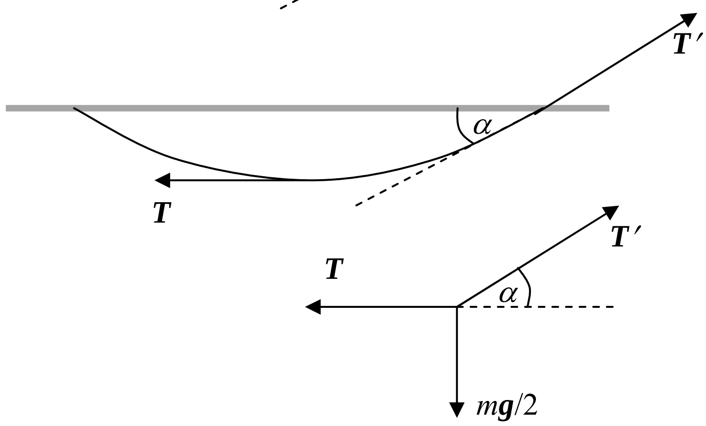
Fizikos olimpas
Sesija 2009 03 12-18

1. Grandinė pakabinta ant lubų taip, kad ji ties galais su horizontu sudaro kampą α. Grandinės masė m. Kokios grandinės įtempimo jėgos jos centre ir galuose?

Sprendimas



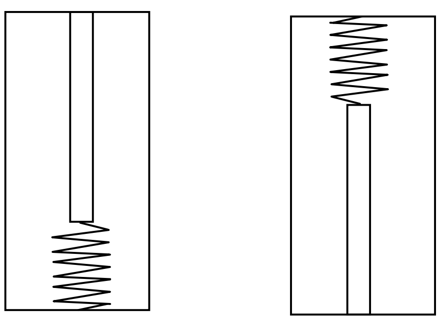
Padalinkime grandinę simetriškai per pusę ir panagrinėkime vieną jos dalį. Ją veikia trys jėgos: sunkio jėga, lygi $mg/2$ ir nukreipta žemyn, pakabinimo taške jėga, sudarančia kampą α su horizontu (T') ir horizntali jėga kitame grandinės dalies gale (T) (žr. brėž.). Jėgos grandinės dalies galuose lygios grandinės įtempimo jėgoms tuose taškuose. Grandinė statinėje pusiausvyroje, todėl suminė jėga turi būti lygi 0. Atidedame šias jėgas iš vieno taško ir užrašome lygtis horizontaliajai ir vertikaliajai projekcijoms:

$$\begin{cases} \dfrac{mg}{2} = T'\sin\alpha \\ T = T'\cos\alpha \end{cases}$$

Iš čia surandame:

$$T = \frac{mg}{2tg\alpha} \text{ ir } T' = \frac{mg}{2\sin\alpha}.$$

2. Dėžėje tarp jos horizontalių sienelių įsprausta spyruoklė su strypeliu, kurio masė m = 1,0 kg (žr. brėž. kairėje). Apvertus dėžę, strypelis į jos sienelę slegia α = 1,4 didesne jėga (brėž. dešinėje). Kokia jėga slegia strypas sienelę abiem atvejais?



Sprendimas

Abiem avejais yra statinė jėgų pusiausvyra. Taigi, pvz., strypelį veikiančių jėgų suma lygi 0. Pirmuoju atveju $mg + f_1 - k\Delta l = 0$ (čia f_1 – jėga, kuria sienelė veikia strypelį – ji lygi jėgai, kuria strypelis slegia sienelę, Δl - spyruoklės sutrumpėjimas, k – spyruoklės standumas).

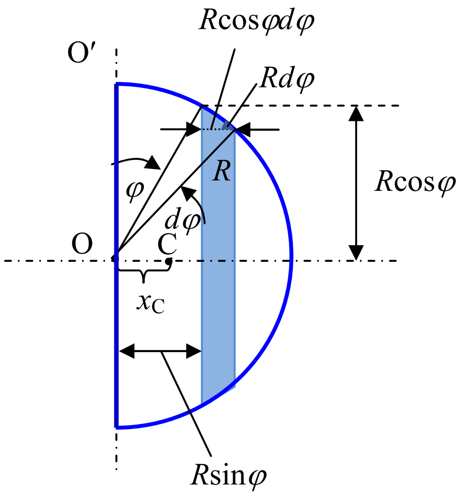
Apvertus dėžę, suminė jėga taip pat lygi 0, bet jėgų pusiausvyra šiuo atveju nusakoma lygtimi $mg + k\Delta l - f_2 = 0$ (čia f_2 - jėga, kuria sienelė veikia strypelį – ji lygi jėgai, kuria strypelis slegia sienelę). Pasinaudoję tuo, kad $f_2 = \alpha f_1$, išsprendžiame lygtis ir surandame, kad

$$f_1 = \frac{2mg}{\alpha - 1} = 49\,\text{N},\ f_2 = \alpha f_1 = 69\ \text{N}.$$

3. Rasti vienalyčio spindulio R pusrutulio masės centrą.

Sprendimas

Sudaliname pusrutulį į plonus skritulėlius. Pasirenkame integravimo kampą φ, kuris turi kisti ribose nuo 0 iki $\pi/2$, kad būtų apimtas visas pusrutulio tūris (žr. pusrutulio pjūvio brėž.).

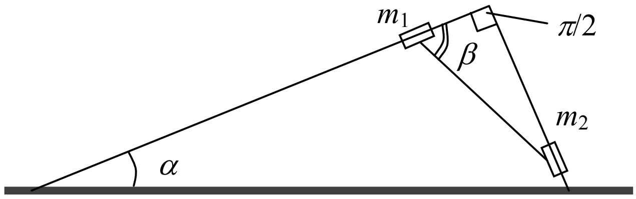


Tuomet $mx_C = \int_0^R xdm$. Čia m – pusrutulio masė, o dm – pasirinkto skritulėlio masė (patamsinta rutulio skerspjūvio sritis brėžinyje). Pusrutulis vienalytis, todėl skritulėlio masė lygi jo tūrio ir pusrutulio medžiagos tankio ρ sandaugai. Taigi,

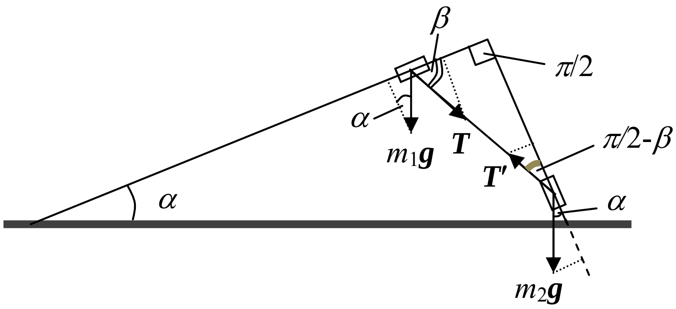
$$\frac{2}{3}\pi R^3 \rho x_C = \int_0^{\pi/2} \pi R^2 \cos^2\varphi R\cos\varphi d\varphi \rho R\sin\varphi,$$

$$\frac{2}{3}\pi R^3 \rho x_C = \rho R^4 \rho \int_0^{\pi/2} \cos^3\varphi \sin\varphi d\varphi.$$ Suintegravę apskaičiuojame: $x_C = \frac{3R}{8}$.

4. Iš vielos sulenktas status kampas ir vertikaliai įtvirtintas ant horizontalios plokštumos, kaip parodyta brėžinyje. Ant vielos užmauti masių m_1 = 100 g ir m_2 = 300 g nedideli ritinėliai, kurie gali ja judėti be trinties. Vielos dalis, ant kurios slankioja mažesnysis ritinėlis, su horizontu sudaro kampą α = 30°. Sujungus ritinėlius netąsiu siūlu, nusistovi pusiausvyra. Kokia siūlo įtempimo jėga ir koks kampas β?



Sprendimas



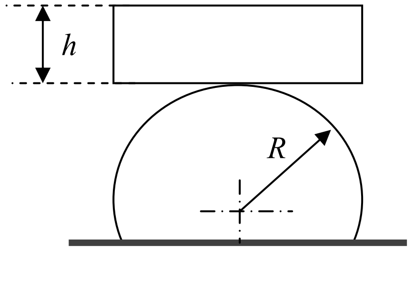
Siūlo tempimo jėga visur vienoda, t.y. $|\boldsymbol{T}| = |\boldsymbol{T}'|$. Užrašome jėgų lygybes išilgai kiekvienos vielos dalies:

$$\begin{cases} m_1 g \sin\alpha = T\cos\beta \\ m_2 g\cos\alpha = T\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \beta\right) \end{cases}.$$

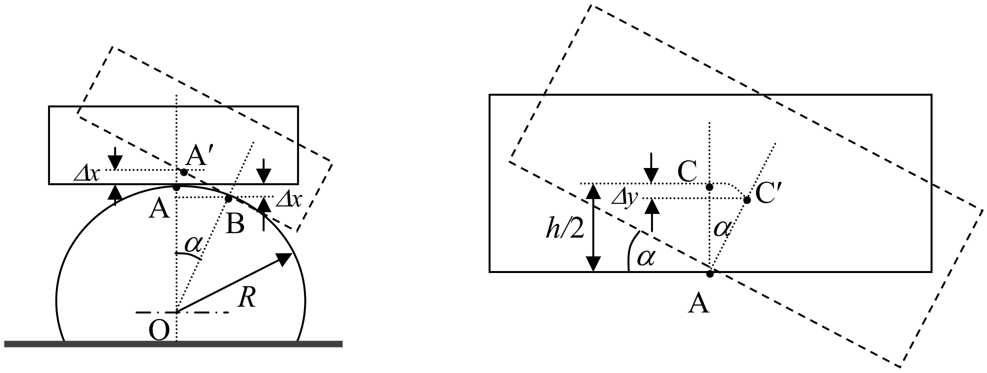
Išsprendę lygčių sistemą, gauname:

$$\beta = arctg\left(\frac{m_2}{m_1 tg\alpha}\right) = 79°;\; T = \frac{m_1 g\sin\alpha}{\cos\beta} = 2{,}6\ \text{N}.$$

5. Storio h vienalytis tašelis padėtas ant įtvirtinto horizontalaus ritinio, kurio spindulys R (žr. brėž.). Koks turi būti h ir R santykis, kad tašelis būtų stabilioje pusiausvyroje? Trintis tarp ritinio ir tašelio labai didelė.



Sprendimas

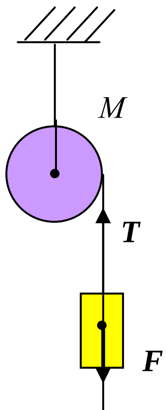


Kūnas yra stabilioje pusiausvyroje, jei jį išvedus iš pusiausvyros padėties, kūno masės centras pakyla. Tarkime, kad tašelį pakreipiame kampu α (žr. brėž.). Taškas A, virš kurio aukštyje $h/2$ buvo tašelio masės centras, pakyla dydžiu Δx, o tašelio ir ritinio lietimosi tarp taškas B po pakreipimo nusileidžia tokiu pat dydžiu (žr. brėž. kairėje). Tuo tarpu tašelio masės centras C taško A atžvilgiu tašelį pakreipus nusileidžia dydžiu Δy (žr. brėž. dešinėje). Taigi, bendras tašelio masės centras stabilios pusiausvyros atveju turi tenkinti nelygybę $\Delta x > \Delta y$. Apskaičiuojame poyčius Δx ir Δy.

$\Delta x = R(1 - \cos\alpha)$, $\Delta y = \frac{h}{2}(1 - \cos\alpha)$. Tuo būdu gauname $R > \frac{h}{2}$.

6. Spindulio R ir masės M vienalytį diską, kurio ašis įtvirtinta prie lubų, įsuka masės m svarelis, kabantis ant susukto plono netąsaus lengvo siūlo, kuris nusivynioja nuo disko. Svarelis paleidžiamas judėti be pradinio greičio. Kokiu pagreičiu juda svarelis? Kokia siūlo įtempimo jėga? Kokiu kampiniu pagreičiu sukasi diskas? Koks disko kampinis greitis tuo metu, kai svarelis nusileidžia dydžiu h?

Sprendimas:



Užrašome antrąjį Niutono dėsnį:

$$\begin{cases} mg - T = ma \\ TR = \dfrac{MR^2}{2}\dfrac{a}{R} \end{cases}.$$

Iš čia

$$a = \frac{2mg}{2m+M}.$$

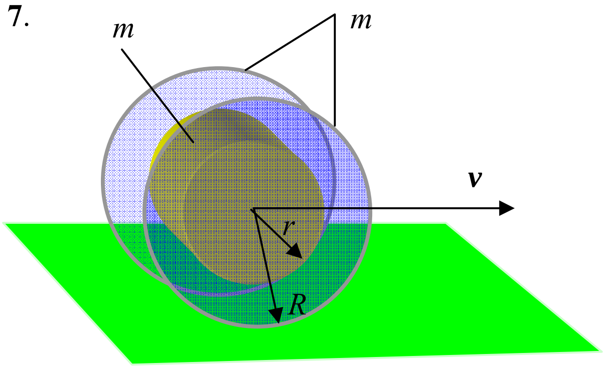
$$T = \frac{Mmg}{2m+M}.$$

Linijinį greitį galima rasti iš

$$v = \sqrt{2ah}.$$

Bet $\omega = \dfrac{v}{R}$, todėl $\omega = \dfrac{2}{R}\sqrt{\dfrac{mgh}{2m+M}}$, $\varepsilon = \dfrac{a}{R} = \dfrac{2mg}{R(2m+M)}$.

7.



Kokią kinetinę energiją turi horizontalia plokštuma be praslydimo riedanti greičiu v špūlė? Špūlę sudaro vidinis vienalytis masės m ir spindulio r cilindras ir du vienalyčiai didesnio spindulio R ir vienodos masės m diskai.

Sprendimas

Kinetinė energija susideda iš masių centro slenkamojo judėjimo kinetinės energijos ir sukamojo judėjimo apie masių centrą kinetinės energijos, t.y.

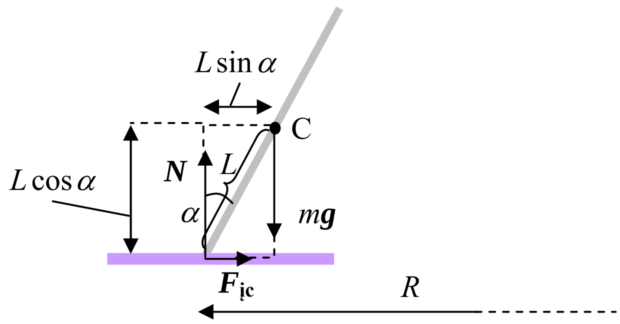
$$W_{kin} = \frac{3mv^2}{2} + \frac{I_0\omega^2}{2} = \frac{3mv^2}{2} + \frac{\frac{1}{2}mr^2\left(\frac{v}{R}\right)^2 + 2\cdot\frac{1}{2}mR^2\left(\frac{v}{R}\right)^2}{2} = \frac{mv^2}{2}\left(4 + \frac{r^2}{2R^2}\right).$$

8. Motociklininkas važiuoja horizontaliu keliu 68 km/h greičiu ir daro posūkį, kurio kreivumo spindulys 120 m. Kokiu kampu nuo vertikalės turi palinkti motociklininkas, kad posūkyje nenuvirstų? Koks šis kampas, jei greitis 100 km/h?

Ats.: Kai greitis 68 km/h, $\alpha = arctg\frac{v^2}{gR} = 16{,}9°$, o kai 100 km/h, $\alpha = 33{,}2°$.

Sprendimas

1- as būdas



Vertikalia kryptimi jėgų atstojamoji lygi 0, todėl $N = mg$.

Motociklininkas juda apskritimu, todėl jį veikia įcentrinė jėga $F_{įc} = \frac{mv^2}{R}$.

Masės centro atžvilgiu motociklininką veikiančių jėgos momentų atstojamoji lygi 0 (motociklas stabilus ir nevirsta), todėl

$$NL\sin\alpha = F_{įc}L\cos\alpha$$

Taigi,

$$\alpha = arctg\frac{v^2}{gR} = 16{,}9°\ .$$

Jei $v = 100\text{km/h}$, $\alpha = 33{,}2°$.

2- as būdas

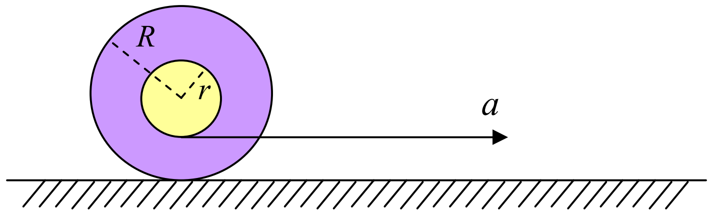
Panagrinėkime motociklą sistemos, nejudamai surištos su juo, atžvilgiu. Tai neinercinė sistema, judanti su įcentriniu pagreičiu, nukreiptu į trajektorijos kreivumo centrą. Pagal Dalambero principą, įvedame inercijos jėgą, lygią $-\mathbf{F}_{įc}$. Šioje sistemoje motociklas nevirsta, todėl jo lietimosi su žeme taško atžvilgiu jėgų momentų atstojamoji lygi 0, t.y.

$$mgL\sin\alpha = \frac{mv^2}{R}L\cos\alpha,\ \text{ iš čia}$$

$$\alpha = arctg\frac{v^2}{gR} = 16{,}9°,\ \text{kai } v = 68\text{km/h},\ \text{ir}$$

$v = 100\text{km/h}$, $\alpha = 33{,}2°$, kai $v = 100\text{km/h}$.

9. Spindulio R špūlė su užvyniotu ant jos vidinės dalies siūlu traukiama grindimis už siūlo galo horizontalia kryptimi taip, kad traukiamo siūlo galo pagreitis yra a (žiūr. brėž.). Špūlės vidinės dalies su siūlais spindulys r. Koks turi būti trinties koeficientas tarp špūlės ir grindų μ_s, kad špūlė nesisuktų? Kaip suktųsi špūlė, jei trinties koeficientas būtų mažesnis už μ_s? Didesnis už μ_s?



Ats.: $\mu_s = \dfrac{ra}{(R-r)g}$. Jei $\mu < \mu_s$, špūlė suktųsi prieš laikrodžio rodyklę (žiūrint į brėžinio plokštumą), o jei $\mu > \mu_s$ - pagal laikrodžio rodyklę.

Sprendimas

2-asis Niutono dėsnis špūlei horizontalia kryptimi

$$F - \mu mg = ma \ ,$$

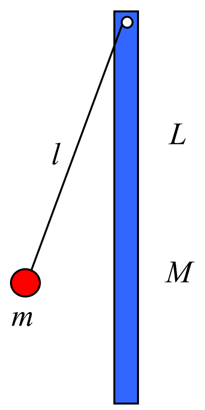
kur F – jėga, kuria tempiamas siūlas.
Jei špūlė nesisuka, centro atžvilgiu ją veikiantis atstojamasis jėgos momentas lygus 0, t.y.

$$Fr = \mu mgR$$

Iš šių lygčių eliminavę F, gauname,

$$\mu = \frac{ra}{g(R-r)}.$$

10. Plonas ilgio L ir masės M strypas pakabintas viename jo gale ir gali sukiotis be trinties. Tame pačiame taške pririštas lengvas ilgio l ($L > l$) siūlas su masės m mažu rutuliuku kitame gale. Rutuliukas atlenkiamas tam tikru kampu ir paleidžiamas. Kokiam siūlo ilgiui rutuliukas po smūgio sustoja, jei smūgis tamprus?



Sprendimas

Užrašome judesio kiekio momento pakabinimo taško atžvilgiu ir energijos tvermės dėsnius duotai sistemai:

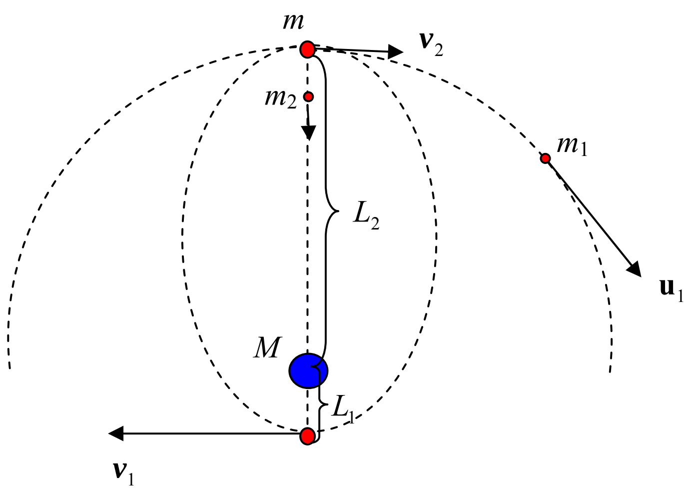
$$\begin{cases} mvl = I\omega \\ \dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{I\omega^2}{2} \end{cases}.$$

Čia tarėme, kad prieš smūgį rutuliukas turėjio greitį v, strypo inercijos momentas pakabinimo ašies atžvilgiu $I = \dfrac{ML^2}{3}$, po smūgio strypas įgijo kampinį greitį ω tos pačios ašies atžvilgiu, o tap pat pasinaudojome sąlyga, kad smūgis tamprus, t.y. visa kinetinė rutuliuko energija prieš smūgį perduota strypui. Išsprendę lygčių sistemą, gauname

$$l = L\sqrt{\frac{M}{3m}}.$$

11. Masės $m = 8{,}0\,\mathbf{t}$ raketa skrieja aplink Žemę elipsės orbita. Perigėjuje raketa nuo Žemės centro nutolusi $L_1 = 7500\,\mathbf{km}$, o apogėjuje – 12000**km**. Apogėjuje raketa sprogsta, skildama į dvi skirtingų masių dalis. Pirmoji dalis toliau skrieja aplink Žemę apskritimine orbita, o antroji dalis vertikaliai nukrinta ant Žemės. Rasti šių raketos dalių mases.

Sprendimas



Užrašome judesio kiekio momento ir energijos tvermės dėsnius perigėjui ir epogėjui visai raketai ir jos daliai m_1, o taip pat pastarajai ir įcentrinės jėgos išraišką:

$$\begin{cases} mv_1L_1 = mv_2L_2 \\ \dfrac{mv_1^2}{2} - \dfrac{mv_2^2}{2} = GMm\left(\dfrac{1}{L_1} - \dfrac{1}{L_2}\right) \\ mv_2L_2 = m_1u_1L_2 \\ \dfrac{m_1u_1^2}{L_2} = G\dfrac{Mm_1}{L_2^2} \end{cases}$$

Čia M - Žemės masė, G – gravitacijos konstanta.
Iš lygčių eliminuojame GM :

$$\begin{cases} v_1L_1 = v_2L_2 \\ v_1^2 - v_2^2 = 2u_1^2L_2\left(\dfrac{1}{L_1} - \dfrac{1}{L_2}\right) \\ mv_2 = m_1u_1 \end{cases}.$$

Lygtis pertvarkome tokiu būdu:

$$\begin{cases} \dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{L_2}{L_1} \\ \left(\dfrac{v_1}{v_2}\right)^2 - 1 = 2\left(\dfrac{u_1}{v_2}\right)^2\left(\dfrac{L_2}{L_1} - 1\right) \\ \dfrac{u_1}{v_2} = \dfrac{m}{m_1} \end{cases}$$

Eliminuojame $\dfrac{u_1}{v_2}$ ir $\dfrac{v_1}{v_2}$:

$$\left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2 - 1 = 2\frac{m^2}{m_1^2}\left(\frac{L_2}{L_1} - 1\right).$$

Iš čia $m_1 = m\sqrt{\dfrac{2L_1}{L_1 + L_2}} \approx 7{,}0\,\mathbf{t}$.

$$m_2 = m - m_1 = m\left(1 - \sqrt{\frac{2L_1}{L_1 + L_2}}\right) = 1{,}0\,\mathbf{t}.$$

12. Medinis strypelis, kurio masė $m = 1{,}0\,\mathrm{kg}$ ir ilgis $l = 40\,\mathrm{cm}$, gali suktis apie ašį, einančią per jo vidurį ir statmeną strypeliui. Į strypelio galą pataiko kulka, kurios masė $m_1 = 10\,\mathrm{g}$, lėkusi statmenai strypeliui greičiu $v = 200\,\mathrm{m/s}$. Rasti kampinį greitį, kuriuo pradės suktis strypelis, jei kulka jame smūgio metu užstringa. Kaip pasikeis bendra sistemos kinetinė energija?

Sprendimas

Pagal judesio kiekio tvermės dėsnį:

$m_1 v \frac{l}{2} = I\omega$. Čia strypelio ir įstrigusios jo gale kulkos inercijos momentas

$$I = m_1 \left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{ml^2}{12} = \frac{3m_1 + m}{12} l^2 .$$

Iš čia $\omega = \frac{6m_1 v}{l(m + 3m_1)} = 29 \mathrm{rad/s}$.

Surandame kinetinę energiją prieš smūgį (T_1) ir po jo (T_2):

$$T_1 = \frac{m_1 v^2}{2},\ T_2 = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{3m_1^2 v^2}{2(3m_1 + m)} .$$

Taigi, $\frac{T_2}{T_1} = \frac{3m_1}{m + 3m_1} = 3\%$.

13. Aukščio $h = 4{,}0\mathrm{m}$ vertikalus stulpas, nupjautas apačioje, virsta ant žemės. Rasti viršutinio stulpo galo linijinį greitį smūgio į žemę metu.

Ats.: $v = \sqrt{3gh} = 11 \mathrm{m/s}$.

Sprendimas

Pritaikome energijos tvermės dėsnį:

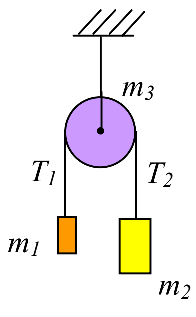
$$mg\frac{h}{2} = \frac{I\omega^2}{2} .$$

Čia $I = \frac{mh^2}{3}$, $\omega = \frac{v}{h}$.

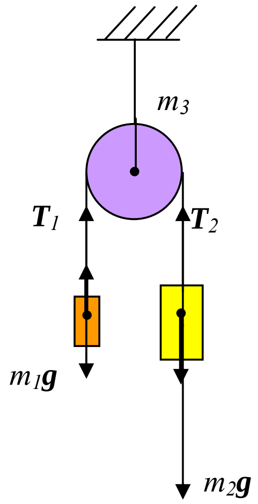
Iš čia $v = \sqrt{3gh} = 11 \mathrm{m/s}$.

14. Du kūnai, kurių masės m_1 ir m_2, sujungti lengvu netąsiu siūlu, kuris permestas per nujudamą masės m_3 skridinį. Sistema paleidžiama judėti. Apskaičiuoti pagreitį a, kuriuo judės kūnai, ir siūlo įtempimo jėgas T_1 ir T_2 atitinkamai ties kūnu m_1 ir m_2 dviem atvejais:

a) siūlas slysta skridiniu be trinties;
b) siūlas skridiniu nepraslysta. Tarti, kad skridinys – vienalytis diskas, o trintis tarp disko ir sukimosi ašies labai maža.



Sprendimas:



a) Užrašome antrąjį Niutono dėsnį: $m_2 g - m_1 g = (m_1 + m_2)a$.

Iš čia $a = \dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$.

Abi siūlo tempimo jėgos vienodos ir lygios:

$$T_1 = T_2 = m_1(g + a) = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g .$$

b) Dabar turime užrašyti antrąjį Niutono dėsnį atskirai kiekvienam kūnui, o skridiniui pritaikome sukamojoj judėjimo pagrindinę lygtį:

$$\begin{cases} T_1' - m_1 g = m_1 a' \\ m_2 g - T_2' = m_2 a' \\ (T_2' - T_1')R = I_3 \beta \end{cases}$$

Čia I_3 - skridinio inercijos momentas ašies atžvilgiu, o β - skridinio kampinis pagreitis.

Bet skridiniui $I_3 = \dfrac{m_3 R^2}{2}$, o $\beta = \dfrac{a'}{R}$, todėl

$$\begin{cases} T_1' - m_1 g = m_1 a' \\ m_2 g - T_2' = m_2 a' \\ (T_2' - T_1')R = \dfrac{m_3 R^2}{2} \dfrac{a'}{R} \end{cases}$$

Išsprendžiame lygčių sistemą:
Iš pirmųjų dviejų lygčių surandame $T_2^{'} - T_1^{'}$ ir įrašome į trečiąją:

$m_2(g - a^{'}) - m_1(g + a^{'}) = \frac{m_3}{2} a^{'}$. Iš čia: $a^{'} = \frac{2(m_2 - m_1)}{2m_1 + 2m_2 + m_3} g$

Surandame tempimo jėgas:

$$T_1^{'} = \frac{(4m_2 + m_3)m_1}{2m_1 + 2m_2 + m_3} g$$

$$T_2^{'} = \frac{(4m_1 + m_3)m_2}{2m_1 + 2m_2 + m_3} g$$