kad užpildome kiaurymę iki vienalyčio disko, kurio masių centras yra geometrinis skritulio centras O.

Užrašome jėgos momentų lygybę disko centro O atžvilgiu kiaurymės formos figūrai ir ieškomai figūrai:



$\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \left[\pi R^2 - \pi\left(\frac{R}{2}\right)^2\right]\cdot x_c$. Iš čia $x_c = \frac{R}{6}$.